# Devoir surveillé n°3

Sujet donné le samedi 13 novembre 2021, 3h 30.

**L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.**

La notation tiendra particulièrement compte de **la qualité de la rédaction, la précision des raisonnements et l'énoncé des formules utilisées. Les réponses aux questions seront numérotées et séparées par un trait horizontal. Les résultats essentiels devront être encadrés ou soulignés.**

BON TRAVAIL

---

# Exercice : étude d'un polynôme

Posons, $P(z) = (z-i)^5 - (z+i)^5$.

.1. Déterminer les racines de $P$.

.2. En déduire la forme factorisée de $P(z)$.

.3. En utilisant le lien entre les racines et les coefficients de $P$, montrer que $\tan\frac{\pi}{5}\tan\frac{2\pi}{5} = \sqrt{5}$.

.4. En déduire l'expression de $\tan\frac{\pi}{5}$ avec des radicaux.

# Problème : Produits de convolution

## Notations :

- On note, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{C}^k(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions à valeurs complexes, définies sur $\mathbb{R}$, $k$ fois dérivables sur $\mathbb{R}$ et telles que la fonction et ses $k$ premières dérivées sont continues sur $\mathbb{R}$. Par exemple, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ appartient à $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ si $f$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et si $f$, $f'$, $f''$ sont continues sur $\mathbb{R}$.
- On note $\tilde{0}$ la fonction (identiquement) nulle sur $\mathbb{R}$.
- Pour tout $\mu \in \mathbb{C}$, on note $e_\mu \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, définie par :

$$e_\mu : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}, x \longmapsto e^{\mu x}$$

- On définit le produit de convolution $*$ de deux fonctions $f, g$ de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ (continues) par :

$$\forall\ f, g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}), \qquad f * g : x \mapsto \int_0^x f(x-t)g(t)\mathrm{d}t$$

- Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$. Lorsque $f$ et $g$ sont des fonctions définies sur $I$ et **à valeurs réelles**, on note « $f \geqslant g$ sur $I$ » (resp. « $g \leqslant f$ sur $I$ ») pour signifier que pour tout $x \in I$, $f(x) \geqslant g(x)$ (resp. pour tout $x \in I$, $g(x) \leqslant f(x)$).
- On définit une famille d'applications $(\mathcal{F}_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{C}}$ de l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^0$ par :

$$\mathcal{F}_\lambda : \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \\ u & \longmapsto & u' - \lambda u \end{array}$$

Ces applications sont étudiées dans les parties **??** et **??**.

# I Quelques calculs et propriétés de la convolution

I.1. Quelques résultats algébriques.
On considère trois fonctions $f$, $g$ et $h$ continues sur $\mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$.

(a) Calculer $f * \widetilde{0}$.

(b) Montrer que $f * g = g * f$.

(c) Montrer que $f * (\lambda g + h) = \lambda(f * g) + f * h$.

(d) On admet que, pour toute fonction $u$ dépendant de trois variables, à valeurs dans $\mathbb{C}$, définie sur $\mathbb{R}^3$ et suffisamment régulière,

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ \int_0^x \left( \int_0^{x-t} u(x,t,s)\mathrm{d}s \right) \mathrm{d}t = \int_0^x \left( \int_0^{x-s} u(x,t,s)\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}s$$

Montrer que $(f * g) * h = f * (g * h)$. On pourra commencer par prouver que $(f * g) * h = (f * h) * g$ puis utiliser ce résultat et la propriété de commutativité du produit de convolution pour conclure.

I.2. Quelques exemples de convolution.

(a) On note $P : t \mapsto t^2 + 2$. Montrer que $e_1 * P = x \mapsto (4e^x - (x^2 + 2x + 4))$.

(b) Calculer $\cos * \sin$ et $\sin * \cos$.

(c) Soient $\lambda$ et $\mu$ deux complexes. Montrer que $e_\lambda * e_\mu : x \mapsto \begin{cases} xe^{\lambda x} & \text{si } \lambda = \mu, \\ \dfrac{e^{\mu x} - e^{\lambda x}}{\mu - \lambda} & \text{sinon.} \end{cases}$

(d) En prenant $\lambda = \mu = i$ et en considérant la partie imaginaire du calcul précédent, retrouver le résultat de la question 2(b).

(e) Soit $a \in \mathbb{C}$. Exprimer $e_a * e_1 * e_{-1}$ comme une combinaison linéaire des fonctions $e_a$, $e_1$ et $e_{-1}$ dont on précisera les coefficients en fonction des valeurs du paramètre $a$. On distinguera les cas $a = 1$, $a = -1$ et $a \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$.

I.3. On s'intéresse au transfert d'inégalité par convolution.

(a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}$ telle que $f \geqslant \tilde{0}$ sur $\mathbb{R}$.
Montrer que pour toutes fonctions $g, h$ définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et continues sur $\mathbb{R}$,

$$g \leqslant h \quad \text{sur } \mathbb{R} \Longrightarrow \begin{cases} f * g \leqslant f * h & \text{sur } [0, +\infty[, \\ f * g \geqslant f * h & \text{sur } ]-\infty, 0]. \end{cases}$$

(b) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}$ telle que $f \geqslant \tilde{0}$ sur $[0, +\infty[$ et $f \leqslant \tilde{0}$ sur $]-\infty, 0]$.
Soient $g, h$ définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continues sur $\mathbb{R}$ et telles que $g \leqslant h$ sur $\mathbb{R}$.
Établir une inégalité entre $f * g$ et $f * h$ sur $\mathbb{R}$.

I.4. Quelques résultats analytiques. Soient $\nu \in \mathbb{C}$ et $h \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$.

(a) Justifier que $e_\nu * h \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ et calculer $(e_\nu * h)(0)$.
*On pourra montrer que $e_\nu * h$ s'écrit comme le produit de deux fonctions dont l'une est une primitive de $e_{-\nu} \times h$ ($\times$ est le produit usuel des fonctions $e_{-\nu}$ et $h$).*

(b) Justifier que $e_\nu * h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et calculer $(e_\nu * h)'(0)$.

# II Résolution d'EDL d'ordre 1 avec la convolution

II.1. Soient $\lambda \in \mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$.
On cherche à résoudre l'équation $\mathcal{F}_\lambda(y) = f$ en fonction de $\lambda$ et $f$, l'inconnue étant $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

(a) Soit $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. Considérons la fonction $z \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $z(x) = y(x)e^{-\lambda x}$.
Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ y'(x) - \lambda y(x) = f(x) \iff \forall x \in \mathbb{R}\ ,\ z'(x) = f(x)e^{-\lambda x}$$

(b) Soit $F$ la primitive de $x \mapsto f(x)e^{-\lambda x}$ qui s'annule en 0. Déterminer, en utilisant la question précédente (et non le cours sur les équations différentielles linéaires) l'ensemble des solutions de $\mathcal{F}_\lambda(y) = f$ que l'on exprimera à l'aide de $F$ et $\lambda$.

(c) Montrer l'équivalence :

$$\mathcal{F}_\lambda(y) = f \iff y \in \{\alpha e_\lambda + e_\lambda * f \mid \alpha \in \mathbb{C}\}$$

(d) $\mathcal{F}_\lambda$ est-elle injective ? surjective ?

II.2. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ à valeurs réelles.
Soit $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, à valeurs réelles, satisfaisant l'inégalité différentielle suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R} \ , \ u'(x) - \lambda u(x) \geqslant f$$

(a) Montrer, en utilisant la question **??**, qu'il existe une unique fonction $v \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ solution du problème suivant :

$$\begin{cases} y' - \lambda y = f & \text{sur } \mathbb{R}, \\ y(0) = u(0) \end{cases}$$

On exprimera $v$ en fonction de $u(0)$, $\lambda$, $e_\lambda$ et $f$ et on montrera que $v$ est à valeurs réelles.

(b) Posons $g = \mathcal{F}_\lambda(u - v)$. Montrer que $u - v = e_\lambda * g$.

(c) En déduire, en utilisant la question **??** et en déterminant le signe de $g$, que

$$\forall x \in ]-\infty, 0] \ , \ u(x) \leqslant v(x) \quad \text{ et } \quad \forall x \in [0, +\infty[ \ , \ u(x) \geqslant v(x) \ .$$

(d) Soit $w \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ à valeurs réelles satisfaisant

$$w(0) = -4 \quad \text{ et } \quad \forall x \in \mathbb{R} \ , \ w'(x) - w(x) \geqslant x^2 + 2 \ .$$

En utilisant des calculs de la partie **??** et les questions précédentes, donner une minoration de $w$ sur $[0, +\infty[$.

(e) Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $b \in \mathbb{R}_+$. Soit $w \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ à valeurs réelles satisfaisant

$$\forall x \in \mathbb{R} \ , \ w'(x) + aw(x) \leqslant b$$

En considérant la fonction $\widehat{w} = -w$ pour utiliser les questions précédentes, montrer que

$$\forall x \in [0, +\infty[ \ , \ w(x) \leqslant w(0)e^{-ax} + \frac{b}{a}(1 - e^{-ax})$$

En déduire que $w$ est majorée sur $\mathbb{R}_+$ et donner un majorant explicite.

