Devoir surveillé n°4

Sujet donné le mercredi 8 décembre 2021, 3h.

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

La notation tiendra particulièrement compte de **la qualité de la rédaction, la précision des raisonnements et l'énoncé des formules utilisées. Les réponses aux questions seront numérotées et séparées par un trait horizontal. Les résultats essentiels devront être encadrés ou soulignés.**

BON TRAVAIL

Étude des sous-groupes additifs de $(\mathbb{R},\ +)$ et application à la construction de la fonction logarithme

L'objet de ce problème est l'étude des parties G de $\mathbb{R}$ pour lesquelles la restriction de la loi de composition interne « $+$ » de $\mathbb{R}$ permet d'obtenir une structure de groupe.
La première partie établit quelques résultats préliminaires concernant des questions de densité.
La seconde partie permet de classifier les sous-groupes additifs de $(\mathbb{R},\ +)$, en particulier les sous-groupes engendrés par deux éléments.
En troisième partie, il s'agit de construire une fonction logarithmique sur un sous-groupe dense de $\mathbb{R}$.
En dernière partie, nous prolongeons la fonction du logarithmique à $\mathbb{R}$ par densité.

La partie III est indépendante des parties précédentes.
En revanche, la partie IV est fortement liée à la partie III.
Tout résultat, une fois établi, peut être utilisé dans la suite du problème.
On admettra que π est un nombre irrationnel

I Sur les parties denses et discrètes de $\mathbb{R}$

Rappelons et donnons quelques définitions utilisées dans la suite du problème.

— Une partie $A \subset \mathbb{R}$ non vide est *dense dans* $\mathbb{R}$
si $\forall (x,\ y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x < y$, il existe au moins un élément $a \in A$ tel que $a \in]x,\ y[$.

— Une partie $A \subset \mathbb{R}$ qui n'est pas dense dans $\mathbb{R}$ est dite *non dense dans* $\mathbb{R}$.

— Une partie $A \subset \mathbb{R}$ non vide est *discrète (dans $\mathbb{R}$)*
si $\forall a \in A$, il existe un réel $\eta > 0$ tel que $]a-\eta,\ a+\eta[\cap A = \{a\}$

I.1. Montrer que $A \subset \mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si

$$\forall (x,\ \varepsilon) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*,\ \exists a \in A\ :\ |x-a| < \varepsilon.$$

I.2. Démontrer que $\mathcal{D} = \left\{ \frac{k}{3^p} \;\middle|\; (k,\ p) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \right\}$ est une partie dense de $\mathbb{R}$. Est-elle incluse dans $\mathbb{Q}$ ou égale à $\mathbb{Q}$ (réponse à démontrer) ?

I.3. Donner les deux caractérisations des parties non denses qui se déduisent, par négation, des assertions équivalentes de la question I.1. Donner (avec justification) un exemple de partie de cardinal infini non dense de $\mathbb{R}$.

I.4. Donner (avec justification) un exemple de partie discrète non bornée de $\mathbb{R}$.

I.5. Montrer que $\mathcal{E} = \left\{ \frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}^* \right\}$ est discrète dans $\mathbb{R}$. La partie $\mathcal{E} \cup \{0\}$ est-elle également discrète dans $\mathbb{R}$?

I.6. Une partie non vide de $\mathbb{R}$ peut-elle être simultanément dense et discrète ?

I.7. Donner (avec justification) un exemple de partie non bornée, ni dense ni discrète dans $\mathbb{R}$.

II Classification des sous-groupes de $(\mathbb{R}, +)$

Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R},\ +)$ non réduit à $\{0\}$.

II.1. Soit $g \in G$. Montrer que l'ensemble $\{kg \mid k \in \mathbb{Z}\}$, qui sera désormais noté $g\mathbb{Z}$, est inclus dans G.

II.2. Montrer que $G \cap \mathbb{R}_+^*$ admet une borne inférieure a positive ou nulle dans $\mathbb{R}$.

Selon la valeur de a ($a = 0$ ou $a > 0$), la nature du groupe G varie comme le montrent les questions 3. et 4. suivantes.

II.3. (a) Donner un sous-groupe additif G de $(\mathbb{R}, +)$ satisfaisant la condition $\inf G \cap \mathbb{R}_+^* > 0$.

Supposons $a > 0$ dans la suite de cette question.

(b) i. Montrer que, si $a \notin G$, alors il existe $(g_1, g_2) \in G^2$ tels que $a < g_1 < g_2 < 2a$.

ii. En considérant $g_2 - g_1$, montrer que $G \cap \mathbb{R}_+^*$ admet a pour plus petit élément.

(c) Soit g un élément quelconque de G. Montrer (sans utiliser un résultat répondant directement à la question) qu'il existe un unique $n \in \mathbb{Z}$ tel que $0 \leqslant g - na < a$. En déduire que $g - na = 0$.

(d) Conclure que $G = a\mathbb{Z}$. G est-il discret ?

II.4. (a) Donner un sous-groupe additif G de $(\mathbb{R}, +)$ satisfaisant la condition $\inf G \cap \mathbb{R}_+^* = 0$.
Dans la suite de cette question, supposons que $a = 0$. Soient $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et $x \in \mathbb{R}$ fixés quelconques.

(b) Montrer qu'il existe $g \in G$ tel que $0 < g < \varepsilon$.

(c) En effectuant la division pseudo-euclidienne de x par g, établir l'existence de $n \in \mathbb{Z} : |ng - x| < \varepsilon$. Que vient-on de prouver concernant le sous-groupe G ?

II.5. Étude des sous-groupes de $(\mathbb{R}, +)$ engendré par deux éléments.
Soient $(x,\ y) \in {\mathbb{R}_+^*}^2$. Posons $G_{x,y} = \{nx + my \mid (n,\ m) \in \mathbb{Z}^2\}$.

(a) Montrer que $G_{x,y}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R},\ +)$ non réduit à $\{0\}$.

(b) Montrer que $G_{x,y}$ est discret si et seulement si $\dfrac{x}{y}$ est un nombre rationnel.

(c) En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que le sous-groupe $G_{x,y}$ soit dense.

(d) En considérant le sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ noté $G_{1,2\pi}$, calculer $\sup\{\cos(n) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ et $\inf\{\cos(n) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ après en avoir justifié l'existence dans $\mathbb{R}$.

(e) Montrer plus généralement que l'ensemble $\{\cos(n) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans $[-1, 1]$.

III Construction du logarithme népérien sur $\mathbb{Q}_+^*$

Considérons la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Considérons, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, la suite $e^{(m)}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ e_n^{(m)} = H_{mn} - H_n$.

III.1. Soient $(a, b) \in {\mathbb{N}^*}^2$ fixés tels que $a \leqslant b$. Montrer, après avoir encadrer $\dfrac{1}{k}$ lorsque $k \in [\![a, b]\!]$, que

$$\frac{b-a}{b} \leqslant \sum_{k=a+1}^{b} \frac{1}{k} \leqslant \frac{b-a}{a+1}$$

III.2. Soit $m \in \mathbb{N}^*$ fixé.

(a) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*\ ,\ 0 \leqslant e_n^{(m)} \leqslant \frac{(m-1)n}{n+1}$$

(b) Montrer que $(e_n^{(m)})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante. On pourra utiliser la minoration de la question III.1.

(c) En déduire que la suite $(e_n^{(m)})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

Ce résultat permet de définir l'application $f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^* & \to & \mathbb{R} \\ m & \mapsto & \lim\limits_{n\to+\infty} e_n^{(m)} \end{array} \right.$ ce qui signifie que, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $f(m) = \lim\limits_{n\to+\infty} e_n^{(m)}$.

III.3. Soient $(m,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

(a) Justifier que les suites $(H_{pn} - H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(H_{mpn} - H_{pn})_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent et déterminer leurs limites respectives.

(b) En déduire que $f(mp) = f(m) + f(p)$ (ce qui signifie que f est un morphisme de $(\mathbb{N}^*, \times)$ dans $(\mathbb{R}, +)$).

III.4. Posons $\ell \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{Q}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ r & \mapsto & f(p) - f(q) \end{array} \right.$ où $r = \dfrac{p}{q}$ avec $(p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$

(a) Pourquoi n'est-il pas immédiat de voir que ℓ est une application bien définie sur $\mathbb{Q}_+^*$? que faut-il faire pour prouver que ℓ est une application bien définie ?

(b) Montrer que ℓ est une application bien définie ?

(c) Montrer que ℓ est un morphisme de groupes de $(\mathbb{Q}_+^*, \times)$ dans $(\mathbb{R}, +)$.

III.5. L'objectif de cette question est de prouver que ℓ est strictement croissante. Soient $(r_1, r_2) \in {\mathbb{Q}_+^*}^2$ fixés tels que $r_1 < r_2$.

(a) Soient $(m,p) \in \mathbb{N}^{*2}$. Montrer que $f(m+p) - f(m) \geqslant \dfrac{p}{m+p}$.

(b) Justifier l'existence de $(m,p) \in \mathbb{N}^{*2}$ tels que $r_2 = r_1\left(1 + \dfrac{m}{p}\right)$.

(c) Montrer que $\ell(r_2) - \ell(r_1) = \ell\left(\dfrac{m+p}{p}\right)$ puis conclure.

