Devoir à la maison n°9
CORRECTION

Problème - Croissance concave des noyaux. Décroissance convexe des images

A. Deux exemples

1. (a) L'image de u se voit à travers les colonnes de M (Rappelons qu'il s'agit de $u(e_1), u(e_2)\dots u(e_4)$).
Or ici, on "voit" $u(e_1) = u(e_2) = e_1 - e_2$, $u(e_3) = -u(e_4) = -e_3 + e_4$
et la famille $\big(u(e_1), u(e_3)\big)$ est clairement libre ($u(e_1)$ et $u(e_3)$ non colinéaires.

$$\boxed{\text{Donc une base de Im } (u) \text{ est la famille } (e_1 - e_2; -e_3 + e_4) \text{ ainsi } \mathrm{rg}(u) = 2.}$$

Très nettement également : $u(e_1 - e_2) = 0$ et $u(e_3 + e_4) = 0$, donc comme $\dim \mathrm{Ker}\, u = 2$,

$$\boxed{\text{une base de Ker } u \text{ est la famille } (e_1 - e_2; e_3 + e_4)}$$

(b) Le calcul donne :

$$\boxed{M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \end{pmatrix}}$$

alors on voit que $M^2 = 2A$ et $M^3 = -4A$.
Remarquons également que $M \times A = 2A$.
Posons, pour tout entier $n \geqslant 2$, $\mathcal{P}_n$:"$M^n = 2^{n-1}A$".
— $\mathcal{P}_2$ est vraie, nous l'avons vu plus haut.
— Soit n, supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie.
Alors $M^n = 2^{n-1}A$ et donc $M^{n+1} = M \times M^n = 2^{n-1}MA = 2^nA$ d'après une remarque précédente.
Ainsi, $\mathcal{P}_{n+1}$ est également vraie.

$$\boxed{\text{Donc pour tout } p \geqslant 2,\ M^p = 2^{p-1}A = 2^{p-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}}.$$

(c) i. Comme pour la question 1.(a) et connaissant M^2, nous pouvons affirmer :

$$\boxed{\text{une base de Im } u^2 \text{ est } (e_3 - e_4), \text{ c'est également une base de Im } u^3\,;}$$

$$\boxed{\text{une base de } \ker u^2 \text{ est } (e_1, e_2, e_3 + e_4), \text{ c'est également une base de Ker } u^3.}$$

ii. Puisque tout les M^k sont colinéaires à A dès que $k \geqslant 2$,
on a donc
$$\boxed{\forall\ k \geqslant 2,\ \mathrm{Ker}\ u^k = \mathrm{Ker}\ u^2,\ \mathrm{Im}\ u^k = \mathrm{Im}\ u^2}$$
dont des bases sont données au dessus.

iii. Montrons que la somme est directe, avec les dimensions nous pourront montrer que cette somme vaut E.
Soit $x \in \mathrm{Ker}\ u^2 \cap \mathrm{Im}\ u^2$.
Donc il existe $y \in E$ tel que $x = u^2(y)$.
Or $u^2(x) = 0$, donc $u^4(y) = u^2(u^2(y)) = 0$ donc $y \in \mathrm{Ker}\ u^4$.
Or $\mathrm{Ker}\ u^4 = \mathrm{Ker}\ u^2$, donc $y \in \mathrm{Ker}\ u^2$ et donc $x = u^2(y) = 0$.
Ainsi $\mathrm{Ker}\ u^2 \cap \mathrm{Im}\ u^2 = \{0\}$.
Par ailleurs, $\dim(\mathrm{Ker}\ u^2 + \mathrm{Im}\ u^2) = \dim(\mathrm{Ker}\ u^2) + \dim(\mathrm{Im}\ u^2)$ car la somme est directe
$\dim(\mathrm{Ker}\ u^2 + \mathrm{Im}\ u^2) = 2 + 2 = 4 = \dim(E)$.
et $\mathrm{Ker}\ u^2 + \mathrm{Im}\ u^2 \subset E$ avec égalité des dimension, donc $\mathrm{Ker}\ u^2 + \mathrm{Im}\ u^2 = E$.
Bilan :
$$\boxed{E = \mathrm{Ker}\ u^2 \oplus \mathrm{Im}\ u^2.}$$

2. Soit $\mathbb{K}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans le corps $\mathbb{K}$ et d l'endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$ qui à un polynôme P associe son polynôme dérivé P'.

