

Devoir à la maison n°10

La notation tiendra particulièrement compte de la **qualité de la rédaction**, la **précision des raisonnements** et l'**énoncé des formules utilisées**.

Problème - Croissance concave des noyaux. Décroissance convexe des images

Soit E un K espace vectoriel ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et u un endomorphisme de E . On désigne par $\text{Ker } u$ le noyau de u et $\text{Im } u$ l'image de u .

A. Deux exemples

1. Dans cette question, E désigne un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ dont une base est $B = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. Soit u l'endomorphisme de E tel que la matrice de u par rapport à cette base est :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

- (a) Déterminer le rang de u et donner une base de $\text{Im } u$, une base de $\text{Ker } u$ en fonction des vecteurs de la base B .
- (b) Calculer M^2 , M^3 . Montrer qu'il existe une matrice A telle que : $\forall p \geq 2, M^p \in \text{vect}(A)$. On note α_p le coefficient de proportionnalité, donc pour tout $p \geq 2, M^p = \alpha_p A$. Expliciter alors M^p .
- (c) i. Donner une base, en fonction des vecteurs de la base B , de chacun des sous-espaces vectoriels suivants :

$$\text{Im } u^2, \quad \text{Ker } u^2, \quad \text{Im } u^3, \quad \text{Ker } u^3.$$

ii. Déterminer : $\forall k \geq 2, \text{Ker } u^k, \text{Im } u^k$.

iii. Montrer que $E = \text{Ker } u^2 \oplus \text{Im } u^2$.

2. Soit $\mathbb{K}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans le corps $\mathbb{K}$ et d l'endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$ qui à un polynôme P associe son polynôme dérivé P' .
 - (a) d est-il injectif ? d est-il surjectif ? Comment peut-on en déduire que $\mathbb{K}[X]$ n'est pas de dimension finie ?
 - (b) Déterminer : $\forall q \in \mathbb{N}^*, \text{Ker } d^q$.

B. Noyaux et images itérés

Soit u un endomorphisme de E , pour tout entier naturel p , on notera $I_p = \text{Im } u^p$ et $K_p = \text{Ker } u^p$.

1. Montrer que : $\forall p \in \mathbb{N}, K_p \subset K_{p+1}$ et $I_{p+1} \subset I_p$.
2. On suppose que E est de dimension finie et u injectif. Déterminer : $\forall p \in \mathbb{N}, I_p$ et K_p .
3. On suppose que E est de dimension finie n non nulle et u non injectif.
 - (a) Montrer qu'il existe un plus petit entier naturel $r \leq n$ tel que : $K_r = K_{r+1}$.
 - (b) Montrer qu'alors : $I_r = I_{r+1}$ et que : $\forall p \in \mathbb{N}, K_r = K_{r+p}$ et $I_r = I_{r+p}$.
 - (c) Montrer que : $E = K_r \oplus I_r$.
4. Lorsque E n'est pas de dimension finie, existe-t-il un plus petit entier naturel r tel que $K_r = K_{r+1}$?
On pourra prendre un exemple vu précédemment
5. On considère à nouveau que E est de dimension finie.
Soit $p \in \mathbb{N}$. Notons ici $a_p = \dim I_p - \dim I_{p+1}$
et F_p un espace supplémentaire de I_{p+1} dans I_p (la question 1. nous permet de faire cela).
On a donc pour tout $p \in \mathbb{N}, F_p \oplus I_{p+1} = I_p$.
 - (a) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}, a_p = \dim(F_p)$
 - (b) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}, I_{p+1} = I_{p+2} + u(F_p)$.
 - (c) Montrer que $\dim F_{p+1} \leq \dim(u(F_p))$.
 - (d) En considérant $\tilde{u} : F_p \rightarrow E, x \mapsto u(x)$, montrer alors que $\dim(F_p) \geq \dim(u(F_p))$.
 - (e) En déduire que pour tout $p \in \mathbb{N}, \dim I_{p+1} - \dim I_{p+2} \leq \dim I_p - \dim I_{p+1}$.
 - (f) Retrouver à nouveau que si $I_r = I_{r+1}$, alors $\forall p \in \mathbb{N}, I_r = I_{r+p}$.