III.6. (a) Montrer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, en encadrant $u \mapsto \dfrac{1}{u}$ sur $[k, k+1]$, que $\dfrac{1}{k+1} \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}u}{u} \leqslant \frac{1}{k}$.

(b) En déduire que

$$\forall m \in \mathbb{N}^* \ , \ \forall n \in \mathbb{N}^* \ , \ \int_{n+1}^{mn+1} \frac{\mathrm{d}u}{u} \leqslant \sum_{k=n+1}^{mn} \frac{1}{k} \leqslant \int_n^{mn} \frac{\mathrm{d}u}{u} \ .$$

(c) Conclure que $\forall m \in \mathbb{N}^*$, $f(m) = \ln m$ puis que ℓ coïncide avec la fonction logarithme népérien sur $\mathbb{Q}_+^*$.

IV Construction du logarithme népérien sur $\mathbb{R}$

On considère une fonction ℓ définie sur $\mathbb{Q}_+^*$, croissante et coïncidant avec la fonction logarithme népérien sur $\mathbb{Q}_+^*$.

IV.1. (a) Soit $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \mathbb{Q}_+^*$.
Montrer que $\{\ell(r) \mid r \in \mathbb{Q}_+^* \ , \ r \leqslant x\}$ admet une borne supérieure.

On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\overline{\ell}(x) = \begin{cases} \sup\{\ell(r) \mid r \in \mathbb{Q}_+^* \ , \ r \leqslant x\} & \text{si } x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \mathbb{Q}_+^*, \\ \ell(x) & \text{si } x \in \mathbb{Q}_+^*. \end{cases}$

(b) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\overline{\ell}(x) = \sup\{\ell(r) \mid r \in \mathbb{Q}_+^* \ , \ r \leqslant x\}$.

(c) En déduire que $\overline{\ell}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Est-elle strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$?

IV.2. Conclure que $\overline{\ell} = \ln$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

On pourra considérer, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ fixé, la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $r_n = \dfrac{\lfloor 2^n x \rfloor}{2^n}$ et montrer qu'il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant n_0 \Rightarrow \overline{\ell}(r_n) \leqslant \overline{\ell}(x)$.

Correction

Étude des sous-groupes additifs de $(\mathbb{R},\ +)$ et application à la construction de la fonction logarithme

L'objet de ce problème est l'étude des parties G de $\mathbb{R}$ pour lesquelles la restriction de la loi de composition interne « + » de $\mathbb{R}$ permet d'obtenir une structure de groupe.
La première partie établit quelques résultats préliminaires concernant des questions de densité.
La seconde partie permet de classifier les sous-groupes additifs de $(\mathbb{R},\ +)$, en particulier les sous-groupes engendrés par deux éléments.
En troisième partie, il s'agit de construire une fonction logarithmique sur un sous-groupe dense de $\mathbb{R}$.
En dernière partie, nous prolongeons la fonction du logarithmique à $\mathbb{R}$ par densité.

La partie III est indépendante des parties précédentes.
En revanche, la partie IV est fortement liée à la partie III.
Tout résultat, une fois établi, peut être utilisé dans la suite du problème.

I Sur les parties denses et discrètes de $\mathbb{R}$

Rappelons et donnons quelques définitions utilisées dans la suite du problème.

— Une partie $A \subset \mathbb{R}$ non vide est *dense dans* $\mathbb{R}$
si $\forall (x,\ y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x < y$, il existe au moins un élément $a \in A$ tel que $a \in]x,\ y[$.

— Une partie $A \subset \mathbb{R}$ qui n'est pas dense dans $\mathbb{R}$ est dite *non dense dans* $\mathbb{R}$.

— Une partie $A \subset \mathbb{R}$ non vide est *discrète (dans* $\mathbb{R}$*)*
si $\forall a \in A$, il existe un réel $\eta > 0$ tel que $]a-\eta,\ a+\eta[\cap A = \{a\}$

I.1. Montrer que $A \subset \mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si

$$\forall (x,\ \varepsilon) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*,\ \exists a \in A\ :\ |x-a| < \varepsilon.$$

- Soit A une partie dense dans $\mathbb{R}$ fixée quelconque.
Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ fixé quelconque. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé quelconque.
Appliquons la définition de A est dense dans $\mathbb{R}$ en remplaçant x par $x-\varepsilon$ et y par $x+\varepsilon$, ce qui est autorisé car $x-\varepsilon < x+\varepsilon$:

$$\exists a \in A\ :\ a \in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[.$$

Ainsi, la définition implique la caractérisation proposée.
- Soit A une partie de $\mathbb{R}$ non vide fixée quelconque telle que $\forall (x,\ \varepsilon) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*,\ \exists a \in A\ :\ |x-a| < \varepsilon$.
Soient $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ fixés quelconques tels que $u < v$. Appliquons la propriété supposée en remplaçant x par $\dfrac{u+v}{2}$ et ε par $\dfrac{v-u}{2}$ ce qui est possible car $\dfrac{u+v}{2} \in \mathbb{R}$ et $\dfrac{v-u}{2} > 0$. Alors,

$$\exists a \in A\ :\ \left|a - \frac{u+v}{2}\right| < \frac{v-u}{2}$$

soit $\dfrac{u+v}{2} - \dfrac{v-u}{2} < a < \dfrac{u+v}{2} + \dfrac{v-u}{2}$ d'où $u < a < v$.
Ainsi la partie A est dense dans $\mathbb{R}$. /2

$$\boxed{\text{Ainsi, toute partie } A \subset \mathbb{R} \text{ est dense dans } \mathbb{R} \text{ si et seulement si } \forall (x,\ \varepsilon) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*,\ \exists a \in A\ :\ |x-a| < \varepsilon.}$$

I.2. Démontrer que $\mathcal{D} = \left\{ \dfrac{k}{3^p} \;\middle|\; (k,\ p) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \right\}$ est une partie dense de $\mathbb{R}$. Est-elle incluse dans $\mathbb{Q}$ ou égale à $\mathbb{Q}$ (réponse à démontrer) ?

Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé quelconque.

Méthode 1 : Prouvons la caractérisation séquentielle de la densité en exhibant une suite d'éléments de $\mathcal{D}$ qui converge vers x.

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $k_n = \lfloor 3^n x \rfloor$. La suite $\left(\dfrac{k_n}{3^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est parfaitement définie dans $\mathcal{D}^{\mathbb{N}}$ et vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ k_n \leqslant 3^n x < k_n + 1 \Rightarrow \frac{k_n}{3^n} \leqslant x < \frac{k_n+1}{3^n} \Rightarrow 0 \leqslant x - \frac{k_n}{3^n} < \frac{1}{3^n}\ .$$

La suite constante identiquement nulle converge vers 0 et la suite $\left(\dfrac{1}{3^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 donc, d'après le théorème d'existence de limite par encadrement, d'une part la suite $\left(x - \dfrac{k_n}{3^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et d'autre part sa limite est nulle.

Par conséquent, la suite $\left(\dfrac{k_n}{3^n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{D}^{\mathbb{N}}$ converge vers x.

<u>Méthode 2 :</u> Prouvons la densité avec la définition.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ avec $x < y$. Soit $y' \in]x, y[$

On a $y' - x > 0$, et $\lim(\dfrac{1}{3^p}) = 0$, donc il existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que $y' - x > \dfrac{1}{3^{p_0}} > 0$.

Soit $k = \lfloor 3^{p_0} y' \rfloor$, alors $k \in \mathbb{Z}$ et $k \leqslant 3^{p_0} y' < k + 1$. Donc d'une part : $\dfrac{k}{3^{p_0}} \leqslant y' < y$;

et d'autre part : $y' < \dfrac{k}{3^{p_0}} + \dfrac{1}{3^{p_0}} < \dfrac{k}{3^{p_0}} + (y' - x)$. Donc $0 < \dfrac{k}{3^{p_0}} - x$ c'est-à-dire $x < \dfrac{k}{3^{p_0}}$.

Ainsi on a trouvé un élément de $\mathcal{D}$ inclus dans $]x, y[$. /2

$$\boxed{\mathcal{D} = \left\{ \frac{k}{3^p} \;\middle|\; (k,\ p) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \right\} \text{ est une partie dense de } \mathbb{R}.}$$

$\mathcal{D}$ est trivialement incluse dans $\mathbb{Q}$. Montrons que l'inclusion réciproque est fausse en prouvant que $\dfrac{1}{2} \notin \mathcal{D}$. En effet, si $\dfrac{1}{2} \in \mathcal{D}$, $\exists (k,\ p) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}\ :\ \dfrac{k}{3^p} = \dfrac{1}{2}$ d'où $2k = 3^p$. On en déduit que, 2 divise 3^p ce qui est toujours faux. /1

$$\boxed{\text{Par conséquent, } \mathcal{D} \subsetneq \mathbb{Q}.}$$

I.3. Donner les deux caractérisations des parties non denses qui se déduisent, par négation, des assertions équivalentes de la question I.1. Donner (avec justification) un exemple de partie de cardinal infini non dense de $\mathbb{R}$.

