Devoir à la maison n°11
CORRECTION

Exercice

1. Notons $a_n = \frac{1}{n}$. Alors la suite (a_n) est décroissante et convergente vers 0.
   On peut donc appliquer le critère de Leibniz (critère spécial des séries alternées).

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geqslant 1}(-1)^n a_n = \sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \text{ converge.}}$$

2. On factorise par $\sqrt{n}$ qui est dominant :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)^{-1} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1-\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}+o(\frac{1}{n})\right)$$

$$\boxed{u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)}$$

   D'après la question précédente, $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge et $\sum \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ converge absolument d'après le critère de Riemann (ici $\alpha = \frac{3}{2} > 1$) donc converge.
   Par conséquent, $\sum u_n$ converge si et seulement si $\sum \frac{1}{n}$.
   Or cette dernière série diverge.

$$\boxed{\text{Donc la série } \sum_{n\geqslant 1} u_n \text{ diverge.}}$$

3. On a ainsi trouvé : $u_n \sim a_n$ et $\sum a_n$ converge et $\sum u_n$ diverge.
   Donc on veut appliquer le théorème de convergence par comparaison/équivalence des termes généraux, il est donc bien nécessaire que ces termes généraux soient de signe constant (à partir d'un certain rang).
4. On calcule un développement asymptotique jusqu'à un ordre de convergence absolue (ce qui permettra de ne pas tenir compte du signe).
   Notons d'abord $v_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}$.
   Si $\alpha < 0$, alors $(v_n) \sim 1$ donc elle ne converge pas vers 0. Donc la série diverge grossièrement.
   Si $\alpha = 0$, nous avons des problèmes de définition pour tous les nombres n impairs.
   Supposons donc maintenant que $\alpha > 0$.

$$v_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\left(1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)^{-1} = \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\left(1-\frac{(-1)^n}{n^\alpha}+\frac{1}{n^{2\alpha}}+o(\frac{1}{n^{2\alpha}})\right)$$

$$v_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} - w_n \text{ avec } w_n \sim \frac{1}{n^{2\alpha}}$$

   La série de terme général $\frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge car $\alpha > 0$, d'après le critère de Leibniz.
   Donc $\sum v_n$ et $\sum w_n$ sont de même nature.
   Or $w_n \sim \frac{1}{n^{2\alpha}}$, suites positives.
   Donc, d'après la critère de Riemann, $\sum w_n$ converge ssi $2\alpha > 1$

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n} \text{ converge ssi } \alpha > \tfrac{1}{2}.}$$

Problème - Nombre d'involutions

1. Développement limité de $x \mapsto \exp(x + \frac{x^2}{2})$ défini par récurrence.
   (a) Résoudre le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y' = (1+x)y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

   On note $a : x \mapsto (1+x)$. Les solutions de l'équation différentielle $y' = (1+x)y$ sont de la forme $y = C\exp(A(x))$ où A est une primitive de a.
   On a $A(x) = x + \frac{1}{2}x^2$, donc il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ tel que $y(x) = C\exp\left(x + \frac{1}{2}x^2\right)$.
   On trouve alors pour $C = y(0) = 1$.

$$\boxed{\text{Donc la solution du problème de Cauchy est la fonction } x \mapsto \exp\left(x + \frac{x^2}{2}\right).}$$

   On note donc $\varphi : x \mapsto \exp\left(x + \frac{x^2}{2}\right)$. On admet que φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

   (b) Au voisinage de $u = 0$, $e^u = 1 + u + \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{6}u^3 + \frac{1}{24}u^4 + \frac{1}{120}u^5 + \frac{1}{720}u^6 + o(u^6)$.
   On compose avec $u = x + \frac{x^2}{2} \to 0$, au voisinage de $x = 0$:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= 1 + \left(x + \frac{1}{2}x^2\right) + \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}x^2\right)^2 + \frac{1}{6}\left(x + \frac{1}{2}x^2\right)^3 + \frac{1}{24}\left(x + \frac{1}{2}x^2\right)^4 \\ &\quad + \frac{1}{120}\left(x + \frac{1}{2}x^2\right)^5 + \frac{1}{720}\left(x + \frac{1}{2}x^2\right)^6 + o(u^6) \\ &= 1 + \left(x + \frac{1}{2}x^2\right) + \frac{1}{2}\left(x^2 + x^3 + \frac{1}{4}x^4\right) + \frac{1}{6}\left(x^3 + \frac{3}{2}x^4 + \frac{3}{4}x^5 + \frac{1}{8}x^6\right) \\ &\quad + \frac{1}{24}\left(x^4 + 2x^5 + \frac{3}{2}x^6\right) + \frac{1}{120}\left(x^5 + \frac{5}{2}x^6\right) + \frac{1}{720}x^6 + o(x^6) \end{aligned}$$

$$\boxed{\varphi(x) = 1 + x + x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{10}{24}x^4 + \frac{13}{60}x^5 + \frac{781}{720}x^6 + o(x^6)}$$