# III Résolution d'EDL d'ordre 2 avec la convolution

III.1. Résoudre, dans les fonctions à valeurs complexes, en fonction du paramètre $a \in \mathbb{C}$, l'équation différentielle

$$y'' - (1 + a)y' + ay = e^{-x} \qquad (H_a)$$

On distinguera les cas $a = 1$, $a = -1$ et $a \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$.
*On reviendra sur la résolution de cette équation différentielle dans la suite de cette partie.*

III.2. Équation différentielle linéaire d'ordre 2 (à coefficients constants). Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$.

(a) Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Donner une équation différentielle $(E_{\lambda,\mu})$ pour laquelle on a l'équivalence, pour toute $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$,

$$\mathcal{F}_\lambda \circ \mathcal{F}_\mu(y) = f \iff y \text{ est solution de } (E_{\lambda,\mu}) \text{ sur } \mathbb{R}.$$

(b) En déduire, à l'aide de la question **??**, que l'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$ de $(E_{\lambda,\mu})$ est

$$\{\alpha(e_\mu * e_\lambda) + \beta e_\mu + e_\mu * e_\lambda * f \mid (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2\}.$$

(c) Résoudre, en donnant la ou les solutions sous la forme d'un produit de convolution, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y \text{ est solution de } (E_{\lambda,\mu}) \text{ sur } \mathbb{R}, \\ y(0) = 0 \ , \\ y'(0) = 0 \ . \end{cases}$$

On pourra utiliser les résultats de la question **??**.

(d) Réciproquement, étant donnée l'équation différentielle linéaire du second ordre $(E')$ : $y'' + by' + cy = f$ où $(b, c) \in \mathbb{C}^2$, trouver un couple $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tel qu'on ait l'équivalence :

$$y \text{ solution de } (E') \text{ sur } \mathbb{R} \Longleftrightarrow y \text{ solution de } (E_{\lambda,\mu}) \text{ sur } \mathbb{R} \ .$$

(e) Résoudre une seconde fois, mais à l'aide de produits de convolution, l'équation $(H_a)$.

III.3. Soit $h \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ à valeurs réelles vérifiant $h(0) = 0$, $h'(0) = 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$h''(x) - 3h'(x) + 2h(x) \geqslant e^{-x} \ .$$

(a) Posons $g = h'' - 3h' + 2h$.
En cherchant un problème de Cauchy associé à une équation différentielle linéaire d'ordre 2 ayant $g$ comme second membre et dont $h$ est solution, montrer que

$$h = e_2 * e_1 * (h'' - 3h' + 2h) \ .$$

(b) En déduire que

$$h \geqslant \frac{1}{3}e_2 - \frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{6}e_{-1} \quad \text{sur } \mathbb{R}.$$

# Correction.

Posons, $P(z)=(z-i)^5-(z+i)^5$.

.1. Déterminer les racines de $P$.

---

$$\begin{aligned}
\begin{cases} P(z)=0 \\ z\in\mathbb{C}\end{cases} &\iff \begin{cases} (z-i)^5-(z+i)^5=0 \\ z\in\mathbb{C}\end{cases}\\
&\iff \begin{cases} (z+i)^5=(z-i)^5 \\ z\in\mathbb{C}\backslash\{i\}\end{cases} \quad \text{car } (i+i)^5-(i-i)^5\neq 0 \text{ donc } i \text{ n'est pas solution de } P(z)=0\\
&\iff \begin{cases} \left(\dfrac{z+i}{z-i}\right)^5=1 \\ z\in\mathbb{C}\backslash\{i\}\end{cases}\\
&\iff \begin{cases} \dfrac{z+i}{z-i}\in\mathbb{U}_5 \\ z\in\mathbb{C}\backslash\{i\}\end{cases}\\
&\iff \begin{cases} \exists k\in[\![0,4]\!] \ : \ \dfrac{z+i}{z-i}=e^{i\frac{2k\pi}{5}} \\ z\in\mathbb{C}\backslash\{i\}\end{cases}\\
&\iff \begin{cases} \exists k\in[\![0,4]\!]t \ : \ (1-e^{i\frac{2k\pi}{5}})z=-ie^{i\frac{2k\pi}{5}}-i \\ z\in\mathbb{C}\backslash\{i\}\end{cases}\\
&\iff \begin{cases} \exists k\in[\![0,4]\!] \ : \ -2i\sin\dfrac{k\pi}{5}e^{i\frac{k\pi}{5}}z=-2i\cos\dfrac{k\pi}{5}e^{i\frac{k\pi}{5}} \\ z\in\mathbb{C}\backslash\{i\}\end{cases}\\
&\iff \begin{cases} \exists k\in[\![1,4]\!] \ : \ z=\text{cotan}\dfrac{k\pi}{5} \\ z\in\mathbb{C}\backslash\{i\}\end{cases} \quad \text{car pour } \forall k\in[\![1,4]\!],\ \sin\dfrac{k\pi}{5}\neq 0\\
&\qquad \text{et pour } k=0,\ 0=-2i \text{ n'a aucune solution,}\\
&\iff z\in\left\{\text{cotan}\frac{k\pi}{5}|k\in[\![1,4]\!]\right\}
\end{aligned}$$

/3

$$\boxed{\text{Les racines de } P \text{ sont } \left\{\text{cotan}\frac{k\pi}{5}\,\middle|\, k\in[\![1,4]\!]\right\}.}$$

---

.2. En déduire la forme factorisée de $P(z)$.

---

Observons qu'en développant avec la formule du binôme de Newton,

$$\begin{aligned}
P(z) &= z^5+5z^4(-i)+\underbrace{P_1(z)}_{\text{polynôme de degré} \leqslant 3} -z^5-5z^4(i)+\underbrace{P_2(z)}_{\text{polynôme de degré} \leqslant 3}\\
&= -10iz^4+\underbrace{P_3(z)}_{\text{polynôme de degré} \leqslant 3}
\end{aligned}$$

si bien que $P$ est de degré 4, or nous avons trouvé 4 racines distinctes (car la fonction cotan est injective en restriction à $]0,\pi[$) donc les racines sont toutes simples et puisque le coefficient dominant est $-10i$, /2

$$\boxed{P(z)=-10i\prod_{k=1}^{4}\left(z-\text{cotan}\frac{k\pi}{5}\right)}$$

---

.3. En utilisant le lien entre le produit/la somme des racines et les coefficients de $P$ et montrer que $\tan\dfrac{\pi}{5}\tan\dfrac{2\pi}{5}=\sqrt{5}$.

---

Le produit des racines de $P$ vaut $(-1)^4 \dfrac{\text{coeff. constant de } P}{\text{coeff. dominant de } P} = \dfrac{(-i)^5 - (i)^5}{-10i} = \dfrac{-2i}{-10i} = \dfrac{1}{5}$ donc

$$\frac{1}{\tan\frac{\pi}{5}\tan\frac{2\pi}{5}\tan\frac{3\pi}{5}\tan\frac{4\pi}{5}} = \frac{1}{5}$$

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \not\equiv \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$, $\tan(\pi - x) = -\tan x$ donc $\tan\dfrac{4\pi}{5} = \tan\dfrac{\pi}{5}$ et $\tan\dfrac{3\pi}{5} = \tan\dfrac{2\pi}{5}$ si bien que la relation ci-dessus devient

$$\frac{1}{\tan^2\frac{\pi}{5}\tan^2\frac{2\pi}{5}} = \frac{1}{5}$$

d'où $\tan^2\dfrac{\pi}{5}\tan^2\dfrac{2\pi}{5} = 5$.

Or $\dfrac{\pi}{5} \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et $\dfrac{2\pi}{5} \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ donc $\tan\dfrac{\pi}{5} \geqslant 0$ et $\tan\dfrac{2\pi}{5} \geqslant 0$ si bien que /2

$$\boxed{\tan\frac{\pi}{5}\tan\frac{2\pi}{5} = \sqrt{5}.}$$

---

.4. En déduire l'expression de $\tan\dfrac{\pi}{5}$ avec des radicaux.

---

Posons $a = \tan\dfrac{\pi}{5}$.