Par négation des caractérisations de la question I.1, une partie A de $\mathbb{R}$ est non dense si et seulement si

$$\exists (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2\ :\ x_0 < y_0 \ \text{ et } A \cap]x_0, y_0[= \emptyset$$

ce qui est équivalent à

$$\exists (x_0, \varepsilon_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*\ :\ A \cap]x_0 - \varepsilon_0, x_0 + \varepsilon_0[= \emptyset$$

ce qui est équivalent à

$$\exists (x_0, \varepsilon_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*\ :\ \forall a \in A,\ a \leqslant x_0 - \varepsilon_0 \ \text{ ou } \ a \geqslant x_0 + \varepsilon_0\ .$$

$\mathbb{Z}$ est une partie de cardinal infini non dense (l'assertion précédente est vérifiée pour $x_0 = \dfrac{1}{2}$ et $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{2}$).

De même, $\mathbb{Q} \cap \mathbb{R}_+$ n'est pas dense dans $\mathbb{R}$ (l'assertion précédente est vérifiée pour $x_0 = -2$ et $\varepsilon_0 = 1$. /1,5

I.4. Donner (avec justification) un exemple de partie discrète non bornée de $\mathbb{R}$.

Montrons que $\mathbb{Z}$ est une partie discrète non bornée de $\mathbb{R}$.

- Soit $A \in \mathbb{R}$ fixé quelconque. Alors $\lfloor A \rfloor + 1$ est un entier relatif tel que $\lfloor A \rfloor + 1 \geqslant A$.
  Par conséquent, $\mathbb{Z}$ est une partie non bornée de $\mathbb{R}$.
- Soit $n \in \mathbb{Z}$ fixé quelconque. Alors en posant $\eta = 1$, $]n-1, n+1[\cap \mathbb{Z} = \{n\}$. Par conséquent, $\mathbb{Z}$ est une partie discrète de $\mathbb{R}$. /1,5

$$\boxed{\text{Ainsi, } \mathbb{Z} \text{ est une partie discrète non bornée de } \mathbb{R}.}$$

I.5. Montrer que $\mathcal{E} = \left\{ \dfrac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}^* \right\}$ est discrète dans $\mathbb{R}$. La partie $\mathcal{E} \cup \{0\}$ est-elle également discrète dans $\mathbb{R}$?

- Soit $x \in \mathcal{E}$ fixé quelconque. Alors $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $x = \dfrac{1}{n_0}$. Montrons que pour $\eta = \dfrac{1}{n_0} - \dfrac{1}{n_0+1}$, on a $]x-\eta, x+\eta[\cap\mathcal{E} = \{x\}$.
En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
— si $n > n_0$, $\dfrac{1}{n_0} - \dfrac{1}{n} \geqslant \dfrac{1}{n_0} - \dfrac{1}{n_0+1}$ donc $\dfrac{1}{n} \leqslant x - \eta$ d'où $\dfrac{1}{n} \notin]x-\eta, x+\eta[$,
— si $n < n_0$, $\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n_0} = \dfrac{n_0 - n}{n_0 n} \geqslant \dfrac{1}{n_0 n} \geqslant \dfrac{1}{n_0(n_0+1)} = \dfrac{1}{n_0} - \dfrac{1}{n_0+1}$ donc $\dfrac{1}{n} \geqslant x + \eta$ d'où $\dfrac{1}{n} \notin]x-\eta, x+\eta[$,
— si $n = n_0$, $\dfrac{1}{n} = x$ et donc $x \in]x-\eta, x+\eta[$.
Par conséquent, $\mathcal{E}$ est discrète dans $\mathbb{R}$.
- Supposons que $\mathcal{E} \cup \{0\}$ est une partie discrète Alors, il existe $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $]-\eta+0, \eta+0[\cap\mathcal{E} = \{0\}$. Fixons $N = \left\lfloor \dfrac{1}{\eta} \right\rfloor + 1$ de sorte que $0 < \dfrac{1}{N} < \eta$. Alors $\dfrac{1}{N} \in]-\eta+0, \eta+0[\cap\mathcal{E} \setminus \{0\}$ ce qui contredit l'hypothèse. Par conséquent, $\mathcal{E} \cup \{0\}$ n'est pas une partie discrète. /2

$$\boxed{\text{La partie } \mathcal{E} = \left\{ \frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}^* \right\} \text{ est discrète dans } \mathbb{R} \text{ mais } \mathcal{E} \cup \{0\} \text{ ne l'est pas.}}$$

I.6. Une partie non vide de $\mathbb{R}$ peut-elle être simultanément dense et discrète ?

Supposons que A soit une partie non vide de $\mathbb{R}$ simultanément dense et discrète. Soit $a \in A$ fixé quelconque (possible car $A \neq \emptyset$). Puisque A est discrète, il existe $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$]a-\eta, a+\eta[\cap A = \{a\} .$$

Choisissons d'appliquer la définition de la densité de A dans $\mathbb{R}$ pour $x = a$ et $y = x + \eta$:

$$]a, a+\eta[\cap A \neq \emptyset$$

ce qui est en contradiction avec $]a-\eta, a+\eta[\cap A = \{a\}$. /1,5

$$\boxed{\text{Ainsi, une partie non vide de } \mathbb{R} \text{ ne peut pas être simultanément dense et discrète.}}$$

I.7. Donner (avec justification) un exemple de partie non bornée, ni dense ni discrète dans $\mathbb{R}$.

Considérons la partie $A = \mathcal{E} \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}$.
- A contient $\mathbb{Z}$ qui n'est pas bornée donc A n'est pas bornée.
- A contient $\mathcal{E} \cup \{0\}$ qui n'est pas discrète donc A n'est pas discrète.
- A n'est pas dense dans $\mathbb{R}$ car l'intervalle $\left]\dfrac{5}{4}, \dfrac{7}{4}\right[$ ne rencontre pas A. /1,5

$$\boxed{\text{Ainsi, } \mathcal{E} \cup \{0\} \cup \mathbb{Z} \text{ est une partie non bornée, ni dense ni discrète dans } \mathbb{R}.}$$

II Classification des sous-groupes de $(\mathbb{R}, +)$

Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ non réduit à $\{0\}$.

II.1. Soit $g \in G$. Montrer que l'ensemble $\{kg \mid k \in \mathbb{Z}\}$, qui sera désormais noté $g\mathbb{Z}$, est inclus dans G.

- Considérons la propriété $\mathcal{P}(n)$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$\mathcal{P}(n) \ : \ \text{« } ng \in G \text{ »}$$

  - ⋆ $0 \times g = 0$ or 0 est le neutre du groupe $(\mathbb{R}, +)$ donc il appartient au sous-groupe G donc $0 \times g \in G$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
  - ⋆ Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé quelconque tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie.
  Alors $(n+1)g = \underbrace{ng}_{\substack{\in G \\ \text{car } \mathcal{P}(n) \text{ est vraie}}} + \underbrace{g}_{\in G} \in G$ par stabilité d'un sous-groupe pour la loi induite par le groupe ambiant donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $ng \in G$.

- Soit $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ fixé quelconque.
  Alors $-n \in \mathbb{N}$ donc, d'après le premier point ci-dessus, $(-n) \times g = -ng \in G$. Or G est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ donc G contient les symétriques dans $(\mathbb{R}, +)$ de tous ses éléments et en particulier celui de $-ng$ qui est ng. Par conséquent, $ng \in G$.
  Par conséquent, $\forall n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$, $ng \in G$. /1,5

$$\boxed{\text{Ainsi, } \{kg \mid k \in \mathbb{Z}\} \subset G.}$$

II.2. Montrer que $G \cap \mathbb{R}_+^*$ admet une borne inférieure a positive ou nulle dans $\mathbb{R}$.

$G \cap \mathbb{R}_+^*$ est

- une partie de $\mathbb{R}$,
- non vide car $G \neq \{0\}$ donc il existe $g \in G$ tel que $g \neq 0$, si $g > 0$ alors $g \in G \cap \mathbb{R}_+^*$, si $g < 0$, alors $-g \in G$ (un sous-groupe contient les symétriques de tous ses éléments) et donc $-g \in G \cap \mathbb{R}_+^*$,
- minorée par 0 car incluse dans $\mathbb{R}_+^*$,

donc $G \cap \mathbb{R}_+^*$ admet une borne inférieure notée $a \in \mathbb{R}$.
De plus, 0 minore $G \cap \mathbb{R}_+^*$ donc $a \geqslant 0$. /1

$$\boxed{\text{Ainsi, } G \cap \mathbb{R}_+^* \text{ admet une borne inférieure } a \text{ positive ou nulle dans } \mathbb{R}.}$$

Selon la valeur de a ($a = 0$ ou $a > 0$), la nature du groupe G varie comme le montrent les questions 3. et 4. suivantes.

II.3. (a) Donner un sous-groupe additif G de $(\mathbb{R}, +)$ satisfaisant la condition $\inf G \cap \mathbb{R}_+^* > 0$.

- $(\mathbb{Z}, +)$ est un sous-groupe additif de $(\mathbb{R}, +)$,
- $\mathbb{Z} \cap \mathbb{R}_+^* = \mathbb{N}^*$ et $\inf \mathbb{N}^* = 1$ car 1 minore $\mathbb{N}^*$ et $1 \in \mathbb{N}^*$. /0,5

$$\boxed{\text{Ainsi, le groupe } (\mathbb{Z}, +) \text{ vérifie } a = 1.}$$

(b) Supposons $a > 0$ dans les questions suivantes.

i. Montrer que, si $a \notin G$, alors il existe $(g_1, g_2) \in G^2$ tels que $a < g_1 < g_2 < 2a$.

