Devoir surveillé n°5

Sujet donné le mercredi 5 janvier 2022, 4h.

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

La notation tiendra particulièrement compte de **la qualité de la rédaction, la précision des raisonnements et l'énoncé des formules utilisées. Les réponses aux questions seront numérotées et séparées par un trait horizontal. Les résultats essentiels devront être encadrés ou soulignés.**

BON TRAVAIL

Étude d'une relation de récurrence d'ordre 2

L'objet de ce problème est l'étude des suites réelles u définies par $u_0 \geqslant 0$, $u_1 \geqslant 0$ et,

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ u_{n+2} = \frac{u_n + u_{n+1} + (u_n u_{n+1})^\beta}{3} \tag{$\mathcal{R}_\beta$}$$

où β est un paramètre réel positif ou nul.

On utilisera la convention $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^0 = 1$.

Dans la suite du problème, on note E_β l'ensemble des suites réelles u satisfaisant les conditions $u_0 \geqslant 0$, $u_1 \geqslant 0$ et la relation de récurrence $(\mathcal{R}_\beta)$.

Les différentes parties traitent de différentes valeurs de β.

I Cas $\beta = 0$

Dans cette partie, nous traitons le cas $\beta = 0$.

I.1. Déterminer les racines $r_1 < r_2$ du trinôme $3r^2 - r - 1 = 0$.

I.2. Exprimer, en fonction de r_1 et r_2, l'ensemble $\mathcal{S}_H$ des suites réelles x qui vérifient la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ x_{n+2} - \frac{1}{3}x_{n+1} - \frac{1}{3}x_n = 0$$

I.3. Déterminer une suite solution particulière de la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ x_{n+2} = \frac{x_n + x_{n+1} + 1}{3} \tag{$\mathcal{R}_0$}$$

I.4. En déduire l'expression explicite du terme u_n de la suite u vérifiant $(\mathcal{R}_0)$ en fonction de n, r_1, r_2, u_0 et u_1.

I.5. Conclure cette partie par la description explicite des éléments de l'ensemble E_0.

I.6. Calculer la valeur $\lfloor\sqrt{13}\rfloor$ et en déduire que $0 < -r_1 < r_2 < 1$. Que dire de la limite des suites de E_0 ?

II Généralités lorsque $\beta \in \mathbb{R}_+$

II.1. Soit $u \in E_\beta$. On sait donc que $u_0 \geqslant 0$ et $u_1 \geqslant 0$.

(a) On suppose de plus que $u_0 + u_1 > 0$ (et uniquement dans cette sous-question II.1(a)). Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$, $u_n > 0$.

(b) Supposons qu'il existe $n_0 \geqslant 2$ tel que $u_{n_0} = 0$. Que dire de u ?

II.2. Posons, pour tout $\beta \in \mathbb{R}_+$ et tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $F_\beta(x, y) = \dfrac{x + y + (xy)^\beta}{3}$.

Soient $(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2$ et $(x', y') \in (\mathbb{R}_+)^2$ tels que $x \leqslant x'$ et $y \leqslant y'$. Comparer $F_\beta(x, y)$ et $F_\beta(x', y')$ pour $\beta > 0$.

II.3. Posons, pour tout $\beta \in \mathbb{R}$ et tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f_\beta(x) = F_\beta(x, x)$. Montrer que,

(a) si $\beta \in \left]0, \dfrac{1}{2}\right[$,

$$\forall x \in]0, 1[\ , \quad f_\beta(x) > x \quad \text{et} \quad \forall x \in]1, +\infty[\ , \quad f_\beta(x) < x\ ,$$

(b) si $\beta \in \left]\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$,

$$\forall x \in]0, 1[\ , \quad f_\beta(x) < x \quad \text{et} \quad \forall x \in]1, +\infty[\ , \quad f_\beta(x) > x\ .$$

III Cas $\beta \in \left]0, \dfrac{1}{2}\right[$

Soit $u \in E_\beta$.

III.1. Montrer que, si u converge, alors sa limite ℓ vaut 0 ou 1.

III.2. Posons $A = \max(u_0, u_1, 1)$. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant A$.

