 Pour le 16.03.22

Devoir à la maison n°9

La notation tiendra particuliérement compte de **la qualité de la rédaction, la précision des raisonnements et l'énoncé des formules utilisées**.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{Q}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients rationnels de degré inférieur ou égal à n.

A - Questions préliminaires

1. Montrer que, si P et Q sont des polynômes à coefficients rationnels tels que : $\forall\ k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $P(k) = Q(k)$, alors $P = Q$.
2. Soit $f : \left[0, \frac{1}{2}\right] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose que f'' s'annule, sur $]0, 1[$, uniquement au point $\frac{1}{2}$, et qu'elle change de signe en $\frac{1}{2}$. On suppose de plus que $f(0) = f(\frac{1}{2}) = f(1) = 0$. Montrer alors que f s'annule, sur $]0, 1[$, uniquement en $\frac{1}{2}$, et qu'elle change de signe en $\frac{1}{2}$. Préciser le signe de f à gauche et à droite de $\frac{1}{2}$ en fonction de celui de f''.

B - Les polynômes de Bernoulli

On fixe, dans cette partie, un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Pour tout polynôme $P \in \mathbb{Q}[X]$, on définit le polynôme $\Delta(P) = P(X) - P(X - 1)$.
   (a) Montrer qu'on définit ainsi une application linéaire $\Delta : \mathbb{Q}_{n+1}[X] \to \mathbb{Q}_{n+1}[X]$.
   (b) Soit $P \in \mathbb{Q}_{n+1}[X]$ un polynôme de degré $d \in [\![0, n+1]\!]$ et de coefficient dominant $\alpha \neq 0$. Déterminer le degré et le coefficient dominant du polynôme $\Delta(P)$.
   (c) Déterminer le noyau de l'application Δ.
   (d) Déterminer l'image de l'application Δ.
   (e) Montrer que, pour tout polynôme $P \in \mathbb{Q}_{n+1}[X]$, $\Delta(P') = [\Delta(P)]'$.
2. (a) Soit $P \in \mathbb{Q}[X]$ un polynôme. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :
   (i) pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P(k) = \displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} i^n$
   (ii) $\Delta(P) = (X - 1)^n$ et $P(1) = 0$.
   (b) Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{Q}_{n+1}[X]$ qui vérifie ces propositions. On le notera désormais Q_n.
   (c) Déterminer le degré et le coefficient dominant de Q_n.
   (d) Montrer que $Q_n(0) = Q_n(1) = 0$.
   (e) Déterminer Q_1 et Q_2 ; vérifier que $Q_3 = \dfrac{X^2(X-1)^2}{4}$
   (f) Faire la décomposition en éléments simples de $\dfrac{1}{Q_2}$ et $\dfrac{1}{Q_3}$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$
   (a) Calculer le polynôme $\Delta(Q_n' - nQ_{n-1})$.
   (b) En déduire qu'il existe un nombre rationnel a_n tel que $Q_n' + a_n = nQ_{n-1}$.
4. On a ainsi défini une suite $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de polynômes telle que :

$$Q_1 = \frac{X(X-1)}{2} \qquad \text{et } \forall\ n \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} Q_{n+1}'' = (n+1)Q_n' \\ Q_{n+1}(0) = Q_{n+1}(1) = 0 \end{cases}$$

   Montrer que, si $(R_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une autre suite de polynômes vérifiant la même propriété, alors :