Supposons que $a \notin G$.
Appliquons la caractérisation de la borne inférieure pour $\varepsilon = a$ ce qui est possible car $a > 0$:

$$\exists g_2 \in G \cap \mathbb{R}_+^* \ : \ g_2 - a < a \leqslant g_2$$

d'où l'on obtient d'une part $g_2 < 2a$ et d'autre part $a < g_2$ puisque $a \leqslant g_2$ et $a \notin G$. Appliquons une seconde fois la caractérisation de la borne inférieure pour $\varepsilon = g_2 - a$ ce qui est possible car $g_2 - a > 0$:

$$\exists g_1 \in G \cap \mathbb{R}_+^* \ : \ g_1 - (g_2 - a) < a \leqslant g_1$$

d'où l'on obtient d'une part $g_1 < g_2$ et d'autre part $a < g_1$ puisque $a \leqslant g_1$ et $a \notin G$. /2

---

ii. En considérant $g_2 - g_1$, montrer que $G \cap \mathbb{R}_+^*$ admet a pour plus petit élément.

Puisque G est un groupe, $g_2 - g_1 \in G$. Or, d'après la question précédente $0 < g_2 - g_1 < 2a - g_1 < a$ donc $g_2 - g_1$ est un élément de $G \cap \mathbb{R}_+^*$ strictement inférieur à la borne inférieure de $G \cap \mathbb{R}_+^*$ ce qui est une contradiction.
Par conséquent l'hypothèse $a \notin G$ est fausse donc $a \in G$,
or $a > 0$ donc $a = \inf G \cap \mathbb{R}_+^* \in G \cap \mathbb{R}_+^*$,
or une partie qui admet une borne inférieure qui lui appartient admet cette borne inférieure comme plus petit élément,
donc $a = \min G \cap \mathbb{R}_+^*$. /2

$$\boxed{\text{Ainsi, } G \cap \mathbb{R}_+^* \text{ admet } a \text{ pour plus petit élément.}}$$

(c) Soit g un élément quelconque de G. Montrer qu'il existe un unique $n \in \mathbb{Z}$ tel que $0 \leqslant g - na < a$. En déduire que $g - na = 0$.

- Existence. Posons $n = \left\lfloor \dfrac{g}{a} \right\rfloor$. Alors,

$$n \leqslant \frac{g}{a} < n + 1$$

donc $na \leqslant g < na + a$ d'où $0 \leqslant g - na < a$.
- Unicité. Soient $(n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2$ tels que $0 \leqslant g - n_1 a < a$ et $0 \leqslant g - n_2 a < a$. Le second encadrement donne $-a < n_2 a - g \leqslant 0$ et en ajoutant le premier encadrement à ce dernier, on obtient $-a < (n_2 - n_1)a < a$ d'où en divisant par $a > 0$, $-1 < n_2 - n_1 < 1$ donc $n_1 = n_2$ car ce sont des entiers.

$$\boxed{\text{Ainsi, il existe un unique } n \in \mathbb{Z} \text{ tel que } 0 \leqslant g - na < a.}$$

Or, par stabilité de G pour la loi $+$, $(g - na) \in G$ donc $g - na$ est un élément de G strictement inférieur à $\min \mathbb{R}_+^* \cap G$ donc $(g - na) \notin \mathbb{R}_+^*$ or $g - na \geqslant 0$ donc $g = na$. /2

$$\boxed{\text{Ainsi, } g = na.}$$

(d) Conclure que $G = a\mathbb{Z}$. G est-il discret ?

Dans la question précédente, nous avons montré que $G \subset a\mathbb{Z}$,
or nous avons aussi prouvé, dans la question II.1 appliquée pour $g \leftarrow a$ que $a\mathbb{Z} \subset G$,

$$\boxed{\text{donc } G = a\mathbb{Z}.}$$

L'ensemble $a\mathbb{Z}$ est une partie discrète de $\mathbb{R}$ car, pour tout $x \in a\mathbb{Z}$, $]x - a, x + a[\cap a\mathbb{Z} = \{x\}$. /1

$$\boxed{\text{Ainsi, } G = a\mathbb{Z} \text{ est une partie discrète de } \mathbb{R}.}$$

II.4. (a) Donner un sous-groupe additif G de $(\mathbb{R}, +)$ satisfaisant la condition $\inf G \cap \mathbb{R}_+^* = 0$.

- $\mathbb{Q}$ est un sous-groupe additif de $(\mathbb{R}, +)$,
- 0 minore $\mathbb{Q} \cap \mathbb{R}_+^*$ et, la suite $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de $(\mathbb{Q} \cap \mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ qui converge vers 0 donc la caractérisation séquentielle de la borne inférieure donne $\inf \mathbb{Q} \cap \mathbb{R}_+^* = 0$. /1,5

$$\boxed{\text{Ainsi, } (\mathbb{Q}, +) \text{ est un sous-groupe de } (\mathbb{R}, +) \text{ et } \inf \mathbb{Q} \cap \mathbb{R}_+^* = 0.}$$

Dans la suite de cette question, supposons que $a = 0$. Soient $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$ fixés quelconques.

(b) Montrer qu'il existe $g \in G$ tel que $0 < g < \varepsilon$.

Appliquons la caractérisation de la borne inférieure en prenant pour ε la valeur que nous avons choisie fixée quelconque :

$$\exists g \in G \cap \mathbb{R}_+^* \;:\; g < a + \varepsilon = 0 + \varepsilon$$

d'où, d'une part $g < \varepsilon$, et d'autre part $g > 0$ car $g \in \mathbb{R}_+^*$. /1

$$\boxed{\text{Ainsi, il existe } g \in G \text{ tel que } 0 < g < \varepsilon.}$$

(c) En effectuant la division pseudo-euclidienne de x par g, établir l'existence de $n \in \mathbb{Z}$: $|ng - x| < \varepsilon$. Que vient-on de prouver concernant le sous-groupe G ?

Soit g est l'élément obtenu dans la question précédente.
Effectuons la division pseudo-euclidienne de x par g (autorisé car $g \neq 0$) :

$$\exists (n, r) \in \mathbb{Z} \times [0, |g|[\;:\; x = ng + r$$

Cela signifie que $|ng - x| = |r| < |g| = g < \varepsilon$. /2

$$\boxed{\text{Ainsi, il existe } n \in \mathbb{N} \text{ tel que } |ng - x| < \varepsilon.}$$

$$\boxed{\text{D'après la caractérisation établie dans la question I.1, } G \text{ est un sous-groupe de } (\mathbb{R}, +) \text{ dense dans } \mathbb{R}.}$$

II.5. Étude des sous-groupes de $(\mathbb{R},+)$ engendré par deux éléments.

Soient $(x,\ y) \in {\mathbb{R}_+^*}^2$. Posons $G_{x,y} = \{nx + my \mid (n,\ m) \in \mathbb{Z}^2\}$.

(a) Montrer que $G_{x,y}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R},\ +)$ non réduit à $\{0\}$.

- $G_{x,y}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$ ($0 = 0x + 0y \in G_{x,y}$),
- Soient $(g_1, g_2) \in G_{x,y}^2$. Alors il existe $(n_1, m_1, n_2, m_2) \in \mathbb{Z}^4$ tels que $g_1 = n_1x + m_1y$ et $g_2 = n_2x + m_2y$. $g_1 - g_2 = (n_1 - n_2)x + (m_1 - m_2)y$ avec $(n_1 - n_2, m_1 - m_2) \in \mathbb{Z}^2$ donc $g_1 - g_2 \in G_{x,y}$.

Par conséquent, $G_{x,y}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R},\ +)$.

De plus $x = 1x + 0y \in G_{x,y}$ et $x \neq 0$ donc $G_{x,y}$ n'est pas réduit à $\{0\}$. /1,5

$$\boxed{\text{Ainsi, } G_{x,y} \text{ est un sous-groupe de } (\mathbb{R},\ +) \text{ non réduit à } \{0\}.}$$

(b) Montrer que $G_{x,y}$ est discret si et seulement si $\dfrac{x}{y}$ est un nombre rationnel.