   (a) $d(X+1) = 1 = d(X)$,

   $$\boxed{\text{donc } d \text{ n'est pas injectif.}}$$

   Pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k X^k$, on a $d\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} X^{k+1}\right) = P$.

   $$\boxed{\text{Donc } d \text{ est surjectif}}$$

   Si $\mathbb{K}[X]$ était de dimension finie, on aurait :
   pour tout application linéaire u de $\mathbb{K}[X]$, u injective$\Leftrightarrow$ u bijective $\Leftrightarrow$ u surjective.
   Or d est bien linéaire sur $\mathbb{K}[X]$, surjective sans être injective,

   $$\boxed{\text{donc nécessairement } \mathbb{K}[X] \text{ n'est pas de dimension finie.}}$$

   (b) On a (par récurrence) : $\forall\, n \geqslant q$, $d^q(X^n) = \frac{n!}{(n-q)!} X^{n-q}$ et pour $n < q$, $d^q(X^n) = 0$.
   Donc par linéarité de d^q :

   $$\boxed{\text{Ker } d^q = \mathbb{K}_{d-1}[X].}$$

B. Noyaux et images itérés

Soit u un endomorphisme de E, pour tout entier naturel p, on notera $I_p = \text{Im } u^p$ et $K_p = \text{Ker } u^p$.

1. Soit $x \in K_p$, alors $x \in \text{Ker } u^p$ donc $u^{p+1}(x) = u\big(u^p(x)\big) = u(0) = 0$ car u linéaire
   donc $x \in K_{p+1}$ et donc

   $$\boxed{K_p \subset K_{p+1}.}$$

   Soit $y \in I_{p+1}$, donc il existe $x \in E$ tel que $y = u^{p+1}(x) = u^p\big(u(x)\big)$.
   donc $y \in I_p$, et par conséquent :

   $$\boxed{I_{p+1} \subset I_p.}$$

2. On suppose que E est de dimension finie et u injectif.
   Alors u est bijectif et u est surjectif.
   Soit $y \in E$, alors $\exists\ x_1, x_2, \dots x_p$ tel que :
   $y = u(x_1)$, $x_1 = u(x_2)$, $x_2 = u(x_3) \dots x_{p-1} = u(x_p)$ car u surjectif.
   Alors $y = u(x_1) = u^2(x_2) = u^3(x_3) = \cdots = u^p(x_p)$, donc $y \in \text{Im } u^p$.
   Ainsi, $E \subset I_p$.
   L'inclusion réciproque est évidente,

   $$\boxed{\text{Donc } I_p = E.}$$

   Avec le théorème du rang, on a $\dim(K_p) = 0$ et donc

   $$\boxed{K_p = \{0\}.}$$

3. On suppose que E est de dimension finie n non nulle et u non injectif.

   (a) Notons que $K_r \subset K_{r+1}$, donc $\dim K_r \leqslant \dim(K_{r+1})$ avec égalité ssi $K_r = K_{r+1}$.
   Faisons un raisonnement par l'absurde. Supposons $\{r \mid K_r = K_{r+1}\} = \emptyset$
   Si pour tout $r \leqslant n$, $K_r \neq K_{r+1}$, alors $\dim(K_r) < \dim(K_{r+1})$ et $\dim(K_{r+1}) \leqslant \dim(K_r) + 1$.
   Donc

   $$\dim(K_{n+1}) = \sum_{r=0}^{n} \big(\dim(K_{r+1}) - \dim(K_r)\big) \leqslant \sum_{r=0}^{n} 1 = (n+1)$$

   car $K_0 = \{0\}$ et donc $\dim(K_0) = 0$.
   On a donc $K_{n+1} \subset E$ avec des dimensions plus grandes...
   Par conséquent, il y a une contradiction donc il existe $r \leqslant n$ tel que $K_r = K_{r+1}$.
   L'ensemble $\{r \mid K_r = K_{r+1}\}$ est non vide, inclus dans $\mathbb{N}$, il a un plus petit élément.

   $$\boxed{\text{Donc il existe un plus petit entier naturel } r \leqslant n \text{ tel que : } K_r = K_{r+1}.}$$

   (b) Nous savons que $I_{r+1} \subset I_r$,
   et par ailleurs : $\dim(I_r) = \dim E - \dim(K_r) = \dim E - \dim(K_{r+1}) = \dim(I_{r+1})$.
   Donc on a égalité des espaces vectoriels :

   $$\boxed{I_r = I_{r+1}.}$$

Soit $p \in \mathbb{N}$. On va montrer que $K_{r+p} = K_{r+p+1}$, on sait déjà que $K_{r+p} \subset K_{r+p+1}$.
Vérifions l'inclusion réciproque. Soit $x \in K_{r+p+1}$.
Donc $u^{r+p+1}(x) = 0$, donc $u^{r+1}\big(u^p(x)\big)$ et donc $u^p(x) \in K_{r+1}$.
Or $K_{r+1} = K_r$, donc $u^p(x) \in K_r$ donc $0 = u^r\big(u^p(x)\big) = u^{r+p}(x)$ et $x \in K_{r+p}$.
Alors $K_{r+p} \subset K_{r+p+1}$.
Par double inclusion : $K_{r+p} = K_{r+p+1}$.
Ainsi, la suite $(K_{r+p})_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite constante, donc

$$\boxed{\forall\, p \in \mathbb{N},\ K_{r+p} = K_r}$$

Là encore : $I_{r+p} \subset I_r$ et ces deux espaces ont même dimension (théorème du rang), donc