   (c) φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) = (1+x)\varphi(x)$ On peut appliquer la formule de Leibniz pour un produit de fonctions (on pourrait aussi faire une récurrence) :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \forall\, x \in \mathbb{R} : \varphi^{(k+1)}(x) = \varphi')^{(k)}(x) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (x \mapsto 1+x)^{(j)}(x)\varphi^{(k-j)}(x)$$

   Pour tout $j > 2$, $(x \mapsto (1+x))^{(j)} = [0]$

$$\boxed{\forall\, k \in \mathbb{N}, \forall\, x \in \mathbb{R} : \varphi^{(k+1)}(x) = (1+x)\varphi^{(k)}(x) + k\varphi^{(k-1)}(x)}$$

   (d) φ étant de classe $\mathcal{C}^\infty$, il admet un $\mathrm{DL}_n(0)$, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
   Supposons donc que $\varphi(x) \underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!}x^k + o(x^n)$.
   On a alors d'après la relation de Taylor : $a_k = \varphi^{(k)}(0)$.
   Et, ainsi, d'après la question précédente :

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, k \leqslant n : \quad a_{k+1} = \varphi^{(k+1)}(0) = 1\varphi^{(k)}(0) + k\varphi^{(k-1)}(0) = a_k + ka_{k-1}}$$

2. Involution de S_n. On note, $I_n = \{\sigma \in S_n \mid \sigma^2 = \mathrm{id}_{\mathbb{N}_n}\}$ puis $i_n = \mathrm{card} I_n$.
   (a) $I_1 = \{\mathrm{id}_{\mathbb{N}_1}\}$, $I_2 = \{\mathrm{id}_{\mathbb{N}_2}, (1\,2)\}$, $I_3 = \{\mathrm{id}_{\mathbb{N}_3}, (1\,2), (1\,3), (2\,3)\}$

$$\boxed{\text{Donc } i_1 = 1,\ i_2 = 1 \text{ et } i_3 = 4.}$$

   (b) De même, sur les 24 permutations de $\mathbb{N}_4$, on compte en fonction du nombre de points fixes de σ.
   1 a quatre points fixes, 6 ont deux points fixes, et 3 n'ont aucun point fixe.

$$I_4 = \{\mathrm{id}_{\mathbb{N}_4}, (1\,2), (1\,3), (1\,4), (2\,3), (2\,4), (3\,4), (1\,2) \circ (3\,4), (1\,3) \circ (2\,4), (1\,4) \circ (2\,3)\}$$

$$\boxed{\text{Donc } i_4 = 10.}$$

(c) Soit $n \geqslant 2$. On considère $\sigma \in I_{n+1}$.

i. On suppose que $\sigma(n+1) = n+1$.
Donc pour tout $k \in \mathbb{N}_n$, $\sigma(k) \in \mathbb{N}_{n+1} \setminus \{n+1\} = \mathbb{N}_n$, donc $s := \sigma_{|\mathbb{N}_n}^{|\mathbb{N}_n}$ est bien défini.
Puis pour tout $k \in \mathbb{N}_n$, $s^2(k) = s(s(k)) = s(\sigma(k)) = \sigma^2(k) = k$.

$$\boxed{s = \sigma_{|\mathbb{N}_n}^{|\mathbb{N}_n} \in I_n.}$$

ii. On suppose que $\sigma(n+1) = k$ avec $k \in \mathbb{N}_n$.
Nécessairement, $\sigma(k) = \sigma(\sigma(n+1)) = \sigma^2(n+1) = \mathrm{id}(n+1) = n+1$.
On note alors $N^{(k)} = \mathbb{N}_n \setminus \{k, n+1\}$, on a pour tout $h \in N^{(k)}$, $\sigma(h) \in N^{(k)}$, car σ est injective. Donc $s' := \sigma_{|N^{(k)}}^{|N^{(k)}}$ est bien définie.
Et de même $(s')^2 = \mathrm{id}_{N^{(k)}}$.

$$\boxed{\sigma_{|N^{(k)}}^{|N^{(k)}} \text{ est une involution de } N^{(k)}, \text{ où } N^{(k)} = \mathbb{N}_n \setminus \{k, n+1\}.}$$

iii. On a alors, selon l'image de $n+1$ par σ

$$I_{n+1} = \biguplus_{k=1}^{n+1} (I_{n+1} \cap \{\sigma \mid \sigma(n+1) = k\})$$

$$\begin{aligned}
i_{n+1} &= \mathrm{card}(I_{n+1}) = \sum_{k=1}^{n+1} \mathrm{card}\,(I_{n+1} \cap \{\sigma \mid \sigma(n+1) = k\}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathrm{card}\,(I_{n+1} \cap \{\sigma \mid \sigma(n+1) = k\}) + \mathrm{card}\,(I_{n+1} \cap \{\sigma \mid \sigma(n+1) = n+1\}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} i_{n-1} + i_n = n i_{n-1} + i_n, \textit{ d'après les décomptes des questions précédentes}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall\, n \geqslant 2, \qquad i_{n+1} = i_n + n i_{n-1} \quad (\star)}$$