III.3. Définissons la suite v pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \sup\{u_k \mid k \in [\![n, +\infty[\![\}$.

(a) Justifier que v est bien définie, montrer que v est décroissante puis qu'elle converge vers un nombre réel $\ell_v \geqslant 0$.

(b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+2} \leqslant f_\beta(v_n)$ puis en déduire que $\ell_v \leqslant 1$.

III.4. Dans cette question on suppose $u_0 + u_1 > 0$.

(a) Montrer qu'il existe un réel $a > 0$ tel que $\forall n \geqslant 2$, $u_n \geqslant a$.

(b) Définissons la suite w pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $w_n = \inf\{u_k \mid k \in [\![n, +\infty[\![\}$.

Montrer que w est bien définie, monotone puis qu'elle converge vers un nombre réel $\ell_w \geqslant a$.

(c) Montrer que $\ell_w = \ell_v = 1$.

III.5. En déduire la convergence de u et sa limite.

IV Cas $\beta = \dfrac{1}{2}$

Soit $u \in E_{\frac{1}{2}}$.

IV.1. Dans cette question, supposons qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} = u_{n_0+1}$.

(a) Montrer que la suite u est stationnaire et préciser la valeur b de stationnarité.

Posons $p_0 = \min\{k \in \mathbb{N} \mid \forall j \in [\![k, +\infty[\![\ ,\ u_j = b\}$.

(b) Justifier que $p_0 \in \mathbb{N}$ est bien défini.

(c) Soit g la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ par $g(x) = \dfrac{1}{3}(x + b + \sqrt{bx})$. En étudiant les variations de g, montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+\ ,\ g(x) = b \iff x = b$$

(d) Supposons que $p_0 \geqslant 1$. Calculer $g(u_{p_0-1})$. Que peut-on en déduire concernant u ?

IV.3. Supposons que $u_0 \leqslant u_1$ et posons $p = (u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $i = (u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ les sous-suites de u constituées des termes d'indices pairs et impairs.

(a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} - u_n = \dfrac{1}{3}(\sqrt{u_{n+1}} - \sqrt{u_n})(\sqrt{u_{n+1}} + 2\sqrt{u_n})$. En déduire que le signe au sens large de $u_{n+2} - u_n$ est le même que celui de $u_{n+1} - u_n$.

(b) Montrer que $u_0 \leqslant u_2 \leqslant u_3 \leqslant u_1$.

(c) Montrer, par récurrence sur n la propriété $\mathcal{Q}(\cdot)$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$\mathcal{Q}(n) : \text{« } p_n \leqslant p_{n+1} \leqslant i_{n+1} \leqslant i_n \text{ »}$$

(d) Montrer que les suites p et i sont convergentes et de limites positives ou nulles.

Posons $\ell_p = \lim\limits_{n\to+\infty} p_n$ et $\ell_i = \lim\limits_{n\to+\infty} i_n$.

(e) En écrivant la formule démontrée dans la question IV.3(a) pour $n \leftarrow 2n$ et en calculant les limites des deux membres, montrer que $\ell_i = \ell_p$. Que peut-on en déduire concernant la suite u ?

Dans la suite de cette partie, on admet que sous l'hypothèse $u_0 > u_1$ on démontre par des techniques analogues à celles de la question IV.3 que les suites i et p convergent encore vers la même limite.

IV.4. On admet que l'on dispose de deux fonctions `p(u_0, u_1, n)` et `i(u_0, u_1, n)` écrites en python qui renvoient respectivement les valeurs p_n et i_n. On veut en déduire une fonction `approximation(u_0, u_1, epsilon)` qui renvoie une valeur approchée `v` de la limite de la suite u à `epsilon` près (c'est-à-dire telle que |`v`$- \lim u| \leqslant$`epsilon`). Écrire une telle fonction en utilisant les propriétés des suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et une boucle « tant que ».

IV.5. Dans cette question, on suppose que $u_0 \neq u_1$.
Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\delta_n = |u_{n+1} - u_n|$.