$$\boxed{\forall\, p \in \mathbb{N},\ I_{r+p} = I_r.}$$

(c) Soit $x \in K_r \cap I_r$,
alors il existe y tel que $x = u^r(y)$ et donc $u^{2r}(y) = u^r(x) = 0$ car $x \in K_r$.
Ainsi $y \in K_{2r}$. Or $K_{2r} = K_r$, donc $x = u^r(y) = 0$.
Par conséquent, $K_r \cap I_r = \{0\}(/1)$.
Là encore, pour des raisons de dimensions (cf. A.(c) iii.), on a

$$\boxed{E = K_r \oplus I_r.}$$

4. Non ! Nous voyons qu'

$$\boxed{\text{avec l'exemple de } d \text{ de la première partie : Ker } d^q \neq \text{Ker } d^{q+1}\text{, pour tout } q \in \mathbb{N}.}$$

5. On considère à nouveau que E est de dimension finie.
Soit $p \in \mathbb{N}$. Notons ici $a_p = \dim I_p - \dim I_{p+1}$
et F_p un espace supplémentaire de I_{p+1} dans I_p (la question 1. nous permet de faire cela).
On a donc pour tout $p \in \mathbb{N}$, $F_p \oplus I_{p+1} = I_p$.

(a) Soit $p \in \mathbb{N}$, puisque les espaces sont en supplémentaires : $\dim(F_p) + \dim I_{p+1} = \dim(I_p)$ et donc

$$\boxed{\dim(F_p) = \dim I_p - \dim I_{p+1} =: a_p.}$$

(b) Soit $p \in \mathbb{N}$,
Soit $x \in I_{p+1}$
Alors il existe x' tel que $x = u^{p+1}(x')$.
Or $u^p(x') \in I_p$ donc il existe un unique $(y, z) \in I_{p+1} \times F_p$ tel que $u^p(x') = y + z$.
Puis $x = u^{p+1}(x') = u\left(u^p(x')\right) = u(y + z) = u(y) + u(z)$.
Or $y \in I_{p+1}$ donc il existe y' tel que $y = u^{p+1}(y')$ et donc $u(y) = u^{p+2}(y') \in I_{p+2}$
et $u(z) \in u(F_p)$
Donc $I_{p+1} \subset I_{p+2} + u(F_p)$ (on a perdu le fait que la somme soit directe).
Réciproquement, si $x \in u(F_p)$, alors il existe $a \in F_p$ tel que $x = u(a)$.
or $F_p \subset I_p$, donc $a \in I_p$, donc il existe $b \in E$ tel que $a = u^p(b)$ et $x = u^{p+1}(b) \in I_{p+1}$.
donc $u(F_p) \subset I_{p+1}$ et nous savions que $I_{p+2} \subset I_{p+1}$.
donc comme ce sont des espaces vectoriels : $u(F_p) + I_{p+2} \subset I_{p+1}$.
On a donc démontré par double inclusion :

$$\boxed{\text{pour tout } p \in \mathbb{N},\ I_{p+1} = I_{p+2} + u(F_p).}$$

(c) On a $\dim(I_{p+1}) = \dim(I_{p+2} + u(F_p)) = \dim(I_{p+2}) + \dim\big(u(F_p)\big) - \dim\big(I_{p+2} \cap u(F_p)\big)$.
Donc

$$\boxed{\dim(F_{p+1}) = a_{p+1} = \dim(I_{p+1}) - \dim(I_{p+2}) = \dim\big(u(F_p)\big) - \dim\big(I_{p+2} \cap u(F_p)\big) \leqslant \dim\big(u(F_p)\big)}$$

(d) On applique le théorème du rang à $\tilde{u}$, on a : $\dim(F_p) = \dim(\text{Ker } \tilde{u}) + \dim(\text{Im } \tilde{u})$.
Or $\dim(\text{Ker } \tilde{u}) \geqslant 0$ (à noter que l'on a $\text{Ker } \tilde{u} = F_p \cap \text{Ker } u$).
et $\text{Im } \tilde{u} = u(F_p)$, donc

$$\boxed{\dim(F_p) \geqslant \text{rang}(\tilde{u}) = \dim(u(F_p)).}$$

(e) On a donc pour tout p : $a_{p+1} = \dim F_{p+1} \leqslant \dim u(F_p) \leqslant \dim F_p = a_p$.
Donc la suite (a_p) est décroissante, c'est exactement

$$\boxed{\dim I_{p+1} - \dim I_{p+2} \leqslant \dim I_p - \dim I_{p+1}.}$$

(f) En effet dans ce cas $a_r = 0$,
comme (a_r) est décroissante à valeur entière positive, on a donc $\forall\ p \in \mathbb{N},\ a_{r+p} = 0$.
Cela correspond donc à $\dim(I_{r+p}) = \dim(I_{r+p+1})$, avec l'inclusion d'espaces $I_{r+p+1} \subset I_{r+p}$,
cela donne l'égalité des espaces.
Tous les espaces $(I_{r+p})_p$ sont égaux :

$$\boxed{\forall\ p \in \mathbb{N},\ I_r = I_{r+p}}$$