D'après la formule de duplication, $\tan\dfrac{2\pi}{5} = \dfrac{2a}{1-a^2}$ donc

$$\tan\frac{\pi}{5}\tan\frac{2\pi}{5} = \sqrt{5} \iff \frac{2a^2}{1-a^2} = \sqrt{5} \iff (2+\sqrt{5})a^2 = \sqrt{5} \iff a^2 = \frac{\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}} \iff a^2 = \frac{\sqrt{5}(2-\sqrt{5})}{-1}$$

Or $\dfrac{\pi}{5} \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ donc $a > 0$ d'où

$$\tan\frac{\pi}{5} = \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$$

/2

$$\boxed{\text{Ainsi, } \tan\frac{\pi}{5} = \sqrt{5-2\sqrt{5}}.}$$

---

# Problème : Produits de convolution

## Notations :

- On note, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{C}^k(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions à valeurs complexes, définies sur $\mathbb{R}$, $k$ fois dérivables sur $\mathbb{R}$ et telles que la fonction et ses $k$ premières dérivées sont continues sur $\mathbb{R}$. Par exemple, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ appartient à $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ si $f$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et si $f$, $f'$, $f''$ sont continues sur $\mathbb{R}$.
- On note $\tilde{0}$ la fonction (identiquement) nulle sur $\mathbb{R}$.
- Pour tout $\mu \in \mathbb{C}$, on note $e_\mu \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, définie par :

$$e_\mu : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}, x \longmapsto e^{\mu x}$$

- On définit le produit de convolution $*$ de deux fonctions $f, g$ de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ (continues) par :

$$\forall\ f, g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}), \qquad f * g : x \mapsto \int_0^x f(x-t)g(t)\mathrm{d}t$$

- Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$. Lorsque $f$ et $g$ sont des fonctions définies sur $I$ et **à valeurs réelles**, on note « $f \geqslant g$ sur $I$ » (resp. « $g \leqslant f$ sur $I$ ») pour signifier que pour tout $x \in I$, $f(x) \geqslant g(x)$ (resp. pour tout $x \in I$, $g(x) \leqslant f(x)$). *Cette inégalité n'a de sens que si $f$ et $g$ sont à valeurs réelles.*

- On définit une famille d'applications $(\mathcal{F}_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{C}}$ de l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^0$ par :

$$\mathcal{F}_\lambda : \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \\ u & \longmapsto & u' - \lambda u \end{array}$$

Ces applications sont étudiées dans les parties **??** et **??**.

# I Quelques calculs et propriétés de la convolution

I.1. Quelques résultats algébriques.
On considère trois fonctions $f$, $g$ et $h$ continues sur $\mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$.

(a) Calculer $f * \widetilde{0}$.

---

Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé quelconque.

$$(f * \widetilde{0})(x) = \int_0^x f(x-t) \times 0\mathrm{d}t = \int_0^x 0\mathrm{d}t = 0$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } f * \widetilde{0} = \widetilde{0}.}$$ /1

---

(b) Montrer que $f * g = g * f$.

---

Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé quelconque.

$$(f*g)(x) = \underbrace{\int_0^x f(x-t)g(t)\mathrm{d}t = \int_{x-0}^{x-x} f(u)g(x-u)(-\mathrm{d}u)}_{\substack{\text{chang. var. } u = x-t \iff t = x-u \\ \mathrm{d}u = -\mathrm{d}t}} = -\int_x^0 f(u)g(x-u)\mathrm{d}u = \int_0^x g(x-u)f(u)\mathrm{d}u = (g*f)(x)$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } f * g = g * f.}$$ /1

---

(c) Montrer que $f * (\lambda g + h) = \lambda(f * g) + f * h$.

---

Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé quelconque.

$$\begin{aligned} f * (\lambda g + h) &= \int_0^x f(x-t)(\lambda g + h)(t)\ \mathrm{d}t \quad \text{par définition de } * \\ &= \int_0^x f(x-t)\big(\lambda g(t) + h(t)\big)\ \mathrm{d}t \\ &= \int_0^x \big(\lambda f(x-t)g(t) + f(x-t)h(t)\big)\ \mathrm{d}t \quad \text{par distributivité de } \times \text{ sur } + \text{ et commutativité de } \times \\ &= \lambda \int_0^x f(x-t)g(t)\mathrm{d}t + \int_0^x f(x-t)h(t)\mathrm{d}t \quad \text{par linéarité de l'intégrale} \\ &= \lambda(f * g) + f * h \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } f * (\lambda g + h) = \lambda(f * g) + f * h.}$$ /1

---

(d) On admet que, pour toute fonction $u$ dépendant de trois variables à valeurs dans $\mathbb{C}$, définie sur $\mathbb{R}^3$ et suffisamment régulière,

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ \int_0^x \left(\int_0^{x-t} u(x,t,s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t = \int_0^x \left(\int_0^{x-s} u(x,t,s)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}s$$

Montrer que $(f * g) * h = f * (g * h)$. On pourra commencer par prouver que $(f * g) * h = (f * h) * g$ puis utiliser ce résultat et la propriété de commutativité du produit de convolution pour conclure.

---

Soient $(f, g, h) \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})^3$ fixées quelconques.

Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé quelconque.

$$\begin{array}{rcll}
((f*g)*h)(x) & = & \displaystyle\int_0^x (f*g)(x-t)h(t)\mathrm{d}t & \text{par déf. de } * \\
& = & \displaystyle\int_0^x \left[\left(\int_0^{x-t} f(x-t-s)g(s)\mathrm{d}s\right)h(t)\right]\mathrm{d}t & \text{par déf. de } * \\
& = & \displaystyle\int_0^x \left(\int_0^{x-t} f(x-t-s)g(s)h(t)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t & \text{par linéarité de l'intégrale, } h(t) \text{ est indép. de } s \\
& = & \displaystyle\int_0^x \left(\int_0^{x-s} f(x-t-s)g(s)h(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}s & \text{en appliquant l'indication} \\
& & & \text{pour } u(x,t,x) \leftarrow f(x-t-s)g(s)h(t) \\
& = & \displaystyle\int_0^x \left(\int_0^{x-s} f(x-t-s)h(t)\mathrm{d}t\right)g(s)\mathrm{d}s & \text{par linéarité de l'intégrale, } g(s) \text{ est indép. de } t \\
& = & \displaystyle\int_0^x \underbrace{\left(\int_0^{x-s} f((x-s)-t)h(t)\mathrm{d}t\right)}_{=(f*h)(x-s)}g(s)\mathrm{d}s & \text{car } f(x-t-s) = f((x-s)-t) \\
& = & \displaystyle\int_0^x (f*h)(x-s)g(s)\mathrm{d}s & \\
& = & ((f*h)*g)(x) &
\end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } \forall (f,g,h) \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})^3,\ (f*g)*h = (f*h)*g\ (P).}$$

Considérons maintenant les fonctions $f$, $g$ et $h$ de l'énoncé.

$$\begin{array}{rcll}
(f*g)*h & = & (g*f)*h & \text{par commutativité du produit de convolution, question } \mathbf{??} \\
& = & (g*h)*f & \text{en appliquant la propriété } (P) \text{ pour } (f,g,h) \leftarrow (g,f,h) \\
& = & f*(g*h) & \text{par commutativité du produit de convolution, question } \mathbf{??}
\end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } (f*g)*h = f*(g*h).}$$ /2

---

I.2. Quelques exemples de convolution.

(a) On note $P : t \mapsto t^2 + 2$. Montrer que $e_1 * P = x \mapsto (4e^x - (x^2 + 2x + 4))$.

---

Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé quelconque.

$$(e_1 * P)(x) = \int_0^x e^{x-t}(t^2+2)\mathrm{d}t = e^x \int_0^x t^2 e^{-t}\mathrm{d}t + 2e^x \int_0^x e^{-t}\mathrm{d}t \quad \text{par linéarité de l'intégrale}$$

Par intégration directe,

$$\int_0^x e^{-t}\mathrm{d}t = \left[-e^{-t}\right]_0^x = -e^{-x} + e^0 = 1 - e^{-x}$$

et en procédant à deux intégrations par parties successives,

$$\begin{array}{rcl}
\displaystyle\int_0^x t^2 e^{-t} & = & \left[t^2(-e^{-t})\right]_0^x - \displaystyle\int_0^x 2t(-e^{-t})\mathrm{d}t \\
& = & -x^2e^{-x} + 0 + \displaystyle\int_0^x 2te^{-t}\mathrm{d}t \\
& = & -x^2e^{-x} + \left[2t(-e^{-t})\right]_0^x - \displaystyle\int_0^x 2(-e^{-t})\mathrm{d}t \\
& = & -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} + 0 + 2\displaystyle\int_0^x e^{-t}\mathrm{d}t \\
& = & -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} + 2(1-e^{-x}) \quad \text{en utilisant le calcul ci-dessus}
\end{array}$$

donc

$$(e_1 * P)(x) = e^x(-x^2e^{-x} - 2xe^{-x} + 2(1-e^{-x})) + 2e^x(1-e^{-x}) = (-x^2 - 2x - 2) + 2e^x + 2e^x - 2$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } \forall x \in \mathbb{R},\ (e_1 * P)(x) = 4e^x - (x^2 + 2x + 4).}$$ /1,5

---

(b) Calculer $\cos * \sin$ et $\sin * \cos$.

---

- D'après la commutativité du produit de convolution établi dans la question **??**, $\cos * \sin = \sin * \cos$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé quelconque.

$$\begin{array}{rcl} (\cos * \sin)(x) & = & \displaystyle\int_0^x \cos(x-t)\sin t \mathrm{d}t \\ \text{linéarisons avec la formule} & & \cos a \sin b = \dfrac{1}{2}\left(\sin(a+b) - \sin(a-b)\right) \\ & = & \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^x \left(\sin(x-t+t) - \sin(x-t-t)\right)\mathrm{d}t \\ & = & \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^x \left(\sin x - \sin(x-2t)\right)\mathrm{d}t \\ & = & \dfrac{1}{2}\left[t\sin x - \dfrac{\cos(x-2t)}{2}\right]_0^x \\ & = & \dfrac{x}{2}\sin x - \dfrac{1}{4}\cos(-x) + \dfrac{1}{4}\cos(x) \\ & = & \dfrac{x}{2}\sin x \quad \text{par parité du cosinus.} \end{array}$$

/2

$$\boxed{\text{Ainsi, } \forall x \in \mathbb{R},\ (\cos * \sin)(x) = (\sin * \cos)(x) = \frac{x}{2}\sin x.}$$

---

(c) Soient $\lambda$ et $\mu$ deux complexes. Montrer que $e_\lambda * e_\mu : x \mapsto \begin{cases} xe^{\lambda x} & \text{si } \lambda = \mu, \\ \dfrac{e^{\mu x} - e^{\lambda x}}{\mu - \lambda} & \text{sinon.} \end{cases}$

---

Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé quelconque.