(a) Après avoir justifié que la suite $\left(\dfrac{u_{n+2} - u_{n+1}}{u_{n+1} - u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie, montrer qu'elle tend vers $-\dfrac{1}{2}$ (on justifiera au passage que $\lim u > 0$) puis en déduire la convergence de $(\ln \delta_{n+1} - \ln \delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(b) Soit $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle qui converge vers le réel s.

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $m_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} s_k$.

Soit $\varepsilon > 0$ fixé.

i. Justifier l'existence de $N \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$n \geqslant N \Rightarrow |m_n - s| \leqslant \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{N}(s_k - s)\right| + \frac{\varepsilon}{2}$$

ii. En déduire la convergence de $(m_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers s.

(c) Utiliser la question précédente pour établir un équivalent de $\ln|u_{n+1} - u_n|$.

version MPSI 1 Utiliser la question précédente pour montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln|u_{n+1} - u_n|}{\ln \frac{1}{2^n}} = 1$ ce qui sera prochainement formalisé en disant que les suites $(\ln|u_{n+1} - u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\ln \dfrac{1}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont équivalentes.

V Étude de la limite de $u \in E_{\frac{1}{2}}$ en fonction des conditions initiales

Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}_+^2$ et tout $n \in \mathbb{N}$, notons $u_n(a, b)$ le terme d'indice n de la suite de l'ensemble $E_{\frac{1}{2}}$ définie par les conditions initiales $u_0 = a$ et $u_1 = b$.

Nous avons vu dans la partie IV que la suite $(u_n(a, b))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Posons $\ell(a, b) = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n(a, b)$. On note, en particulier, $\gamma = \ell\left(1, \dfrac{1}{3}\right)$.

V.1. (a) Calculer, pour tout $a \in \mathbb{R}_+$, $\ell(a, a)$ en fonction de a (on pourra déduire ce résultat de la partie IV).

(b) Justifier que, pour tout $b \in \mathbb{R}_+$, $\ell(0, b) = \ell\left(b, \dfrac{b}{\ldots}\right)$

(c) Soit $\lambda \geqslant 0$ un réel fixé.
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n(\lambda a, \lambda b) = \lambda u_n(a,b)$ puis en déduire $\ell(\lambda a, \lambda b) = \lambda \times \ell(a,b)$.

Posons, pour tout $b \in \mathbb{R}_+$, $L(b) = \ell(1,b)$.

V.2. (a) Exprimer pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+$, $\ell(a,b)$ comme le produit d'un nombre avec $L(x)$ où x est un réel positif ou nul bien choisi.

(b) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(a,b) \in {\mathbb{R}_+^*}^2$. Justifier que $u_n(a,b) > 0$ et montrer que

$$\ell(a,b) = \ell(u_n(a,b), u_{n+1}(a,b)) = u_n(a,b) \times \ell(1, \frac{u_{n+1}(a,b)}{u_n(a,b)})$$

En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $L(x) = u_n(1,x) \times L(\frac{u_{n+1}(1,x)}{u_n(1,x)})$.

(c) Montrer que pour tout $a, b \in \mathbb{R}_+$, $u_2(a,b) = u_2(b,a)$ puis en déduire que pour tout $x > 0$, $L(x) = xL(\frac{u_2(1,x)}{x}) = xL(\frac{u_2(x,1)}{x})$.

(d) Soient $0 \leqslant b \leqslant b'$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n(1,b) \leqslant u_n(1,b')$. Que peut-on en déduire concernant la fonction L ?

V.3. Posons, pour tout $b \in \mathbb{R}_+$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n(b) = 1 + \sum_{k=0}^{n} (u_{k+1}(1,b) - u_k(1,b))$. Soit $b \in \mathbb{R}_+$ fixé.

(a) Justifier que, $L(b) = \lim_{n \to +\infty} S_n(b)$.