- Supposons que $G_{x,y}$ est discret.
  Alors, puisque $0 \in G$, il existe $\eta > 0$ tel que $G \cap]-\eta, \eta[= \{0\}$
  si bien que η minore $G \cap \mathbb{R}_+^*$,
  donc $a = \inf G \cap \mathbb{R}_+^* \geqslant \eta > 0$
  donc, d'après la question II.4, $G = a\mathbb{Z}$.
  Or $x = 1.x + 0.y \in G$ donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $ka = x$. De même, $y = 0.x + 1.y \in G$ donc il existe $k' \in \mathbb{Z}$ tel que $k'a = y$. Nous en déduisons que $\dfrac{x}{y} = \dfrac{k}{k'} \in \mathbb{Q}$. Remarquons que $k' \neq 0$ car $y \neq 0$. /1,5
- Supposons que $\dfrac{x}{y} \in \mathbb{Q}$. Alors, il existe $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{x}{y} = \dfrac{p}{q} \iff x = \dfrac{p}{q}y$.
  Ainsi, $G_{x,y} = \left\{ \left(\dfrac{np}{q} + m\right) y \;\middle|\; (n,m) \in \mathbb{Z}^2 \right\}$,
  donc $G_{x,y} = \left\{ \dfrac{np + mq}{q} y \;\middle|\; (n,m) \in \mathbb{Z}^2 \right\} \subset \dfrac{y}{q}\mathbb{Z}$ si bien que $\inf G_{x,y} \cap \mathbb{R}_+^* \geqslant \inf \dfrac{y}{q}\mathbb{Z} \cap \mathbb{R}_+^* = \dfrac{y}{q} > 0$.
  Par conséquent, d'après les résultats de la question II.3, $G_{x,y}$ est un sous-groupe discret. /1,5

$$\boxed{\text{Ainsi, } G_{x,y} \text{ est discret si et seulement si } \frac{x}{y} \text{ est un nombre rationnel.}}$$

(c) En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que le sous-groupe $G_{x,y}$ soit dense.

Nous avons vu en début de partie II qu'un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$ est soit discret, soit dense (ou exclusif) (le cas où $G = \{0\}$ rentre dans le cas où le sous-groupe est discret !). Or la négation de « $\dfrac{x}{y}$ est rationnel » est « $\dfrac{x}{y}$ est irrationnel ». /1

$$\boxed{\text{Ainsi, le sous-groupe } G_{x,y} \text{ est dense si et seulement si } \frac{x}{y} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.}$$

(d) En considérant le sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ noté $G_{1,2\pi}$, calculer $\sup\{\cos(n) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ et $\inf\{\cos(n) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ après en avoir justifié l'existence dans $\mathbb{R}$.

L'ensemble $\{\cos(n) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ est

- une partie de $\mathbb{R}$ par définition,
- non vide car $\cos 1$ en est un élément,
- majorée par 1 et minoré par -1 (car la fonction sinus est comprise entre -1 et 1)

donc il admet une borne supérieure inférieure ou égale à 1 et une borne inférieure supérieure ou égale à -1.

Le sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ noté $G_{1,2\pi}$ est dense dans $\mathbb{R}$ car $\dfrac{1}{2\pi} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

La caractérisation séquentielle de la densité permet d'affirmer l'existence d'une suite $u \in G_{1,2\pi}^{\mathbb{N}}$ qui converge vers 0.

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $(a_n, b_n) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $u_n = a_n + 2\pi b_n$ et nous avons donc $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n + 2\pi b_n = 0$.

Par conséquent, par continuité de la fonction cosinus en 0, la suite $(\cos(a_n + 2\pi b_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\cos(0) = 1$, or cette suite coïncide avec la suite $(\cos(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge donc vers 1.

Ainsi,

— $\exists(\cos a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \{\cos n \mid n\in\mathbb{Z}\}^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos(a_n) = 1$,

— 1 est un majorant de $\{\cos(n) \mid n\in\mathbb{Z}\}$,

donc la caractérisation séquentielle de la borne supérieure donne $\sup\{\cos(n) \mid n\in\mathbb{Z}\} = 1$.

On procède de la même manière pour trouver une suite d'entiers $(a'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $(\cos(a'_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers -1 à partir d'une suite de $G_{1,2\pi}^{\mathbb{N}}$ qui converge vers π. Cela permet de prouver que $\inf\{\cos(n) \mid n\in\mathbb{Z}\} = -1$. /3

$$\boxed{\text{Ainsi, } \sup\{\cos(n) \mid n\in\mathbb{Z}\} = 1 \text{ et } \inf\{\cos(n) \mid n\in\mathbb{Z}\} = -1.}$$

(e) Montrer plus généralement que l'ensemble $\{\cos(n) \mid n\in\mathbb{Z}\}$ est dense dans $[-1,1]$.

Soit $\alpha\in[-1,1]$ fixé quelconque.

La caractérisation séquentielle de la densité du sous-groupe $G_{1,2\pi}$ dans $\mathbb{R}$ donne l'existence d'une suite $u\in G_{1,2\pi}^{\mathbb{N}}$ qui converge vers $\mathrm{Arccos}(\alpha)$.

Or, pour tout $n\in\mathbb{N}$, il existe $(a_n,b_n)\in\mathbb{Z}^2$ tels que $u_n = a_n + 2\pi b_n$,

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n + 2\pi b_n = \mathrm{Arccos}\alpha$.

Par conséquent, par continuité de la fonction cosinus en $\mathrm{Arccos}\alpha$, la suite $(\cos(a_n+2\pi b_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\cos(\mathrm{Arccos}\alpha) = \alpha$,

or cette suite coïncide avec la suite $(\cos(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge donc vers α.

Ainsi,

— d'une part $\{\cos(n) \mid n\in\mathbb{Z}\} \subset [\inf\{\cos(n) \mid n\in\mathbb{Z}\}, \sup\{\cos(n) \mid n\in\mathbb{Z}\}]$, ce qui, d'après la question précédente, donne $\{\cos(n) \mid n\in\mathbb{Z}\} \subset [-1,1]$,

— d'autre part, pour tout $\alpha\in[-1,1]$, il existe $(\cos(a_n))_{n\in\mathbb{N}} \in \{\cos(n) \mid n\in\mathbb{Z}\}^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty}\cos(a_n) = \alpha$,

donc, d'après la caractérisation séquentielle de la densité d'une partie de $[-1,1]$ dans $[-1,1]$, $\{\cos(n) \mid n\in\mathbb{Z}\}$ est dense dans $[-1,1]$. /3

$$\boxed{\text{Ainsi, l'ensemble } \{\cos(n) \mid n\in\mathbb{Z}\} \text{ est dense dans } [-1,1].}$$

III Construction du logarithme népérien sur $\mathbb{Q}_+^*$

Considérons la suite définie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ par

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Considérons, pour tout $m\in\mathbb{N}^*$, la suite $e^{(m)}$ définie par $\forall n\in\mathbb{N},\ e_n^{(m)} = H_{mn} - H_n$.

III.1. Soient $(a,b)\in\mathbb{N}^{*2}$ fixés tels que $a\leqslant b$. Montrer, après avoir encadrer $\dfrac{1}{k}$ lorsque $k\in[\![a,b]\!]$, que

$$\frac{b-a}{b} \leqslant \sum_{k=a+1}^{b}\frac{1}{k} \leqslant \frac{b-a}{a+1}$$

Soit $k\in[\![a+1,b]\!]$ fixé. Alors,

$$a+1\leqslant k\leqslant b \quad \text{donc} \quad \frac{1}{b}\leqslant\frac{1}{k}\leqslant\frac{1}{a+1}$$

si bien qu'en sommant terme à terme ces $b-(a+1)+1$ encadrements pour $k\in[\![a+1,b]\!]$,

$$\underbrace{\sum_{k=a+1}^{b}\frac{1}{b}}_{=\frac{1}{b}\sum_{k=a+1}^{b}1 = \frac{b-(a+1)+1}{b}} \leqslant \sum_{k=a+1}^{b}\frac{1}{k} \leqslant \underbrace{\sum_{k=a+1}^{b}\frac{1}{a+1}}_{=\frac{1}{a+1}\sum_{k=a+1}^{b}1 = \frac{b-(a+1)+1}{a+1}}$$

/1,5

$$\boxed{\text{Ainsi, } \frac{b-a}{b} \leqslant \sum_{k=a+1}^{b} \frac{1}{k} \leqslant \frac{b-a}{a+1}}$$

III.2. Soit $m \in \mathbb{N}^*$ fixé.

(a) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \ , \ 0 \leqslant e_n^{(m)} \leqslant \frac{(m-1)n}{n+1}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$e_n^{(m)} = \sum_{k=1}^{mn} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{mn} \frac{1}{k}$$

Il s'agit donc d'une somme de termes positifs, donc $e_n^{(m)} \geqslant 0$.
Par ailleurs, en utilisant la majoration établie dans la question III.1 pour $a \leftarrow n$ et $b \leftarrow mn$,

$$e_n^{(m)} \leqslant \frac{nm-n}{n+1} = \frac{n(m-1)}{n+1}$$

/1,5

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \ , \ 0 \leqslant e_n^{(m)} \leqslant \frac{(m-1)n}{n+1}}$$

(b) Montrer que $(e_n^{(m)})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante. On pourra utiliser la minoration de la question III.1.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} e_{n+1}^{(m)} - e_n^{(m)} &= H_{(n+1)m} - H_{n+1} - H_{nm} + H_n \\ &= (H_{nm+m} - H_{nm}) - (H_{n+1} - H_n) \\ &= \sum_{k=nm+1}^{m(n+1)} \frac{1}{k} \quad - \quad \frac{1}{n+1} \\ &\geqslant \frac{m(n+1)-nm}{m(n+1)} - \frac{1}{n+1} \text{en utilisant la minoration de la question III.1 pour } a \leftarrow nm \text{ et } b \leftarrow m(n+1) \end{aligned}$$

Et donc, en calculant explicitement ce minorant,

$$e_{n+1}^{(m)} - e_n^{(m)} \geqslant \frac{m(n+1)-mn}{m(n+1)} - \frac{1}{n+1} = \frac{m}{m(n+1)} - \frac{1}{n+1} = 0$$

/1,5

$$\boxed{\text{Donc } (e_n^{(m)})_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est croissante.}}$$

(c) En déduire que la suite $(e_n^{(m)})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{(m-1)n}{n+1} \leqslant \dfrac{(m-1)(n+1)}{n+1}$ car $n \leqslant n+1$ et $\dfrac{m-1}{n+1} \geqslant 0$.
Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$e_n^{(m)} \leqslant \frac{(m-1)n}{n+1} \leqslant m-1$$

La suite $(e_n^{(m)})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante, majorée (indépendamment de n), donc elle converge. /1,5

$$\boxed{\text{La suite } (e_n^{(m)})_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est convergente.}}$$

Ce résultat permet de définir l'application $f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^* & \to & \mathbb{R} \\ m & \mapsto & \lim\limits_{n\to+\infty} e_n^{(m)} \end{array} \right.$ ce qui signifie que, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $f(m) = \lim\limits_{n\to+\infty} e_n^{(m)}$.