Par définition du produit de convolution,

$$(e_\lambda * e_\mu)(x) = \int_0^x e^{\lambda(x-t)}e^{\mu t}\mathrm{d}t = e^{\lambda x}\int_0^x e^{(\mu-\lambda)t}\mathrm{d}t$$

si bien qu'il faut intégrer une fonction de la forme $t \mapsto e^{at}$ et nous savons que cela nécessite de distinguer deux cas !

- si $\lambda = \mu$,
$$\int_0^x e^{(\mu-\lambda)t}\mathrm{d}t = \int_0^x e^{0t}\mathrm{d}t = \int_0^x \mathrm{d}t = x \quad \text{donc} \quad (e_\lambda * e_\mu)(x) = xe^{\lambda x}$$
- sinon, $\mu - \lambda \neq 0$ donc
$$\int_0^x e^{(\mu-\lambda)t}\mathrm{d}t = \left[\frac{e^{(\mu-\lambda)t}}{\mu-\lambda}\right]_0^x = \frac{e^{(\mu-\lambda)x} - 1}{\mu-\lambda} \quad \text{donc} \quad (e_\lambda * e_\mu)(x) = \frac{e^{\mu x} - e^{\lambda x}}{\mu - \lambda}$$

/2

$$\boxed{\text{Ainsi, } \forall x \in \mathbb{R},\ e_\lambda * e_\mu(x) = \begin{cases} xe^{\lambda x} & \text{si } \lambda = \mu, \\ \dfrac{e^{\mu x} - e^{\lambda x}}{\mu - \lambda} & \text{sinon.} \end{cases}}$$

---

(d) En prenant $\lambda = \mu = i$ et en considérant la partie imaginaire du calcul précédent, retrouver le résultat de la question 2(b).

---

Appliquons le résultat de la question précédente pour $\lambda = \mu = i$ :

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ (e_i * e_i)(x) = xe^{ix} = x\cos x + ix\sin x$$

En prenant la partie imaginaire des deux membres,

$$\begin{array}{rcl} x\sin x & = & \mathrm{Im}\left((e_i * e_i)(x)\right) \\ & = & \mathrm{Im}\left(\int_0^x e^{i(x-t)}e^{it}\mathrm{d}t\right) \\ & = & \int_0^x \mathrm{Im}(e^{i(x-t)}e^{it})\mathrm{d}t \quad \text{par déf. de l'intégrale d'une fonct. à valeurs complexes} \\ & & \text{or } e^{i(x-t)}e^{it} = \cos(x-t)\cos t - \sin(x-t)\sin t + i\big(\cos(x-t)\sin t + \sin(x-t)\cos t\big) \\ & = & \int_0^x \big(\cos(x-t)\sin t + \sin(x-t)\cos t\big)\mathrm{d}t \\ & = & \int_0^x \cos(x-t)\sin t\mathrm{d}t + \int_0^x \sin(x-t)\cos t\mathrm{d}t \\ & = & (\cos * \sin)(x) + (\sin * \cos)(x) \\ & = & 2(\cos * \sin)(x) \quad \text{par commutativité du produit de convolution (question \textbf{??})} \end{array}$$

/2

$$\boxed{\text{Ainsi, } (\cos * \sin)(x) = \frac{x}{2}\sin x.}$$

---

(e) Soit $a \in \mathbb{C}$. Exprimer $e_a * e_1 * e_{-1}$ comme une combinaison linéaire des fonctions $e_a$, $e_1$ et $e_{-1}$ dont on précisera les coefficients en fonction des valeurs du paramètre $a$. On distinguera les cas $a = 1$, $a = -1$ et $a \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$.

---

Puisque le produit de convolution est associatif, on peut faire le calcul dans l'ordre que l'on souhaite.

D'après 2.(c) : $e_1 * e_{-1} : x \mapsto \frac{1}{-2}(e^{-x} - e^x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

Puis, selon que $a = 1$, $a = -1$ ou $a \notin \{-1, 1\}$ :

— Si $a = 1$ :

$$e_a * e_1 * e_{-1} : x \mapsto \frac{1}{2}[(e_1 * e_1)(x) - (e_1 * e_{-1})(x)] = \frac{1}{2}[xe^x - \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})] = \frac{2x-1}{4}e^x + \frac{1}{4}e^{-x}$$

— Si $a = -1$ :

$$e_a * e_1 * e_{-1} : x \mapsto \frac{1}{2}[(e_{-1} * e_1)(x) - (e_{-1} * e_{-1})(x)] = \frac{1}{2}[\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) - xe^{-x}] = \frac{1}{4}e^x - \frac{2x+1}{4}e^{-x}$$

— Si $a \notin \{-1, 1\}$ :

$$\begin{array}{rl} e_a * e_1 * e_{-1} : x \mapsto & \frac{1}{2}[(e_a * e_1)(x) - (e_a * e_{-1})(x)] = \frac{1}{2}\left(\frac{e^x - e^{ax}}{1-a} - \frac{e^{-x} - e^{ax}}{-1-a}\right) \\ e_a * e_1 * e_{-1} : x \mapsto & \frac{1}{2(1-a)}e^x + \frac{1}{2(1+a)}e^{-x} + \frac{1}{a^2-1}e^{ax} \end{array}$$

/3

$$\boxed{\text{Ainsi, } e_a * e_1 * e_{-1} : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{2(1-a)}e^x + \frac{1}{2(1+a)}e^{-x} + \frac{1}{a^2-1}e^{ax} & \text{si } a \notin \{-1, 1\}, \\ \frac{2x-1}{4}e^x + \frac{1}{4}e^{-x} & \text{si } a = 1, \\ \frac{1}{4}e^x - \frac{2x+1}{4}e^{-x} & \text{si } a = -1. \end{cases}}$$

---

I.3. On s'intéresse au transfert d'inégalité par convolution.

(a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}$ telle que $f \geqslant \tilde{0}$ sur $\mathbb{R}$.

Montrer que pour toutes fonctions $g, h$ définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et continues sur $\mathbb{R}$,

$$g \leqslant h \quad \text{sur } \mathbb{R} \Longrightarrow \begin{cases} f * g \leqslant f * h & \text{sur } [0, +\infty[, \\ f * g \geqslant f * h & \text{sur } ]-\infty, 0]. \end{cases}$$

---

Soient $g, h$ définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continues sur $\mathbb{R}$ et telles que $g \leqslant h$ sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé quelconque.

Par définition du produit de convolution et par linéarité de l'intégrale,

$$(f * h)(x) - (f * g)(x) = \int_0^x f(x-t)h(t)\mathrm{d}t - \int_0^x f(x-t)g(t)\mathrm{d}t = \int_0^x \underbrace{f(x-t)}_{\geqslant 0 \text{ par hyp.}} \times \underbrace{(h(t) - g(t))}_{\geqslant 0 \text{ par hyp.}} \mathrm{d}t$$

- $\star$ Si $x \geqslant 0$, $(f*h)(x)-(f*g)(x)$ est l'intégrale d'une fonction positive ou nulle entre deux bornes, 0 et $x$, dans le « bon ordre » (c'est-à-dire $0 \leqslant x$) donc $(f*h)(x)-(f*g)(x) \geqslant 0$, ce qui prouve $f*g \leqslant f*h$ sur $[0,+\infty[$.
- $\star$ Si $x \leqslant 0$, $(f*h)(x)-(f*g)(x)$ est l'intégrale d'une fonction positive ou nulle entre deux bornes, 0 et $x$, mais $0 \geqslant x$ donc $(f*h)(x)-(f*g)(x) \leqslant 0$, ce qui prouve $f*g \geqslant f*h$ sur $]-\infty,0]$. /2,5

$$\boxed{\text{Ainsi, } g \leqslant h \ \text{ sur } \mathbb{R} \Longrightarrow \begin{cases} f*g \leqslant f*h & \text{sur } [0,+\infty[, \\ f*g \geqslant f*h & \text{sur } ]-\infty,0]. \end{cases}}$$

---

(b) Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}$ telle que $f \geqslant \tilde{0}$ sur $[0,+\infty[$ et $f \leqslant \tilde{0}$ sur $]-\infty,0]$.
Soient $g, h$ définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continues sur $\mathbb{R}$ et telles que $g \leqslant h$ sur $\mathbb{R}$.
Établir une inégalité entre $f*g$ et $f*h$ sur $\mathbb{R}$.

---

Reprenons l'expression intégrale de $(f*h)(x)-(f*g)(x)$ établie dans la question précédente.