(b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+2}(1,b) - u_{n+1}(1,b) = \frac{-1}{3}(u_{n+1}(1,b) - u_n(1,b)) \left[1 + \frac{\sqrt{u_{n+1}(1,b)}}{\sqrt{u_{n+1}(1,b)} + \sqrt{u_n(1,b)}}\right]$$

puis en déduire que $|u_{n+2}(1,b) - u_{n+1}(1,b)| \leqslant K|u_{n+1}(1,b) - u_n(1,b)|$ où K est une constante réelle indépendante de n et b vérifiant $K \in]0,1[$ que l'on précisera.

(c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_{n+1}(1,b) - u_n(1,b)| \leqslant K^n |b-1|$$

(d) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$|S_{n+p}(b) - S_n(b)| \leqslant \frac{K^{n+1}}{1-K}|b-1|$$

puis conclure que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|L(b) - S_n(b)| \leqslant \frac{K^{n+1}}{1-K}|b-1|$$

(e) Soit $x \in \mathbb{R}_+$ fixé.

i. Montrer que, pour tout $x' \in \mathbb{R}_+$,

$$|L(x) - L(x')| \leqslant \frac{K^{n+1}}{1-K}(|x-1| + |x'-1|) + |S_n(x) - S_n(x')|$$

ii. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b \mapsto u_n(1,b)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

iii. En déduire que L est continue en x.

V.4. On cherche à approcher les valeurs particulières de L.
On rappelle que $\gamma = \ell\left(1, \frac{1}{3}\right) = L\left(\frac{1}{3}\right)$.

(a) Montrer que $L(0) = \frac{1}{3}\gamma$.

(b) En utilisant la relation établie dans la question V.2(c), montrer que $L(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \gamma x$ ce qui équivaut à $\lim_{x \to +\infty} \frac{L(x)}{x} = \gamma$.

Version MPSI 1 En utilisant la relation établie dans la question V.2(c), montrer que $\lim_{x \to +\infty} \frac{L(x)}{x} = \gamma$ ce que nous formaliserons prochainement en $L(x) \sim \gamma x$.

Correction

$\boxed{\textbf{I Cas } \beta = 0}$

Dans cette partie, nous traitons le cas $\beta = 0$.

I.1. Déterminer les racines $r_1 < r_2$ du trinôme $3r^2 - r - 1 = 0$.

Le discriminant du trinôme est $(-1)^2 - 4 \times 3 \times (-1) = 13 > 0$ donc le trinôme admet deux racines réelles distinctes /1

$$\boxed{r_1 = \frac{1-\sqrt{13}}{6} < \frac{1+\sqrt{13}}{6} = r_2.}$$

I.2. Exprimer, en fonction de r_1 et r_2, l'ensemble $\mathcal{S}_H$ des suites réelles x qui vérifient la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ x_{n+2} - \frac{1}{3}x_{n+1} - \frac{1}{3}x_n = 0$$

Il s'agit d'une relation de récurrence linéaire d'ordre 2, homogène à coefficients constants.
L'ensemble des suites solutions de cette relation est un plan vectoriel.
L'équation caractéristique associée à cette relation de récurrence est $0 = r^2 - \frac{1}{3}r - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}(3r^2 - r - 1)$ dont les racines sont r_1 et r_2 d'après la question précédente. Cette équation caractéristique admet deux racines réelles distinctes donc /1,5

$$\boxed{\text{le plan vectoriel des solutions est } \mathcal{S}_H = \{(\lambda r_1^n + \mu r_2^n)_{n\in\mathbb{N}} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}.}$$

I.3. Déterminer une suite solution particulière de la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ x_{n+2} = \frac{x_n + x_{n+1} + 1}{3} \qquad (\mathcal{R}_0)$$

La question est équivalente à la recherche d'une solution particulière de la relation de récurrence linéaire d'ordre 2, à coefficients constants,

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ x_{n+2} - \frac{1}{3}x_{n+1} - \frac{1}{3}x_n = \frac{1}{3} \times 1^n$$

Le second membre est de la forme d'une suite polynomiale $(P(n))$ fois la suite géométrique (1^n) (avec pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n) = \frac{1}{3}$). La raison de la suite géométrique est 1, or 1 n'est pas racine de l'équation caractéristique associée à la relation de récurrence linéaire d'ordre 2 car $1^2 - \frac{1}{3} \times 1 - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \neq 0$ donc on cherche une solution particulière sous la forme $(Q(n) \times 1^n)$ avec Q une fonction polynôme de même degré que P c'est-à-dire de degré 0, donc Q est une constante.