III.3. Soient $(m,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

(a) Justifier que les suites $(H_{pn}-H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(H_{mpn}-H_{pn})_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent et déterminer leurs limites respectives.

$(H_{pn}-H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est, en fait, la suite $(e_n^{(p)})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et on a vu qu'elle est convergente, de limite $f(p)$.
Et, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$H_{mpn}-H_{pn} = (H_{mpn}-H_n)-(H_{pn}-H_n) = e_n^{(mp)} - e_n^{(p)}$$

Donc $(H_{mpn}-H_{pn})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est la différence des deux suites convergentes $(e_n^{(mp)})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(e_n^{(p)})_{n\in\mathbb{N}^*}$, elle est donc convergente, avec pour limite, la différence des deux limites des deux suites en question. /2

$$\boxed{(H_{pn}-H_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \longrightarrow f(p) \quad \text{et} \quad (H_{mpn}-H_{pn})_{n\in\mathbb{N}^*} \longrightarrow f(mp)-f(p).}$$

(b) En déduire que $f(mp) = f(m)+f(p)$ (ce qui signifie que f est un morphisme de $(\mathbb{N}^*,\times)$ dans $(\mathbb{R},+)$).

Soit $\varphi : \begin{cases} \mathbb{N}^* & \to & \mathbb{N}^* \\ n & \mapsto & pn \end{cases}$

φ est une fonction strictement croissante de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$ (car $p\in\mathbb{N}^*$).
Donc pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergente, $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}^*} = (u_{pn})_{n\in\mathbb{N}^*}$ en est une suite extraite, donc elle converge vers la même limite que u.
Ainsi, $(H_{mpn}-H_{pn})_{n\in\mathbb{N}^*} = (H_{m\varphi(n)}-H_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite extraite de $(H_{mn}-H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui converge vers $f(m)$ donc $(H_{mpn}-H_{pn})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $f(m)$.

Par unicité de la limite de $(H_{mpn}-H_{pn})_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui vaut $f(m)$ d'après ce qui précède et $f(mp)-f(p)$ d'après la question précédente,

$$f(mp)-f(p) = f(m) \Rightarrow f(mp) = f(m)+f(p)$$

Ce résultat est vrai pour tout $(m,p)\in\mathbb{N}^{*2}$, /1,5

$$\boxed{\text{donc } f \text{ est un morphisme de } (\mathbb{N}^*,\times) \text{ dans } (\mathbb{R},+).}$$

III.4. Posons $\ell \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{Q}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ r & \mapsto & f(p)-f(q) \end{array} \right.$ où $r = \dfrac{p}{q}$ avec $(p,q)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$

(a) Pourquoi n'est-il pas immédiat de voir que ℓ est une application bien définie sur $\mathbb{Q}_+^*$? que faut-il faire pour prouver que ℓ est une application bien définie ?

Il n'y a pas unicité d'écriture d'un rationnel strictement positif sous la forme $\dfrac{p}{q}$ avec $(p,q)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$.

Par exemple, $\dfrac{3}{2}$ et $\dfrac{15}{10}$ représentent le même rationnel strictement positif, donc $\ell\left(\dfrac{3}{2}\right) = \ell\left(\dfrac{15}{10}\right)$, ce qui est équivalent, d'après l'énoncé à

$$f(3)-f(2) = f(15)-f(10)$$

mais cette égalité n'est pas évidente du tout a priori et l'on peut donc légitiment craindre que l'image d'un rationnelle dépende du représentant choisi pour la calculer, alors que pour définir une application, il faut que tout élément de l'ensemble de départ admette une unique image. /1

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Il faut donc s'assurer que l'expression définissant } \ell\left(\dfrac{p}{q}\right) \text{ est indépendante} \\ \text{du représentant } \dfrac{p}{q} \text{ choisi pour chaque rationnel.}\end{array}}$$

(b) Montrer que ℓ est une application bien définie ?

Soient $(p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ et $(p',q') \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ fixés tels que $\dfrac{p}{q} = \dfrac{p'}{q'} \in \mathbb{Q}_+^*$. On a donc $p \times q' = p' \times q$.
D'après la propriété de morphisme de $(\mathbb{N}^*, \times)$ dans $(\mathbb{R}, +)$,

$$f(p) + f(q') = f(p \times q') = f(p' \times q) = f(p') + f(q)$$

Donc $f(p) - f(q) = f(p') - f(q')$. /1,5

$$\boxed{\text{Ainsi, } \ell \text{ est bien définie.}}$$

(c) Montrer que ℓ est un morphisme de groupes de $(\mathbb{Q}_+^*, \times)$ dans $(\mathbb{R}, +)$.

Notons que cette fois-ci $(\mathbb{Q}_+^*, \times)$ et $(\mathbb{R}, +)$ sont bien des groupes.
Soient $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}_+^*$.
Fixons $(p_1, q_1) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ et $(p_2, q_2) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ de sorte que $r_1 = \dfrac{p_1}{q_1}$ et $r_2 = \dfrac{p_2}{q_2}$.

Alors, en utilisant que f est un morphisme de $(\mathbb{N}^*, \times)$ dans $(\mathbb{R}, +)$,

$$\ell(r_1 \times r_2) = \ell\left(\frac{p_1 p_2}{q_1 q_2}\right) = f(p_1 p_2) - f(q_1 q_2) = f(p_1) + f(p_2) - f(q_1) - f(q_2) = f(p_1) - f(q_1) + f(p_2) - f(q_2) = \ell(r_1) - \ell(r_2)$$

/1

$$\boxed{\ell \text{ est un morphisme de groupes de } (\mathbb{Q}_+^*, \times) \text{ dans } (\mathbb{R}, +).}$$

III.5. L'objectif de cette question est de prouver que ℓ est strictement croissante. Soient $(r_1, r_2) \in {\mathbb{Q}_+^*}^2$ fixés tels que $r_1 < r_2$.

(a) Soient $(m,p) \in {\mathbb{N}^*}^2$. Montrer que $f(m+p) - f(m) \geqslant \dfrac{p}{m+p}$.

Rappelons que

$$f(m+p) = \lim_{n \to +\infty} e_n^{(m+p)} = \lim_{n \to +\infty} (H_{(m+p)n} - H_n) \quad \text{et} \quad f(m) = \lim_{n \to +\infty} e_n^{(m)} = \lim_{n \to +\infty} (H_{mn} - H_n)$$

si bien que, par différence de suites convergentes,

$$f(m+p) - f(m) = \lim_{n \to +\infty} \Big(H_{(m+p)n} - H_n - (H_{mn} - H_n)\Big) = \lim_{n \to +\infty} \Big(H_{(m+p)n} - H_{mn}\Big) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=mn+1}^{(m+p)n} \frac{1}{k}$$

d'où l'idée de minorer $\displaystyle\sum_{k=mn+1}^{(m+p)n} \frac{1}{k}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.
La minoration établie dans la question III.1 appliquée pour $a \leftarrow mn$ et $b \leftarrow (m+p)n$ donne

$$\underbrace{\sum_{k=mn+1}^{(m+p)n} \frac{1}{k}}_{\xrightarrow[n \to +\infty]{} f(m+p) - f(m)} \geqslant \frac{(m+p)n - mn}{(m+p)n} = \underbrace{\frac{p}{m+p}}_{\xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{p}{m+p} \text{ (suite const.)}}$$

Les deux membres de l'inégalité ayant une limite lorsque $n \to +\infty$, en passant à la limte dans l'inégalité, on obtient /2

$$\boxed{f(m+p) - f(m) \geqslant \frac{p}{m+p}}$$

(b) Justifier l'existence de $(m,p) \in \mathbb{N}^{*2}$ tels que $r_2 = r_1\left(1+\dfrac{m}{p}\right)$.