- $\star$ Si $x \geqslant 0$,

$$(f*h)(x)-(f*g)(x) = \underbrace{\int_0^x}_{\substack{0 \leqslant x \\ \text{bornes dans} \\ \text{le bon ordre}}} \underbrace{f(x-t)}_{\substack{\geqslant 0 \\ \text{car } t\in[0,x] \text{ donc } x-t \geqslant 0 \\ \text{et } f \geqslant 0 \text{ sur } [0,+\infty[}} \times \underbrace{(h(t)-g(t))}_{\geqslant 0 \ \text{ par hyp.}} \,\mathrm{d}t$$

  donc $(f*h)(x)-(f*g)(x) \geqslant 0$.
- $\star$ Si $x \leqslant 0$,

$$(f*h)(x)-(f*g)(x) = \underbrace{\int_0^x}_{\substack{x \leqslant 0 \\ \text{bornes dans} \\ \text{le mauvais ordre}}} \underbrace{f(x-t)}_{\substack{\leqslant 0 \\ \text{car } t\in[x,0] \text{ donc } x-t \leqslant 0 \\ \text{et } f \leqslant 0 \text{ sur } ]-\infty,0]}} \times \underbrace{(h(t)-g(t))}_{\geqslant 0 \ \text{ par hyp.}} \,\mathrm{d}t$$

  donc $(f*h)(x)-(f*g)(x) \geqslant 0$. /3

$$\boxed{\text{Ainsi, } f*g \leqslant f*h \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

---

I.4. Quelques résultats analytiques. Soient $\nu \in \mathbb{C}$ et $h \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$.

(a) Justifier que $e_\nu * h \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ et calculer $(e_\nu * h)(0)$.
*On pourra montrer que $e_\nu * h$ s'écrit comme le produit de deux fonctions dont l'une est une primitive de $e_{-\nu} \times h$ ($\times$ est le produit usuel des fonctions $e_{-\nu}$ et $h$).*

---

Par définition,

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ (e_\nu * h)(x) = \int_0^x e^{\nu(x-t)} h(t)\mathrm{d}t = e^{\nu x} \times \int_0^x e^{-\nu t} h(t)\mathrm{d}t\ .$$

Or,

- $\star$ $e_\nu = x \mapsto e^{\nu x}$ est continue sur $\mathbb{R}$ par propriété de la fonction exponentielle complexe,
- $\star$ $t \mapsto e^{-\nu t}h(t) = e_{-\nu} \times h$ est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que produit des fonctions $e_{-\nu}$ et $h$ continues sur $\mathbb{R}$ donc la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^x e^{-\nu t} h(t)\mathrm{d}t$ qui est sa primitive s'annulant en 0, est continue sur $\mathbb{R}$,

donc $e_\nu * h$ est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$.
De plus,

$$(e_\nu * h)(0) = \int_0^0 e^{\nu(0-t)} h(t)\mathrm{d}t = 0$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } e_\nu * h \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \text{ et } (e_\nu * h)(0) = 0.}$$ /1,5

---

(b) Justifier que $e_\nu * h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et calculer $(e_\nu * h)'(0)$.

---

- $\star$ $e_\nu = x \mapsto e^{\nu x}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ par propriété de la fonction exponentielle complexe sachant que $x \mapsto \nu x$ est $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ (car polynomiale),

- $\star$ $t \mapsto e^{-\nu t}h(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ (question précédente) donc la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^x e^{-\nu t}h(t)\mathrm{d}t$ qui est sa primitive s'annulant en 0, est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$,

donc $e_\nu * h$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(e_\nu * h)'(x) = \nu e^{\nu x}\int_0^x e^{-\nu t}h(t)\mathrm{d}t + e^{\nu x} \times e^{-\nu x}h(x) = \nu e^{\nu x}\int_0^x e^{-\nu t}h(t)\mathrm{d}t + h(x)$$

donc

$$(e_\nu * h)'(0) = \nu e^0 \int_0^0 e^{-\nu t}h(t)\mathrm{d}t + h(0) = h(0)$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } e_\nu * h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \text{ et } (e_\nu * h)'(0) = h(0).}$$ /3

---

# II Résolution d'EDL d'ordre 1 avec la convolution

II.1. Soient $\lambda \in \mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$.
On cherche à résoudre l'équation $\mathcal{F}_\lambda(y) = f$ en fonction de $\lambda$ et $f$, l'inconnue étant $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

(a) Soit $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. Considérons la fonction $z \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $z(x) = y(x)e^{-\lambda x}$.
Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ y'(x) - \lambda y(x) = f(x) \iff \forall x \in \mathbb{R}\ ,\ z'(x) = f(x)e^{-\lambda x}$$

---

Les applications $y$ et $z$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On peut les dériver.
Par produit :

$$\forall\ x \in \mathbb{R}, \quad z'(x) = y'(x)e^{-\lambda x} - \lambda y(x)e^{-\lambda x} = (y'(x) - \lambda y(x))e^{-\lambda x}$$

Comme le nombre $e^{-\lambda x}$ est strictement positif donc non nul, on a alors l'équivalence : /1

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ y'(x) - \lambda y(x) = f(x) \iff \forall x \in \mathbb{R}\ ,\ z'(x) = f(x)e^{-\lambda x}.}$$

---

(b) Soit $F$ la primitive de $x \mapsto f(x)e^{-\lambda x}$ qui s'annule en 0. Déterminer, en utilisant la question précédente (et non le cours sur les équations différentielles linéaires) l'ensemble des solutions de $\mathcal{F}_\lambda(y) = f$ que l'on exprimera à l'aide de $F$ et $\lambda$.

---

Soit $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, en notant $z = y \times e_{-\lambda}\left(\in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})\right)$, d'après la question précédente, on a les équivalences :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_\lambda(y) = f \quad &\iff \forall\ x \in \mathbb{R}, y'(x) - \lambda y(x) = f(x) \\
&\iff \forall\ x \in \mathbb{R}, z'(x) = f(x)e^{-\lambda x} = F'(x) \\
&\iff \exists\ K \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall\ x \in \mathbb{R}, z(x) = F(x) + K \\
&\iff \exists\ K \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall\ x \in \mathbb{R}, y(x) = F(x)e^{\lambda x} + Ke^{\lambda x}
\end{aligned}$$

Puisqu'on a une équivalence, on peut conclure : /1

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } \mathcal{F}_\lambda(y) = f \text{ est } \{x \mapsto (F(x) + K)e^{\lambda x} \mid K \in \mathbb{R}\}.}$$

---

(c) Montrer l'équivalence :

$$\mathcal{F}_\lambda(y) = f \iff y \in \{\alpha e_\lambda + e_\lambda * f \mid \alpha \in \mathbb{C}\}$$

---

$F$ est la primitive de $x \mapsto f(x)e^{-\lambda x}$ qui s'annule en 0, donc formellement :

$$F : x \mapsto \int_0^x f(t)e^{-\lambda t}\mathrm{d}t = \int_0^x f(t)e^{\lambda(x-t)}e^{-\lambda x}\mathrm{d}t = e^{-\lambda x}\int_0^x e^{\lambda(x-t)}f(t)\mathrm{d}t = e^{-\lambda x} \times (e_\lambda * f)(x)$$

Ainsi, $F \times e_\lambda = e_\lambda * f$.
En reprenant l'ensemble trouvé à la question précédente (avec $\alpha = K$) : /1,5

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } \mathcal{F}_\lambda(y) = f \text{ est } \{\alpha e_\lambda + e_\lambda * f \mid \alpha \in \mathbb{C}\}.}$$

---

(d) $\mathcal{F}_\lambda$ est-elle injective ? surjective ?

---

Pour toute fonction $f$, on a trouvé une solution à l'équation $\mathcal{F}_\lambda(y) = f$ en prenant, par exemple, $e_\lambda * f$.

$$\boxed{\text{Donc } \mathcal{F}_\lambda \text{ est surjective.}}$$

On a également : $\mathcal{F}_\lambda(e_\lambda) = \widetilde{0} = \mathcal{F}_\lambda(\widetilde{0})$ et $e_\lambda \neq \widetilde{0}$.

$$\boxed{\text{Donc } \mathcal{F}_\lambda \text{ n'est pas injective.}}$$

/1

---

II.2. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ à valeurs réelles.
Soit $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, à valeurs réelles, satisfaisant l'inégalité différentielle suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ u'(x) - \lambda u(x) \geqslant f$$

(a) Montrer, en utilisant la question **??**, qu'il existe une unique fonction $v \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ solution du problème suivant :

$$\begin{cases} y' - \lambda y = f & \text{sur } \mathbb{R}, \\ y(0) = u(0) \end{cases}$$

On exprimera $v$ en fonction de $\lambda$, $e_\lambda$ et $f$ et on montrera que $v$ est à valeurs réelles.

---

On peut noter, pour commencer qu'il s'agit d'un problème de Cauchy d'ordre 1, donc

$$\boxed{\text{il admet une unique solution.}}$$

Mais ici, on attend également une réponse explicite.
La fonction $v$ vérifie $\mathcal{F}_\lambda(v) = f$, donc il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $v = \alpha e_\lambda + e_\lambda * f$.
Puis $v(0) = u(0)$, par hypothèse, alors qu'on a également $v(0) = \alpha e^{\lambda 0} + \underbrace{(e_\lambda * f)(0)}_{= 0 \text{ quest. } \mathbf{??}} = \alpha$. /2

$$\boxed{v = u(0)e_\lambda + e_\lambda * f \text{ et il s'agit bien d'une fonction à valeurs réelles (car } e_\lambda \text{ et } f \text{ le sont).}}$$

---

(b) Posons $g = \mathcal{F}_\lambda(u - v)$. Montrer que $u - v = e_\lambda * g$.