$$\begin{aligned}
(c1^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une sol. partic. de } (\mathcal{R}_0) \quad &\iff \quad \forall n \in \mathbb{N}\ ,\ c1^{n+2} - \frac{1}{3}c1^{n+1} - \frac{1}{3}c1^n = \frac{1}{3} \\
&\iff \quad c - \frac{1}{3}c - \frac{1}{3}c = \frac{1}{3} \\
&\iff \quad \frac{1}{3}c = \frac{1}{3} \\
&\iff \quad c = 1
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, la suite constante de valeur 1 est une solution particulière de la relation de récurrence } (\mathcal{R}_0).}$$ /2

I.4. En déduire l'expression explicite du terme u_n de la suite u vérifiant $(\mathcal{R}_0)$ en fonction de n, r_1, r_2, u_0 et u_1.

L'ensemble des suites solutions de $(\mathcal{R}_0)$ est le plan affine passant par une solution particulière de $(\mathcal{R}_0)$ et dirigé par le plan vectoriel des solutions de l'équation homogène. /1,5

La suite u appatient à E_0 donc elle vérifie $(\mathcal{R}_0)$ si bien qu'il existe $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ tels que

$$\forall n\in\mathbb{N}\ ,\ u_n=\lambda r_1^n+\mu r_2^n+1$$

Déterminons les valeurs de λ et μ à l'aide des deux valeurs initiales de u :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl}\lambda & + & \mu & + & 1 & = & u_0\\ \lambda r_1 & + & \mu r_2 & + & 1 & = & u_1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcl}\lambda & + & \mu & = & u_0-1\\ \lambda r_1 & + & \mu r_2 & = & u_1-1\end{array}\right.$$

or le déterminant de ce système est $\begin{vmatrix}1 & 1\\ r_1 & r_2\end{vmatrix}=r_2-r_1\neq 0$

donc il admet un unique couple (λ,μ) solutions

$$\iff \lambda=\frac{\begin{vmatrix}u_0-1 & 1\\ u_1-1 & r_2\end{vmatrix}}{r_2-r_1}=\frac{r_2(u_0-1)-(u_1-1)}{r_2-r_1}$$
$$\text{et } \mu=\frac{\begin{vmatrix}1 & u_0-1\\ r_1 & u_1-1\end{vmatrix}}{r_2-r_1}=\frac{u_1-1-r_1(u_0-1)}{r_2-r_1}$$

/2,5

$$\boxed{\text{Ainsi, } \forall n\in\mathbb{N},\ u_n=\frac{r_2(u_0-1)-(u_1-1)}{r_2-r_1}r_1^n+\frac{u_1-1-r_1(u_0-1)}{r_2-r_1}r_2^n+1.}$$

I.5. Conclure cette partie par la description explicite des éléments de l'ensemble E_0.

Les éléments de E_0 sont les suites dont l'expression explicite a été déterminée dans la question précédente avec la condition $u_0\geqslant 0$ et $u_1\geqslant 0$. /1

$$\boxed{\text{Ainsi, } E_0=\left\{\left(\frac{r_2(a-1)-(b-1)}{r_2-r_1}r_1^n+\frac{b-1-r_1(a-1)}{r_2-r_1}r_2^n+1\right)_{n\in\mathbb{N}}\ \middle|\ (a,b)\in\mathbb{R}_+^2\right\}.}$$

I.6. Calculer $\lfloor\sqrt{13}\rfloor$ et en déduire que $0<-r_1<r_2<1$. Que dire de la limite des suites de E_0 ?