Posons $r = \dfrac{r_2}{r_1} - 1$ (ce qui a un sens car $r_2 \neq 0$).
D'une part, $(r_1, r_2) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^*$ donc $r \in \mathbb{Q}$,
d'autre part $0 < r_1 < r_2$ donc $1 < \dfrac{r_2}{r_1}$ donc $r > 0$
si bien qu'il existe $(m,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$: $r = \dfrac{m}{p}$.
Fixons de telles valeurs de m et p.
On a donc

$$r_1\left(1+\frac{m}{p}\right) = r_1(1+r) = r_1\left(1+\frac{r_2}{r_1}-1\right) = r_2$$

/1

$$\boxed{\text{Ainsi, il existe } (m,p) \in \mathbb{N}^{*2} \text{ tels que } r_2 = r_1\left(1+\frac{m}{p}\right).}$$

(c) Montrer que $\ell(r_2) - \ell(r_1) = \ell\left(\dfrac{m+p}{p}\right)$ puis conclure.

La propriété de morphisme de ℓ donne

$$\ell(r_2)) = \ell\left(r_1\left(1+\frac{m}{p}\right)\right) = \ell(r_1) + \ell\left(1+\frac{m}{p}\right)$$

donc

$$\ell(r_2) - \ell(r_1) = \ell\left(1+\frac{m}{p}\right) = \ell\left(\frac{m+p}{p}\right) \underbrace{=}_{\text{déf de } \ell} \underbrace{f(m+p) - f(m) \geqslant \frac{p}{m+p}}_{\text{quest. III.5(a)}} > 0 \quad (\text{car } (m,p) \in \mathbb{N}^{*2})$$

/2

$$\boxed{\text{Ainsi, } \ell \text{ est strictemnt croissante sur } \mathbb{R}_+^*.}$$

III.6. (a) Montrer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, en encadrant $u \mapsto \dfrac{1}{u}$ sur $[k, k+1]$, que $\dfrac{1}{k+1} \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}u}{u} \leqslant \frac{1}{k}$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ fixé.
La fonction $u \mapsto \dfrac{1}{u}$ est décroissante sur $[k, k+1]$ donc

$$\forall u \in [k, k+1]\ ,\ \frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{u} \leqslant \frac{1}{k}$$

si bien qu'en intégrant ces inégalité entre k et $k+1$ (croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant)

$$\underbrace{\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}u}{k+1}}_{=\frac{1}{k+1}} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}u}{u} \leqslant \underbrace{\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}u}{k}}_{=\frac{1}{k}}$$

/2

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*\ ,\ \frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}u}{u} \leqslant \frac{1}{k}\ .}$$

(b) En déduire que

$$\forall m \in \mathbb{N}^*\ ,\ \forall n \in \mathbb{N}^*\ ,\ \int_{n+1}^{mn+1} \frac{\mathrm{d}u}{u} \leqslant \sum_{k=n+1}^{mn} \frac{1}{k} \leqslant \int_n^{mn} \frac{\mathrm{d}u}{u}\ .$$

Soient $(m,n) \in \mathbb{N}^{*2}$ fixés.

D'après la question précédente,

$$\forall k \in [\![n+1, mn-1]\!] \ , \ \frac{1}{k} \geqslant \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}u}{u}$$

donc en sommant ces $mn-(n+1)+1$ inégalités,

$$\sum_{k=n+1}^{mn} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=n+1}^{mn} \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}u}{u} = \int_{n+1}^{mn+1} \frac{\mathrm{d}u}{u}$$

D'après la question précédente,

$$\forall j \in [\![n, mn-1]\!] \ , \ \frac{1}{j+1} \leqslant \int_j^{j+1} \frac{\mathrm{d}u}{u}$$

donc en sommant ces $mn-1-n+1$ inégalités,

$$\underbrace{\sum_{j=n}^{mn-1} \frac{1}{j+1}}_{= \sum_{k=n+1}^{mn} \frac{1}{k} \text{ en posant } k=j+1} \leqslant \sum_{j=n}^{mn-1} \int_j^{j+1} \frac{\mathrm{d}u}{u} = \int_n^{mn} \frac{\mathrm{d}u}{u}$$

/2,5

$$\boxed{\forall m \in \mathbb{N}^* \ , \ \forall n \in \mathbb{N}^* \ , \ \int_{n+1}^{mn+1} \frac{\mathrm{d}u}{u} \leqslant \sum_{k=n+1}^{mn} \frac{1}{k} \leqslant \int_n^{mn} \frac{\mathrm{d}u}{u} \ .}$$

(c) Conclure que $\forall m \in \mathbb{N}^*$, $f(m) = \ln m$ puis que ℓ coïncide avec la fonction logarithme népérien sur $\mathbb{Q}_+^*$.

Soit $m \in \mathbb{N}^*$ fixé.

Reprenons l'encadrement de la question précédente en calculant les deux membres extrêmes et en reconnaissant la suite encadrée :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \ , \ \ln(mn+1) - \ln(n+1) \leqslant H_{mn} - H_n \leqslant \ln(mn) - \ln n = \ln m$$

soit /1,5

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \ , \quad \underbrace{\ln\left(\frac{mn}{n} \times \frac{1+\frac{1}{mn}}{1+\frac{1}{n}}\right)}_{\substack{\longrightarrow \ln m \\ n\to+\infty \\ \text{par continuité de } \ln \text{ en } m}} \leqslant \underbrace{e_n^{(m)}}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(m)} \leqslant \underbrace{\ln m}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln m}$$

Les 3 membres de l'encadrement admettent une limite finie lorsque $n \to +\infty$ donc on peut passer à la limite dans les deux inégalités pour obtenir

$$\ln m \leqslant f(m) \leqslant \ln m$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } \forall m \in \mathbb{N}^*, \ f(m) = m.}$$

Soit $r \in \mathbb{Q}_+^*$ fixé quelconque.

Fixons $(p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tels que $r = \dfrac{p}{q}$.

$$\ell(r) = \ell\left(\frac{p}{q}\right) = f(p) - f(q) = \ln p - \ln q = \ln \frac{p}{q} = \ln r$$

/1

$$\boxed{\text{Ainsi, } \forall r \in \mathbb{Q}_+^*, \ \ell(r) = \ln r.}$$

IV Construction du logarithme népérien sur $\mathbb{R}$

On considère une fonction ℓ définie sur $\mathbb{Q}_+^*$, croissante et coïncidant avec la fonction logarithme népérien sur $\mathbb{Q}_+^*$.

IV.1. (a) Soit $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \mathbb{Q}_+^*$.
Montrer que $\{\ell(r) \mid r \in \mathbb{Q}_+^* \ , \ r \leqslant x\}$ admet une borne supérieure.

- $\star$ $\{\ell(r) \mid r \in \mathbb{Q}_+^* \ , \ r \leqslant x\}$ est une partie de $\mathbb{R}$ par définition de ℓ.
- $\star$ Montrons qu'elle est non vide.
  Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, $x > 0$ donc $\mathbb{Q} \cap]0, x[\neq \emptyset$ donc il existe $r_x \in \mathbb{Q} \cap]0, x[$. Fixons un tel r_x.
  Alors $r_x > 0$, $r_x \in \mathbb{Q}$ et $r_x \leqslant x$ donc $\ell(r_x)$ appartient à la partie considérée.
- $\star$ Montrons qu'elle est majorée.
  Posons $m = \lfloor x \rfloor + 1$ de sorte que $m \geqslant x$ et $m \in \mathbb{Z}$. De plus $x > 0$ donc $m \in \mathbb{N}^*$ si bien que $\ell(m)$ est bien défini.
  Montrons que $\ell(m)$ est un majorant de $\{\ell(r) \mid r \in \mathbb{Q}_+^* \ , \ r \leqslant x\}$.
  Soit $y \in \{\ell(r) \mid r \in \mathbb{Q}_+^* \ , \ r \leqslant x\}$ fixé quelconque.
  Il existe $r \in \mathbb{Q}_+^*$: $r \leqslant x$ et $y = \ell(r)$.
  Or $x \leqslant m$ donc $r \leqslant m$ et, puisque $(r, m) \in {\mathbb{Q}_+^*}^2$, par croissance de ℓ,

$$\ell(r) \leqslant \ell(m) \quad \text{donc} \quad y \leqslant \ell(m) \ .$$

/2

$$\boxed{\text{Ainsi, } \{\ell(r) \mid r \in \mathbb{Q}_+^* \ , \ r \leqslant x\} \text{ admet une borne supérieure.}}$$

On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\overline{\ell}(x) = \begin{cases} \sup\{\ell(r) \mid r \in \mathbb{Q}_+^* \ , \ r \leqslant x\} & \text{si } x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \mathbb{Q}_+^*, \\ \ell(x) & \text{si } x \in \mathbb{Q}_+^*. \end{cases}$

(b) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\overline{\ell}(x) = \sup\{\ell(r) \mid r \in \mathbb{Q}_+^* \ , \ r \leqslant x\}$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ fixé quelconque.

— Si $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \mathbb{Q}_+^*$, le résultat est immédiat par définition de $\overline{\ell}(x)$.