---

On applique le résultat de 1.(c), en prenant $y \leftarrow u - v$ et $f \leftarrow g$.
Donc il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $u - v = \alpha e_\lambda + e_\lambda * g$.
Or $(u - v)(0) = u(0) - u(0) = 0 = \alpha$. Donc /1,5

$$\boxed{u - v = e_\lambda * g}$$

---

(c) En déduire, en utilisant la question **??** et en déterminant le signe de $g$, que

$$\forall x \in ]-\infty, 0]\ ,\ u(x) \leqslant v(x) \quad \text{et} \quad \forall x \in [0, +\infty[\ ,\ u(x) \geqslant v(x)\ .$$

---

On a par ailleurs, la relation fonctionnelle :

$$g = \mathcal{F}_\lambda(u - v) = (u - v)' - \lambda(u - v) = (u' - \lambda u) - (v' - \lambda v) \geqslant f - f = \tilde{0}$$

On applique ensuite le résultat de la question **??** pour $f \leftarrow e_\lambda$ (autorisé car $e_\lambda \geqslant \widetilde{0}$ sur $\mathbb{R}$), $g \leftarrow \widetilde{0}$ et $h \leftarrow g$. On a donc

$$\begin{cases} \tilde{0} = e_\lambda * \tilde{0} \leqslant e_\lambda * g = u - v & \text{sur } \mathbb{R}_+, \\ \tilde{0} = e_\lambda * \tilde{0} \geqslant e_\lambda * g = u - v & \text{sur } \mathbb{R}_-. \end{cases}$$

Finalement : /1

$$\boxed{\forall x \in ]-\infty, 0] \ , \ u(x) \leqslant v(x) \quad \text{et} \quad \forall x \in [0, +\infty[ \ , \ u(x) \geqslant v(x) \ .}$$

---

(d) Soit $w \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ à valeurs réelles satisfaisant

$$w(0) = -4 \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R} \ , \ w'(x) - w(x) \geqslant x^2 + 2 \ .$$

En utilisant des calculs de la partie **??** et les questions précédentes, donner une minoration de $w$ sur $[0, +\infty[$.

---

On retrouve ici les hypothèses de la question 2. avec $\lambda \leftarrow 1$, $u \leftarrow w$ et $f \leftarrow P : x \mapsto x^2 + 2$ (question **??**). Cela donne alors

$$v : x \mapsto (w(0)e_1 + e_1 * P)(x) = -4e^x + (4e^x - (x^2 + 2x + 4)) = -x^2 - 2x - 4$$

On a donc /1

$$\boxed{\forall x \in [0, +\infty[ \ , \ w(x) \geqslant -x^2 - 2x - 4 \ .}$$

---

(e) Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $b \in \mathbb{R}_+$. Soit $w \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ à valeurs réelles satisfaisant

$$\forall x \in \mathbb{R} \ , \ w'(x) + aw(x) \leqslant b$$

En considérant la fonction $\widehat{w} = -w$ pour utiliser les questions précédentes, montrer que

$$\forall x \in [0, +\infty[ \ , \ w(x) \leqslant w(0)e^{-ax} + \frac{b}{a}(1 - e^{-ax})$$

En déduire que $w$ est majorée sur $\mathbb{R}_+$ et donner un majorant explicite.

---

On considère $\widehat{w} = -w$, on a donc $\widehat{w}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\widehat{w}'(x) + a\widehat{w}(x) = -w'(x) - aw(x) = -(w'(x) + aw(x)) \geqslant -b$$

On retrouve ici les hypothèses de la question 2. avec $\lambda \leftarrow -a$, $u \leftarrow \widehat{w}$ et $f \leftarrow -b : x \mapsto -b$ (constante). Cela donne alors

$$v : x \mapsto (\widehat{w}(0)e_{-a} + e_{-a} * (-b))(x) = -w(0)e^{-ax} + \underbrace{\frac{b}{a}\left(e^{-ax} - 1\right)}_{= -b \int_0^x e^{-a(x-t)} \mathrm{d}t}$$

On a donc

$$\forall x \in [0, +\infty[ \ , \ \widehat{w}(x) \geqslant -w(0)e^{-ax} + \frac{b}{a}\left(e^{-ax} - 1\right) .$$

/2

$$\boxed{\forall x \in [0, +\infty[ \ , \ w(x) \leqslant w(0)e^{-ax} + \frac{b}{a}\left(1 - e^{-ax}\right) \ .}$$

Enfin,

- $\star$ par positivité de la fonction exponentielle,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \ , \ \frac{b}{a}\left(1 - e^{-ax}\right) = \frac{b}{a} - \frac{b}{a}e^{-ax} \leqslant \frac{b}{a}$$

- $\star$ attention le signe de $w(0)$ n'est pas connu,

— si $w(0) \geqslant 0$, la fonction $s \mapsto w(0)e^{-a}$ est décroissante donc

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \ , \ w(0)e^{-ax} \leqslant w(0)e^{-a\times 0} = w(0),$$

— si $w(0) < 0$, la fonction $s \mapsto w(0)e^{-a}$ est négative ou nulle donc

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \ , \ w(0)e^{-ax} \leqslant 0,$$

Ces deux situations peuvent être unifiées en

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \ , \ w(0)e^{-ax} \leqslant \max(w(0), 0)$$

/1,5

$$\boxed{\text{Ainsi, } \forall x \in [0, +\infty[ \ , \ w(x) \leqslant \max(w(0), 0) + \frac{b}{a} \ .}$$

---

# III Résolution d'EDL d'ordre 2 avec la convolution

III.1. Résoudre, dans les fonctions à valeurs complexes, en fonction du paramètre $a \in \mathbb{C}$, l'équation différentielle

$$y'' - (1+a)y' + ay = e^{-x} \qquad (H_a)$$

On distinguera les cas $a = 1$, $a = -1$ et $a \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$.
*On reviendra sur la résolution de cette équation différentielle dans la suite de cette partie.*

---

- Il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants et avec second membre défini sur $\mathbb{R}$.
  Les coefficients étant constants et le second membre continu sur $\mathbb{R}$, les solutions définies sur un intervalle maximal sont définies sur $\mathbb{R}$ et leur ensemble constitue un plan affine, le plan affine passant par une solution particulière et dirigé par le plan vectoriel des solutions de l'équation homogène.
- **Résolution de l'équation homogène.**
  L'équation caractéristique est $r^2 - (1+a)r + a = 0$, 1 est racine évidente et le produit des racines vaut $a$ donc l'autre racine est $a$.
  L'équation caractéristique admet donc deux racines réelles : 1 et $a$ ce qui nécessite de distinguer le cas où elles sont égales du cas où elles sont distinctes.

  Le plan vectoriel des solutions de l'équation homog

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & \lambda e^x + \mu e^{ax} \end{array} \middle| \ (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 \right\}$$

/0,5

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & (\lambda x + \mu)e^{x} \end{array} \middle| \ (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 \right\}$$

- **Recherche d'une solution particulière.**
  Le second membre est de la forme « polynôme $\times e^{-x}$ » donc on cherche une solution particulière sous la forme $Q(x)e^{-x}$ où $Q$ est une fonction polynomiale telle que
  — $\deg Q = 1$ et le terme constant de $Q$ est nul si $a = -1$ (car $-1$ est alors racine simple de l'équation caractéristique),
  — $\deg Q = 0$ si $a \neq -1$ (car $-1$ n'est alors pas racine de l'équation caractéristique).
  Maintenant, calculons !
  — Si $a = -1$, soit $A \in \mathbb{C}$ tel que $Q(x) = Ax$,

$$\begin{aligned} x \mapsto Axe^{-x} \text{est sol. de } (H_{-1}) &\iff \forall x \in \mathbb{R} \ , \ (Axe^{-x})'' - (1-1)(Axe^{-x})' - Axe^{-x} = e^{-x} \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R} \ , \ (Axe^{-x})'' - Axe^{-x} = e^{-x} \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R} \ , \ (-2Ae^{-x} + Axe^{-x}) - Axe^{-x} = e^{-x} \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R} \ , \ -2Ae^{-x} = e^{-x} \\ &\iff A = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

— Si $a \neq -1$, soit $A \in \mathbb{C}$ tel que $Q(x) = A$,

$$\begin{aligned}
x \mapsto Ae^{-x}\text{est sol. de } (H_a) &\iff \forall x \in \mathbb{R}\ ,\ (Ae^{-x})'' - (1+a)(Ae^{-x})' + aAe^{-x} = e^{-x} \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R}\ ,\ Ae^{-x} + (1+a)Ae^{-x} + aAxe^{-x} = e^{-x} \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R}\ ,\ 2(1+a)Ae^{-x} = e^{-x} \\
&\iff 2(1+a)A = 1 \\
&\iff A = \frac{1}{2(1+a)} \quad (a \neq -1)
\end{aligned}$$

/1,5

Une solution particulière de $(H_a)$ est

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & -\dfrac{1}{2}xe^{-x} \end{array} \quad \text{si } a = -1, \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{2(1+a)}e^{-x} \end{array} \quad \text{si } a \neq 1.$$

Le plan affine des solutions de l'équation $(H_a)$ est

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & \lambda e^{x} + \mu e^{ax} + \dfrac{1}{2(1+a)}e^{-x} \end{array} \;\middle|\; (\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2 \right\} \quad \text{si } a \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\},$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & (\lambda x + \mu)e^{x} + \dfrac{1}{4}e^{-x} \end{array} \;\middle|\; (\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2 \right\} \quad \text{si } a = 1,$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & \lambda e^{x} + \mu e^{-x} - \dfrac{1}{2}xe^{-x} \end{array} \;\middle|\; (\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2 \right\} \quad \text{si } a = -1.$$

---

III.2. Équation différentielle linéaire d'ordre 2 (à coefficients constants). Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$.