$9<13<16$ donc, par stricte croissance de $\sqrt{\cdot}$, $3<\sqrt{13}<4$ donc $\boxed{\lfloor\sqrt{13}\rfloor=3}$. /1

En utilisant l'encadrement $3<\sqrt{13}<4$,

- ⋆ $r_1=\dfrac{1-\sqrt{13}}{6}$ donc $\dfrac{1-4}{6}<r_1<\dfrac{1-3}{6}$ donc $-\dfrac{1}{2}<r_1<-\dfrac{1}{3}$ donc $\dfrac{1}{3}<-r_1<\dfrac{1}{2}$,
- ⋆ $r_2=\dfrac{1+\sqrt{13}}{6}$ donc $\dfrac{1+3}{6}<r_2<\dfrac{1+4}{6}$ donc $\dfrac{2}{3}<r_2<\dfrac{5}{6}$,

or $\dfrac{1}{2}<\dfrac{2}{3}$ donc $\dfrac{1}{3}<-r_1<\dfrac{1}{2}<\dfrac{2}{3}<r_2<\dfrac{5}{6}$

$\boxed{\text{d'où } 0<-r_1<r_2<1.}$ /1,5

Les réels $|r_1|=-r_1$ et $|r_2|=r_2$ appartiennent à $]0,1[$ donc $\ln|r_1|<0$ et $\ln|r_2|<0$ si bien que

$$r_1^n=(-1)^n|r_1|^n=\underbrace{(-1)^n}_{\text{bornée}}\underbrace{e^{n\ln|r_1|}}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0\quad,\quad r_2^n=|r_2|^n=\underbrace{e^{n\ln|r_2|}}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$$

/1,5

$\boxed{\text{Ainsi, toutes les suites de } E_0 \text{ convergent vers 1.}}$

II Généralités lorsque $\beta\in\mathbb{R}_+$

II.1. Soit $u\in E_\beta$. On sait donc que $u_0\geqslant 0$ et $u_1\geqslant 0$.

(a) On suppose de plus que $u_0+u_1>0$ (et uniquement dans cette sous-question II.1(a)). Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$ tel que $n\geqslant 2$, $u_n>0$.

Considérons la propriété $\mathcal{P}(\cdot)$ définie pour tout $n \in [\![2,+\infty[\![$ par

$$\mathcal{P}(n) : \text{« } u_n > 0 \text{ et } u_{n+1} > 0 \text{ ».}$$

$\star$ D'une part : $u_2 = \dfrac{u_0 + u_1 + \overbrace{(u_0u_1)^\beta}^{\geqslant 0 \text{ car } u_0 \geqslant 0 \text{ et } u_1 \geqslant 0}}{3} \geqslant \dfrac{u_0+u_1}{3} > 0$ car on a supposé $u_0 + u_1 > 0$.

D'autre part : $u_3 = \dfrac{u_2 + \overbrace{u_2 + (u_1u_2)^\beta}^{\geqslant 0}}{3} \geqslant \dfrac{u_2}{3} > 0$ car $u_2 > 0$.

Par conséquent, $\mathcal{P}(2)$ est vraie.

$\star$ Soit $n \in [\![2,+\infty[\![$ fixé quelconque tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

D'une part, la véracité de $\mathcal{P}(n)$ donne $u_{n+1} > 0$.

D'autre part : $u_{n+2} = \dfrac{u_n + \overbrace{u_{n+1} + (u_nu_{n+1})^\beta}^{\geqslant 0 \text{ car } \mathcal{P}(n) \text{ est vraie}}}{3} \geqslant \dfrac{u_n}{3} > 0$ (car $\mathcal{P}(n)$ est vraie donc $u_n > 0$).

Par conséquent, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. /2

$$\boxed{\text{Ainsi, } \forall n \in [\![2,+\infty[\![,\ u_n > 0.}$$

(b) Supposons qu'il existe $n_0 \geqslant 2$ tel que $u_{n_0} = 0$. Que dire de u ?