— Sinon, $x \in \mathbb{Q}_+^*$. Par définition, $\overline{\ell}(x) = \ell(x)$.
  Montrons que $\ell(x) = \max\{\ell(r) \mid r \in \mathbb{Q}_+^* \ , \ r \leqslant x\}$.
  - $\star$ $x \in \mathbb{Q}_+^*$ et $x \leqslant x$ donc $\ell(x) \in \{\ell(r) \mid r \in \mathbb{Q}_+^* \ , \ r \leqslant x\}$.
  - $\star$ Soit $y \in \{\ell(r) \mid r \in \mathbb{Q}_+^* \ , \ r \leqslant x\}$ fixé quelconque.
    Il existe $r_y \in \mathbb{Q}_+^*$ tel que $r_y \leqslant x$, donc par croissance de ℓ, $y = \ell(r_y) \leqslant \ell(x)$.
    Par conséquent, $\ell(x)$ majore $\{\ell(r) \mid r \in \mathbb{Q}_+^* \ , \ r \leqslant x\}$.

  Ainsi, $\ell(x) = \max\{\ell(r) \mid r \in \mathbb{Q}_+^* \ , \ r \leqslant x\}$.
  De plus, lorsqu'une partie admet un plus grand élément, elle admet une borne supérieure et cette borne supérieure coïncide avec le plus grand élément donc $\overline{\ell}(x) = \sup\{\ell(r) \mid r \in \mathbb{Q}_+^* \ , \ r \leqslant x\}$. /1,5

$$\boxed{\text{Ainsi, } \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ \overline{\ell}(x) = \sup\{\ell(r) \mid r \in \mathbb{Q}_+^* \ , \ r \leqslant x\}.}$$

(c) En déduire que $\overline{\ell}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Est-elle strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$?

Soient $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^*$ fixés quelconques tels que $x_1 < x_2$.
Montrons que $\{\ell(r) \mid r \in \mathbb{Q}_+^* \ , \ r \leqslant x_1\} \subset \{\ell(r) \mid r \in \mathbb{Q}_+^* \ , \ r \leqslant x_2\}$.
Soit $y \in \{\ell(r) \mid r \in \mathbb{Q}_+^* \ , \ r \leqslant x_1\}$ fixé quelconque.
Il existe $r_y \in \mathbb{Q}_+^*$ tel que $r_y \leqslant x_1$ et $y = \ell(r_y)$.
Puisque $x_1 < x_2$, on a $r_y \leqslant x_2$, or $r_y \in \mathbb{Q}_+^*$ donc $y = \ell(r_y) \in \{\ell(r) \mid r \in \mathbb{Q}_+^* \ , \ r \leqslant x_2\}$.
L'inclusion ci-dessus prouve que tout majorant de $\{\ell(r) \mid r \in \mathbb{Q}_+^* \ , \ r \leqslant x_2\}$ est aussi un majorant de $\{\ell(r) \mid r \in \mathbb{Q}_+^* \ , \ r \leqslant x_1\}$,
or $\overline{\ell}(x_2)$ est un majorant de $\{\ell(r) \mid r \in \mathbb{Q}_+^* \ , \ r \leqslant x_2\}$ (la borne sup d'un ensemble est un majorant de l'ensemble),
donc $\overline{\ell}(x_2)$ majore $\{\ell(r) \mid r \in \mathbb{Q}_+^* \ , \ r \leqslant x_1\}$,
donc $\overline{\ell}(x_1) = \sup\{\ell(r) \mid r \in \mathbb{Q}_+^* \ , \ r \leqslant x_1\} \leqslant \overline{\ell}(x_2)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } \overline{\ell} \text{ est croissante sur } \mathbb{R}_+^*.}$$

Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, puisque $x_1 < x_2$, $\mathbb{Q} \cap]x_1, x_2[\neq \emptyset$ donc

$$\exists r_1 \in \mathbb{Q} \;:\; x_1 < r_1 < x_2$$

Fixons un tel r_1.
Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, puisque $r_1 < x_2$, $\mathbb{Q} \cap]r_1, x_2[\neq \emptyset$ donc

$$\exists r_2 \in \mathbb{Q} \;:\; r_1 < r_2 < x_2$$

Fixons un tel r_2.
On a $x_1 < r_1 < r_2 < x_2$ donc, par croissance de $\overline{\ell}$,

$$\overline{\ell}(x_1) \leqslant \underbrace{\overline{\ell}(r_1)}_{=\ell(r_1)} \leqslant \underbrace{\overline{\ell}(r_2)}_{=\ell(r_2)} \leqslant \overline{\ell}(x_2)$$

or ℓ est strictement croissante (question III.5) si bien que

$$\overline{\ell}(x_1) \leqslant \underbrace{\ell(r_1) < \ell(r_2)}_{\text{car } r_1 < r_2} \leqslant \overline{\ell}(x_2) \quad \text{d'où} \quad \overline{\ell}(x_1) < \overline{\ell}(x_2)$$

/2

$$\boxed{\text{De plus, } \overline{\ell} \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^*.}$$

IV.2. Conclure que $\overline{\ell} = \ln$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

On pourra considérer, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ fixé, la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $r_n = \dfrac{\lfloor 2^n x \rfloor}{2^n}$ et montrer qu'il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant n_0 \Rightarrow \overline{\ell}(r_n) \leqslant \overline{\ell}(x)$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ fixé quelconque.
— Si $x \in \mathbb{Q}_+^*$, le résultat a été prouvé dans la question III.6(c).
— Sinon, $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \mathbb{Q}_+^*$.
Par définition, $\overline{\ell}(x) = \sup\{\ell(r) \mid r \in \mathbb{Q}_+^* \;,\; r \leqslant x\}$.
⋆ Soit $y \in \{\ell(r) \mid r \in \mathbb{Q}_+^* \;,\; r \leqslant x\}$ fixé quelconque.
Il existe $r_y \in \mathbb{Q}_+^*$ tel que $r_y \leqslant x$, donc par croissance de la fonction logarithme, $\ln r_y \leqslant \ln x$, or $r_y \in \mathbb{Q}_+^*$ donc $\ln r_y = \ell(r_y)$ donc

$$y = \ell(r_y) \leqslant \ln x \;.$$

Par conséquent, $\ln x$ majore $\{\ell(r) \mid r \in \mathbb{Q}_+^* \;,\; r \leqslant x\}$ donc

$$\overline{\ell}(x) = \sup\{\ell(r) \mid r \in \mathbb{Q}_+^* \;,\; r \leqslant x\} \leqslant \ln x \;. \tag{1}$$

⋆ Considérons la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $r_n = \dfrac{\lfloor 2^n x \rfloor}{2^n}$.
⋆⋆ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la majoration usuelle ($\lfloor t \rfloor \leqslant t$) de la partie entière donne

$$r_n \leqslant \frac{2^n x}{2^n} = x$$

⋆⋆ $x > 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 2^n x = +\infty$ donc il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ à partir duquel $2^n x \geqslant 1$ si bien que

$$\forall n \in \mathbb{N} \;,\; n \geqslant n_0 \Rightarrow r_n = \frac{\lfloor 2^n x \rfloor}{2^n} \geqslant \frac{1}{2^n} > 0$$

Fixons un tel n_0.
Par conséquent, pour tout entier $n \geqslant n_0$, $r_n > 0$ donc r_n appartient au domaine de définition de $\overline{\ell}$ et $r_n \leqslant x$ si bien que, par croissance de $\overline{\ell}$,

$$\overline{\ell}(r_n) \leqslant \overline{\ell}(x)$$

/2

$$\boxed{\text{Ainsi, il existe un rang } n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N},\, n \geqslant n_0 \Rightarrow \overline{\ell}(r_n) \leqslant \overline{\ell}(x).}$$

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la définition de r_n comme quotient d'un entier par un entier non nul donne $r_n \in \mathbb{Q}$ donc, pour tout entier $n \geqslant n_0$, $r_n \in \mathbb{Q}_+^*$ si bien que $\overline{\ell}(r_n) = \ell(r_n)$, donc

$$\ell(r_n) \leqslant \overline{\ell}(x)$$

L'encadrement usuel de la partie entière ($t - 1 < \lfloor t \rfloor \leqslant t$) donne

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ \underbrace{x - \frac{1}{2^n}}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\ x} = \frac{2^n x - 1}{2^n} \leqslant r_n \leqslant \frac{2^n x}{2^n} = \underbrace{x}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\ x \text{ (suite const.)}}$$

Les deux membres extrêmes de l'encadrement convergent vers la même valeur qui est x donc le théorème d'existence de limite par encadrement permet d'affirmer que la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que sa limite et x.
Reprenons maintenant la minoration de $\overline{\ell}(x)$ établie pour $n \geqslant n_0$: pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant n_0$, puisque $r_n \in \mathbb{Q}_+^*$ on a $\ell(r_n) = \ln(r_n)$ (question III.6(c)) donc

$$\forall n \in [\![n_0, +\infty [\![\ ,\ \underbrace{\ln r_n}_{\substack{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\ \ln x \\ \text{(continuité de ln en } x)}} \leqslant \underbrace{\overline{\ell}(x)}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\ \overline{\ell}(x) \text{ (suite const.)}}$$

Les deux membres de l'inégalité convergent donc en passant à la limite dans l'inégalité,

$$\ln x \leqslant \overline{\ell}(x) \tag{2}$$

Les inégalités (1) et (2) permettent de conclure que $\ln x = \overline{\ell}(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \mathbb{Q}_+^*$. /2

$$\boxed{\text{Ainsi, } \overline{\ell} = \ln \text{ sur } \mathbb{R}_+^*.}$$