

Devoir à la maison n°11

La notation tiendra particulièrement compte de la **qualité de la rédaction**, la **précision** des raisonnements et l'énoncé des **formules utilisées**.

Exercice

- Démontrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge.
- Donner un développement asymptotique de $u_n := \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$ à la précision $\frac{1}{n\sqrt{n}}$.
En déduire la nature de la $\sum_{n \geq 1} u_n$.
- Qu'a-t-on voulu mettre en évidence avec ces deux questions ?
- Selon α , préciser la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}$.

Problème - Nombre d'involutions

- Développement limité de $x \mapsto \exp(x + \frac{x^2}{2})$ définie par récurrence.
(a) Résoudre le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y' = (1+x)y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

On note $\varphi : x \mapsto \exp(x + \frac{x^2}{2})$. On admet que φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

(b) Donner un développement limité d'ordre 6 de φ au voisinage de 0.

(c) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\varphi^{(k+1)}(x) = (1+x)\varphi^{(k)}(x) + k\varphi^{(k-1)}(x)$.

(d) En déduire que si φ admet comme $DL_n(0) : \varphi(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k!} x^k + o(x^n)$, alors

$$\forall k \in \mathbb{N}_n \quad a_{k+1} = a_k + k a_{k-1}$$

- Involution de S_n . On note, $I_n = \{\sigma \in S_n \mid \sigma^2 = \text{id}_{\mathbb{N}_n}\}$ puis $i_n = \text{card} I_n$.

(a) Calculer i_1 , i_2 et i_3 .

(b) Montrer que $i_4 = 10$.

(c) Soit $n \geq 2$. On considère $\sigma \in I_{n+1}$.

i. On suppose que $\sigma(n+1) = n+1$. Montrer que $\sigma|_{\mathbb{N}_n} \in I_n$

ii. On suppose que $\sigma(n+1) = k$ avec $k \in \mathbb{N}_n$. Que vaut $\sigma(k)$?

Montrer que $\sigma|_{N^{(k)}}$ est une involution de $N^{(k)}$, où $N^{(k)} = \mathbb{N}_n \setminus \{k, n+1\}$

iii. En déduire

$$i_{n+1} = i_n + n i_{n-1} \quad (\star)$$

(d) Quelle valeur donnée à i_0 , pour que la relation $(\star)$ soit également vraie pour $n = 1$?

(e) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $i_n = a_n$.

- Nouveau calcul de a_n et donc de i_n

(a) On note $e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{b_k}{k!} x^k + o(x^n)$ et $e^{\frac{x^2}{2}} \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{c_k}{k!} x^k + o(x^n)$.

Sans calculer explicitement b_k et c_k , montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \leq n$,

$$a_k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} b_{k-j} c_j$$

(b) Exprimer, pour tout $h \in \mathbb{N}$ c_{2h} et c_{2h+1} .

(c) En déduire

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad i_n = \sum_{h=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{1}{2^h \times h! (n-2h)!}$$

(d) Vérifier la formule pour $n = 4$.