(d) Pour que i_0 vérifie la relation $(\star)$ (pour $n = 1$), on doit avoir $2 = i_2 = 1 \times i_1 + 1 \times i_0$ et donc il faudrait $i_0 = 1$.

$$\boxed{\text{On suppose donc que } u_0 = 1 \text{ et } (\star) \text{ est vraie pour tout } n \geqslant 1.}$$

(e) On montre le résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.
On note donc $\mathcal{P}_n$: « $i_n = a_n$ ».
— D'après les calculs précédents $a_0 = 1 = i_0$, $a_1 = 1 = i_1$. Donc $\mathcal{P}_0$ et $\mathcal{P}_1$.
— Soit $n \geqslant 1$ et supposons que $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_{n-1}$ sont vérifiées.
Alors $a_{n+1} = a_n + n a_{n-1} = i_n + n i_{n-1} = i_{n+1}$. Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ i_n = a_n.}$$

3. Nouveau calcul de a_n et donc de i_n

(a) On note $e^x \underset{x\to 0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{k!} x^k + o(x^n)$ et $e^{\frac{x^2}{2}} \underset{x\to 0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{c_k}{k!} x^k + o(x^n)$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = e^x \times e^{\frac{x}{2}}$, le développement limité de φ est donc obtenue par produit de ceux de $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto e^{\frac{x^2}{2}}$.
Il s'agit d'un produit polynomiale, donc de Cauchy :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!} + o(x^n) &= \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{k!} x^k + o(x^n)\right) \times \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{c_k}{k!} x^k + o(x^n)\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{i+j=k} \frac{b_i}{i!} \frac{c_j}{j!} x^{i+j}\right) + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{i+j=k} \frac{b_i}{i!} \frac{c_j}{j!}\right) x^k + o(x^n)
\end{aligned}$$

Par unicité du développement limité, on peut faire l'identification :

$$\frac{a_k}{k!} = \sum_{i+j=k} \frac{1}{i!j!} b_i c_j = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{(k-j)!j!} b_{k-j} c_j$$

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, k \leqslant n, a_k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} b_{k-j} c_j}$$

(b) L'application $x \mapsto \exp \frac{x^2}{2}$ est paire, donc pour tout $h \in \mathbb{N}$, $c_{2h+1} = 0$.

Puis, on sait que $e^t \underset{t\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} t^k + o(t^n)$, en composant avec $t = \frac{x^2}{2} \to 0$

$$\exp \frac{x^2}{2} \underset{t\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k! 2^k} x^{2k} + o(x^{2n})$$

$$\boxed{\forall\, h \in \mathbb{N},\ c_{2h+1} = 0 \text{ et } \frac{c_{2h}}{(2h)!} = \frac{1}{2^h h!} \Leftrightarrow c_{2h} = \frac{(2h)!}{2^h h!}.}$$

(c) Comme par ailleurs, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $b_k = 1$, on trouve donc (avec la notation d'Iverson) :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \qquad a_k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} b_{k-j} c_j \times [j \text{ pair}] + \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} b_{k-j} c_j \times [j \text{ impair}]$$

Or pour j impair, $c_j = 0$
et pour $j \in [\![0, k]\!]$ pair, il existe un unique $h \in [\![0, \lfloor \frac{k}{2} \rfloor]\!]$ tel que $j = 2h$,
On a donc

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \qquad a_k = \sum_{h=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \frac{k!}{(2h)!(k-2h)!} \times 1 \times \frac{(2h)!}{2^h h!}$$

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad i_n = a_n = \sum_{h=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{n!}{2^h \times h!(n-2h)!}}$$

(d) Pour $n = 4$, on a donc

$$\sum_{h=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{4!}{2^h \times h!(n-2h)!} = \sum_{h=0}^{2} \frac{4!}{2^h \times h!(n-2h)!} = \frac{4!}{2^0 \times 0! \times 4!} + \frac{4!}{2 \times 1 \times 2!} + \frac{4!}{4 \times 2! \times 0!}$$

$$\boxed{\sum_{h=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{4!}{2^h \times h!(n-2h)!} = \frac{4!}{4!} + \frac{4!}{4} + \frac{4!}{8} = 1 + 6 + 3 = 10 = i_4}$$