(a) Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, donner une équation différentielle $(E_{\lambda,\mu})$ pour laquelle on a l'équivalence, pour toute $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$,

$$\mathcal{F}_\lambda \circ \mathcal{F}_\mu(y) = f \iff y \text{ est solution de } (E_{\lambda,\mu}) \text{ sur } \mathbb{R}.$$

---

Soit $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ fixée quelconque.

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_\lambda \circ \mathcal{F}_\mu(y) &= \mathcal{F}_\lambda(y' - \mu y) \\
&= (y' - \mu y)' - \lambda(y' - \mu y) \\
&= y'' - \mu y' - \lambda y' + \lambda\mu y \\
&= y'' - (\mu + \lambda)y' + \lambda\mu y
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Notons } (E_{\lambda,\mu}) \text{ l'équation différentielle } y'' - (\mu+\lambda)y' + \lambda\mu y = f.}$

D'après le calcul précédent, /1

$\boxed{\forall y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}),\ \mathcal{F}_\lambda \circ \mathcal{F}_\mu(y) = f \iff y \text{ est solution de } (E_{\lambda,\mu}) \text{ sur } \mathbb{R}.}$

---

(b) En déduire, à l'aide de la question **??**, que l'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$ de $(E_{\lambda,\mu})$ est

$$\{\alpha(e_\mu * e_\lambda) + \beta e_\mu + e_\mu * e_\lambda * f \mid (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2\}.$$

$$
\begin{aligned}
y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) \text{ est une sol. déf. sur } \mathbb{R} \text{ de } (E_{\lambda,\mu}) &\iff \mathcal{F}_\lambda \circ \mathcal{F}_\mu(y) = f \quad (\text{question } \textbf{??})\\
&\iff \mathcal{F}_\lambda(\mathcal{F}_\mu(y)) = f\\
&\iff \mathcal{F}_\mu(y) \text{ est solution de l'équation } \mathcal{F}_\lambda(y) = f\\
&\iff \mathcal{F}_\mu(y) \in \{\alpha e_\lambda + e_\lambda * f \mid \alpha \in \mathbb{C}\} \quad (\text{question } \textbf{??})\\
&\iff \exists \alpha \in \mathbb{C} \ : \ \mathcal{F}_\mu(y) = \alpha e_\lambda + e_\lambda * f\\
&\qquad \exists \alpha \in \mathbb{C} \ : \ y \in \{\beta e_\mu + e_\mu * (\alpha e_\lambda + e_\lambda * f) | \ \beta \in \mathbb{C}\}\\
&\qquad \text{d'après la question } \textbf{??} \text{ pour } \lambda \leftarrow \mu, \ f \leftarrow \alpha e_\lambda + e_\lambda * f\\
&\iff \exists \alpha \in \mathbb{C} \ : \ \exists \beta \in \mathbb{C} \ : \ y = \beta e_\mu + e_\mu * (\alpha e_\lambda + e_\lambda * f)\\
&\iff \exists (\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^2 \ : \ y = \beta e_\mu + \alpha(e_\mu * e_\lambda) + e_\mu * e_\lambda * f \quad (\text{question } \textbf{??})\\
&\iff y \in \{\alpha(e_\mu * e_\lambda) + \beta e_\mu + e_\mu * e_\lambda * f \mid (\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^2\}
\end{aligned}
$$

$\boxed{\text{Ainsi, l'ensemble des solutions définies sur } \mathbb{R} \text{ de } (E_{\lambda,\mu}) \text{ est } \{\alpha(e_\mu * e_\lambda) + \beta e_\mu + e_\mu * e_\lambda * f \mid (\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^2\}}$ /2

(c) Résoudre, en donnant la ou les solutions sous la forme d'un produit de convolution, le problème de Cauchy

$$
\begin{cases}
y \text{ est solution de } (E_{\lambda,\mu}) \text{ sur } \mathbb{R},\\
y(0) = 0 \ ,\\
y'(0) = 0 \ .
\end{cases}
$$

On pourra utiliser les résultats de la question **??**.

$$
\begin{aligned}
\begin{array}{l} y \text{ est une sol. du pb.}\\ \text{de Cauchy ci-dessus}\end{array} &\iff \begin{cases} y \in \{\alpha(e_\mu * e_\lambda) + \beta e_\mu + e_\mu * e_\lambda * f \mid (\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^2\}\\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0\end{cases} \quad (\text{question } \textbf{??})\\
&\iff \exists (\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^2 : \begin{cases} y = \alpha(e_\mu * e_\lambda) + \beta e_\mu + e_\mu * e_\lambda * f\\ y(0) = 0\\ y'(0) = 0\end{cases}\\
&\iff \exists (\alpha, \beta \in \mathbb{C}^2) : \begin{cases} y = \alpha(e_\mu * e_\lambda) + \beta e_\mu + e_\mu * e_\lambda * f\\ \alpha \underbrace{(e_\mu * e_\lambda)(0)}_{= 0 \ (\text{quest. } \textbf{??})} + \beta \underbrace{e_\mu(0)}_{=1} + \underbrace{(e_\mu * e_\lambda * f)(0)}_{= 0 \ (\text{quest. } \textbf{??})} = 0\\ \alpha \underbrace{(e_\mu * e_\lambda)'(0)}_{\substack{= e_\lambda(0) \ (\text{quest. } \textbf{??})\\ = 1}} + \beta \underbrace{e'_\mu(0)}_{\substack{= \mu e_\mu(0)\\ = \mu}} + \underbrace{(e_\mu * e_\lambda * f)'(0)}_{\substack{= (e_\lambda * f)(0) \ (\text{quest. } \textbf{??})\\ = 0 \ (\text{quest. } \textbf{??})}} = 0 \end{cases}\\
&\iff \exists (\alpha, \beta \in \mathbb{C}^2) : \begin{cases} y = \alpha e_\mu * e_\lambda + \beta e_\mu + e_\mu * e_\lambda * f\\ \beta = 0\\ \alpha + \beta\mu = 0\end{cases}\\
&\iff \exists (\alpha, \beta \in \mathbb{C}^2) : \begin{cases} y = \alpha e_\mu * e_\lambda + \beta e_\mu + e_\mu * e_\lambda * f\\ \beta = 0\\ \alpha = 0\end{cases}\\
&\iff y = e_\mu * e_\lambda * f
\end{aligned}
$$

$\boxed{\text{Ainsi, le problème de Cauchy considéré admet une unique solution qui est } e_\mu * e_\lambda * f.}$ /2,5

(d) Réciproquement, étant donnée l'équation différentielle linéaire du second ordre $(E') : y'' + by' + cy = f$ où $(b,c) \in \mathbb{C}^2$, trouver un couple $(\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2$ tel qu'on ait l'équivalence :

$$
y \text{ solution de } (E') \text{ sur } \mathbb{R} \iff y \text{ solution de } (E_{\lambda,\mu}) \text{ sur } \mathbb{R} \ .
$$

$z^2+bz+c$ est un trinôme du second degré donc il admet deux racines (non nécessairement distinctes) dans $\mathbb{C}$ que l'on note $\lambda_0$ et $\mu_0$.

Montrons que ce couple $(\lambda_0, \mu_0)$ répond à la question.

$$\begin{aligned} y \text{ est solution de } (E_{\lambda_0,\mu_0}) \text{ sur } \mathbb{R} &\iff y''-(\mu_0+\lambda_0)y'+\lambda_0\mu_0 y = f \quad \text{sur } \mathbb{R} \quad (\text{question } \textbf{??}) \\ &\phantom{\iff}\ \text{or } \lambda_0+\mu_0=-b \text{ et } \lambda_0\mu_0=c \text{ (relations coefficients racines)} \\ &\iff y''+by'+cy=f \quad \text{sur } \mathbb{R} \\ &\iff y \text{ solution de } (E') \text{ sur } \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Si } \lambda \text{ et } \mu \text{ sont les racines dans } \mathbb{C} \text{ de } z^2+bz+c=0, \text{ on a l'équivalence :} \\ \qquad y \text{ solution de } (E') \text{ sur } \mathbb{R} \iff y \text{ solution de } (E_{\lambda,\mu}) \text{ sur } \mathbb{R} \end{array}}$$ /1,5

(e) Résoudre une seconde fois, mais à l'aide de produits de convolution, l'équation $(H_a)$.