$$\forall\ n \in \mathbb{N}^*, \qquad R_n = Q_n.$$

C - Les nombres de Bernoulli

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\tilde{Q_n} = Q_n(1-X)$ (*composition*).
   (a) Calculer $\tilde{Q_1}$, $\tilde{Q_2}$ et $\tilde{Q_3}$.
   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, comparer $\Delta(\tilde{Q_n})$ et $\Delta(Q_n)$, et en déduire une relation entre $\tilde{Q_n}$ et Q_n.
   (c) En déduire que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $Q_{2p}(\frac{1}{2}) = 0$, $Q'_{2p+1}(\frac{1}{2}) = 0$, et $a_{2p+1} = 0$.
   (d) Exprimer, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, Q''_{2p+2} en fonction de Q_{2p}, et Q''_{2p+1} en fonction de Q_{2p-1} et a_{2p}.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $q_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction polynomiale associée au polynôme Q_n.
   (a) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Établir que, sur le segment $[0,1]$, la fonction q_{2p} ne s'annule qu'en 0, $\frac{1}{2}$ et 1, et change de signe en $\frac{1}{2}$.
   Montrer que le signe de q_{2p} sur $]0, \frac{1}{2}[$ est celui de $(-1)^{p+1}$.
   (b) En déduire que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, la fonction q_{2p+1} est de signe constant sur l'intervalle ouvert $]0,1[$, et que ce signe est celui de $(-1)^{p+1}$.
   Vérifier que c'est encore vrai pour $p = 0$.
   (c) Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, a_{2p} n'est pas nul et qu'il est du signe de $(-1)^p$.
3. On appelle B_p le rationnel positif $(-1)^p a_{2p}$.
   Calculer les nombres B_1, B_2 et B_3 (on pourra établir que $a_n = n\displaystyle\int_0^1 Q_{n-1}(t)\mathrm{d}t$).

D - Une méthode d'approximation des intégrales

Parmi les propriétés de (Q_n) et (B_n), on utilisera uniquement les suivantes :
— $Q_1 = \dfrac{X(X-1)}{2}$
— Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Q'_{2n+2} + (-1)^{n+1}B_{n+1} = (2n+2)Q_{2n+1}$;
— Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Q'' + (2n+1)(-1)^n B_n = (2n+1)(2n)Q_{2n-1}$;
— Pour tout $n \in \mathbb{N}*$, $Q_{2n+1}(0) = Q_{2n+1}(1) = Q'_{2n+1}(0) = Q'_{2n+1}(1) = 0$;
— Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction polynomiale q_{2n+1} est de signe constant sur $[0,1]$

1. Soit f, une fonction 3 fois continuement dérivable sur le segment $[0,1]$ (i.e. de classe $\mathcal{C}^3$). Montrer l'égalité :
$$f(1) - f(0) = \frac{f'(0) + f'(1)}{2} + \int_0^1 Q_1(x) f^{(3)}(x)\mathrm{d}x$$
2. Soit n un entier naturel et f une fonction $2n+3$ fois continuement dérivable sur le segment $[0,1]$.
   (a) Montrer l'égalité :
$$f(1) - f(0) = \frac{f'(0) + f'(1)}{2} + \sum_{p=1}^{n} \frac{(-1)^p B_p}{(2p)!}\left[f^{(2p)}(1) - f^{(2p)}(0)\right] + R_n$$
   où le reste R_n est égal à l'intégrale : $\dfrac{1}{(2n+1)!}\displaystyle\int_0^1 Q_{2n+1}(x) f^{(2n+3)}(x)\mathrm{d}x$
   (b) On pose $M = sup_{x\in[0,1]}|f(2n+3)(x)|$. Justifier cette définition.
   (c) Montrer que la valeur absolue de R_n est majorée par $\dfrac{B_{n+1}M}{(2n+2)!}$.
3. Etablir, pour une fonction g, $2n+2$ fois continuement dérivable sur le segment $[a,b]$ et un entier m supérieur ou égal à 2, la formule de calcul approché de l'intégrale
$$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x = \frac{b-a}{2m}\left[g(a) + g(b) + 2\sum_{k=1}^{m-1} g(a + k\frac{b-a}{m})\right] + \sum_{p=1}^{n} \frac{(-1)^p B_p}{(2p)!}\left(\frac{b-a}{m}\right)^{2p}\left[g^{(2p-1)}(b) - g^{(2p-1)}(a)\right] + R'_n$$
   où la valeur absolue du reste R'_n est majorée par
$$\frac{B_{n+1}}{(2n+2)!} m \left(\frac{b-a}{m}\right)^{2n+3} M'$$
   avec $M' = \sup_{x\in[0,1]}|g^{(2n+2)}(x)|$.