Les racines du trinôme $z^2-(1+a)z+a=0$ étant 1 et $a$, d'après la question **??** appliquée pour $(E') \leftarrow (H_a)$, $(\lambda,\mu) \leftarrow (1,a)$ et $f \leftarrow e_{-1}$,

$$y \text{ solution de } (H_a) \text{ sur } \mathbb{R} \iff y \text{ solution de } (E_{1,a}) \text{ sur } \mathbb{R} \text{ avec } f \leftarrow e_{-1}$$

si bien que l'ensemble des solutions de $(H_a)$ est, d'après le résultat établi dans la question **??**,

$$\{\alpha(e_a * e_1) + \beta e_a + e_a * e_1 * e_{-1} \mid (\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^2\}$$

Par ailleurs,

- ⋆ $e_a * e_1 * e_{-1}$ a été calculé dans la question **??** en fonction de $a \in \mathbb{C}$,
- ⋆ $e_a * e_1 = x \mapsto xe^x$ si $a=1$ et $e_a * e_1 = x \mapsto \dfrac{1}{1-a}e^x - \dfrac{1}{1-a}e^{ax}$ si $a \neq 1$,

donc l'ensemble des solutions de $(H_a)$ est

- ⋆ si $a=1$,

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & \alpha x e^x + \beta e^x + \dfrac{1}{4}e^{-x} + \dfrac{2x-1}{4}e^x \end{array} \;\middle|\; (\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^2 \right\} = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & \left(\alpha+\dfrac{1}{2}\right)xe^x + \left(\beta-\dfrac{1}{4}\right)e^x + \dfrac{1}{4}e^{-x} \end{array} \;\middle|\; (\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^2 \right\}$$

ce qui est le même ensemble que celui obtenu dans la question **??** en posant

$$\lambda = \alpha + \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \mu = \beta - \frac{1}{4}$$

car l'application $(\alpha,\beta) \mapsto (\lambda,\mu)$ est bijective (exo) de $\mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{C}^2$.

- ⋆ si $a=-1$,

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & \alpha\left(\dfrac{1}{2}e^x - \dfrac{1}{2}e^{-x}\right) + \beta e^{-x} - \dfrac{2x+1}{4}e^{-x} + \dfrac{1}{4}e^x \end{array} \;\middle|\; (\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^2 \right\}$$

soit

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & \left(\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{1}{4}\right)e^x + \left(-\dfrac{\alpha}{2}+\beta-\dfrac{1}{4}\right)e^{-x} - \dfrac{1}{2}xe^{-x} \end{array} \;\middle|\; (\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^2 \right\}$$

ce qui est le même ensemble que celui obtenu dans la question **??** en posant

$$\lambda = \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad \mu = -\frac{\alpha}{2} + \beta - \frac{1}{4}$$

car l'application $(\alpha,\beta) \mapsto (\lambda,\mu)$ est bijective (exo) de $\mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{C}^2$.

⋆ si $a \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$,

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & \frac{\alpha}{1-a}e^x - \frac{\alpha}{1-a}e^{ax} + \beta e^x + \frac{1}{2(1-a)}e^x + \frac{1}{2(1+a)}e^{-x} + \frac{1}{a^2-1}e^{ax} \end{array} \middle| (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2 \right\}$$

soit

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & \left(\frac{\alpha}{1-a} + \beta + \frac{1}{2(1-a)}\right)e^x + \left(-\frac{\alpha}{1-a} + \frac{1}{a^2-1}\right)e^{ax} + \frac{1}{2(1+a)}e^{-x} \end{array} \middle| (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2 \right\}$$

ce qui est le même ensemble que celui obtenu dans la question **??** en posant /3

$$\lambda = \frac{\alpha}{1-a} + \beta + \frac{1}{2(1-a)} \quad \text{et} \quad \mu = -\frac{\alpha}{1-a} + \frac{1}{a^2-1}$$

car l'application $(\alpha, \beta) \mapsto (\lambda, \mu)$ est bijective (exo) de $\mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{C}^2$.

---

III.3. Soit $h \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ à valeurs réelles vérifiant $h(0) = 0$, $h'(0) = 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$h''(x) - 3h'(x) + 2h(x) \geqslant e^{-x} .$$

(a) Posons $g = h'' - 3h' + 2h$.
En cherchant un problème de Cauchy associé à une équation différentielle linéaire d'ordre 2 ayant $g$ comme second membre et dont $h$ est solution, montrer que

$$h = e_2 * e_1 * (h'' - 3h' + 2h)$$

---

- Remarquons que l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2

$$y'' - 3y' + 2y = g$$

admet pour équation caractéristique $r^2 - 3r + 2 = 0$, or 1 est racine évidente et le produit des racines vaut 2, donc l'autre racine est 2.
D'après le résultat de la question **??**, $y'' - 3y'(x) + 2y = g$ est donc l'équation $(E_{2,1})$ pour $f \leftarrow g$.

- Sachant que $h(0) = h'(0) = 0$, la fonction $h$ est évidemment une solution définie sur $\mathbb{R}$ du problème de Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{l} y'' - 3y' + 2y = (h'' - 3h' + 2h) = g \\ y(0) = 0 , \\ y'(0) = 0 . \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} y \text{ est solution de } (E_{2,1}) \text{ sur } \mathbb{R} \text{ pour } f \leftarrow g = h'' - 3h' + 2h, \\ y(0) = 0 , \\ y'(0) = 0 . \end{array} \right.$$

or nous avons établi dans la question **??** (pour $(\lambda, \mu) \leftarrow (2, 1)$ et $f \leftarrow h'' - 3h' + 2h$) que ce problème de Cauchy admet une unique solution qui est $e_2 * e_1 * (h'' - 3h' + 2h)$ donc, par unicité, c'est $h$. /1,5

$$\boxed{\text{Ainsi, } h = e_2 * e_1 * (h'' - 3h' + 2h).}$$

---

(b) En déduire que

$$h \geqslant \frac{1}{3}e_2 - \frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{6}e_{-1} \quad \text{sur } \mathbb{R}.$$

---

- D'une part, par hypothèse dans cette question,

$$h'' - 3h' + 2h \geqslant e_{-1} \quad \text{sur } \mathbb{R},$$

- d'autre part, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(e_2 * e_1)(x) = \displaystyle\int_0^x e^{2x-2t} e^t \mathrm{d}t$ donc $e_2 * e_1$ **est à valeurs réelles** (ce qui est une des hypothèses que doit satisfaire la fonction $f$ dans le résultat de la question **??**) et, plus précisément, pour $x \in [0, +\infty[$,

$$(e_2 * e_1)(x) = \int_0^x e^{2x-2t} e^t \mathrm{d}t = \underbrace{\int_0^x}_{\substack{x \geqslant 0 \\ \text{bornes dans} \\ \text{le bon ordre}}} \underbrace{e^{2x-t}}_{\geqslant 0} \mathrm{d}t \quad \geqslant \; 0$$

tandis que, pour $x \in ]-\infty, 0]$,

$$(e_2 * e_1)(x) = \int_0^x e^{2x-2t} e^t \mathrm{d}t = \underbrace{\int_0^x}_{\substack{x \leqslant 0 \\ \text{bornes dans} \\ \text{le mauvais ordre}}} \underbrace{e^{2x-t}}_{\geqslant 0} \mathrm{d}t \quad \leqslant \; 0$$

donc

$$e_2 * e_1 \geqslant \widetilde{0} \ \text{ sur } [0, +\infty[ \quad \text{ et } \quad e_2 * e_1 \leqslant \widetilde{0} \ \text{ sur } ]-\infty, 0].$$

Les deux points ci-dessus permettent d'appliquer la propriété de croissance du produit de convolution établie dans la question **??** pour $f \leftarrow e_2 * e_1$, $g \leftarrow e_{-1}$ et $h \leftarrow h'' - 3h' + 2h$ (autorisé car ces deux fonctions sont à valeurs réelles) ce qui donne

$$e_2 * e_1 * (h'' - 3h' + 2h) \geqslant e_2 * e_1 * e_{-1} \quad \text{sur } \mathbb{R}.$$

Par ailleurs, en utilisant les règles de calcul établies dans la question **??**,

$$\begin{aligned}
e_2 * e_1 * e_{-1} &= e_2 * \left( \frac{e_{-1} - e_1}{-1 - 1} \right) \\
&= -\frac{1}{2} e_2 * e_{-1} + \frac{1}{2} e_2 * e_1 \\
&= -\frac{1}{2} \left( \frac{e_{-1} - e_2}{-1 - 2} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{e_1 - e_2}{1 - 2} \right) \\
&= -\frac{1}{2} \left( -\frac{1}{3} e_{-1} + \frac{1}{3} e_2 \right) + \frac{1}{2} (-e_1 + e_2) \\
&= \frac{1}{6} e_{-1} - \frac{1}{6} e_2 - \frac{1}{2} e_1 + \frac{1}{2} e_2 \\
&= \frac{1}{6} e_{-1} - \frac{1}{2} e_1 + \frac{1}{3} e_2
\end{aligned}$$

/3

$$\boxed{\text{Ainsi, } h \geqslant \frac{1}{3} e_2 - \frac{1}{2} e_1 + \frac{1}{6} e_{-1} \quad \text{sur } \mathbb{R}.}$$