Puisque $n_0 \geqslant 2$, d'après la question précédente, si $u_0 + u_1 > 0$, alors $u_{n_0} > 0$ ce qui est une contradiction. Par conséquent, $u_0 + u_1 \leqslant 0$ or, par hypothèse dans le problème, $u_0 \geqslant 0$ et $u_1 \geqslant 0$ donc $u_0 + u_1 \geqslant 0$ si bien que $u_0 + u_1 = 0$ d'où $u_0 = u_1 = 0$ et une récurrence immédiate en considérant la propriété $\mathcal{Q}(\cdot)$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$\mathcal{Q}(n) : \text{« } u_n = 0 \text{ et } u_{n+1} = 0 \text{ ».}$$

permet de conclure à la nullité de tous les termes de la suite u. /2

$$\boxed{\text{Ainsi, s'il existe } n_0 \geqslant 2 \text{ tel que } u_{n_0} = 0, \text{ alors } u \text{ est la suite nulle.}}$$

II.2. Posons, pour tout $\beta \in \mathbb{R}_+$ et tout $(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $F_\beta(x,y) = \dfrac{x+y+(xy)^\beta}{3}$.

Soient $(x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2$ et $(x',y') \in (\mathbb{R}_+)^2$ tels que $x \leqslant x'$ et $y \leqslant y'$. Comparer $F_\beta(x,y)$ et $F_\beta(x',y')$ pour $\beta > 0$.

Soient $(x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2$ et $(x',y') \in (\mathbb{R}_+)^2$ tels que $x \leqslant x'$ et $y \leqslant y'$.

On a la suite d'inégalités :

$$xy \underbrace{\leqslant}_{x \leqslant x' \text{ et } y > 0} x'y \underbrace{\leqslant}_{y \leqslant y' \text{ et } x' > 0} x'y'$$

Puis, $t \mapsto t^\beta$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$, donc $(xy)^\beta \leqslant (x'y')^\beta$.

Enfin, par additions (croissantes) et division par 3 : /2

$$\boxed{F_\beta(x,y) = \frac{x+y+(xy)^\beta}{3} \leqslant \frac{x'+y'+(x'y')^\beta}{3} = F_\beta(x',y').}$$

II.3. Posons, pour tout $\beta \in \mathbb{R}$ et tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f_\beta(x) = F_\beta(x,x)$. Montrer que,

(a) si $\beta \in \left]0, \dfrac{1}{2}\right[$,

$$\forall x \in]0,1[\ , \quad f_\beta(x) > x \quad \text{et} \quad \forall x \in]1,+\infty[\ , \quad f_\beta(x) < x\ ,$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f_\beta(x) - x = \frac{x^{2\beta} - x}{3} = \underbrace{\frac{x^{2\beta}}{3}}(1 - x^{1-2\beta})$$

* Si $x \in]0,1[$, puisque $1-2\beta > 0$, $t \mapsto t^{1-2\beta}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, donc $x^{1-2\beta} < 1^{1-2\beta} = 1$ donc $f_\beta(x) - x > 0$.
* Si $x \in]1,+\infty[$, puisque $1-2\beta > 0$, $t \mapsto t^{1-2\beta}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, donc $x^{1-2\beta} > 1^{1-2\beta} = 1$ donc $f_\beta(x) - x < 0$. /1,5

$$\boxed{\text{Ainsi, si } \beta \in \left]0, \frac{1}{2}\right[, \ \forall x \in]0,1[, \ f_\beta(x) > x \text{ et } \forall x \in]1,+\infty[, \ f_\beta(x) < x.}$$

(b) si $\beta \in \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$,

$$\forall x \in]0,1[\ , \quad f_\beta(x) < x \quad \text{et} \quad \forall x \in]1,+\infty[\ , \quad f_\beta(x) > x \ .$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f_\beta(x) - x = \frac{x^{2\beta} - x}{3} = \underbrace{\frac{x^{2\beta}}{3}}_{>0}(1 - x^{1-2\beta})$$

* Si $x \in]0,1[$, puisque $1-2\beta < 0$, $t \mapsto t^{1-2\beta}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, donc $x^{1-2\beta} > 1^{1-2\beta} = 1$ donc $f_\beta(x) - x < 0$.
* Si $x \in]1,+\infty[$, puisque $1-2\beta < 0$, $t \mapsto t^{1-2\beta}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, donc $x^{1-2\beta} < 1^{1-2\beta} = 1$ donc $f_\beta(x) - x > 0$. /1,5

$$\boxed{\text{Ainsi, si } \beta \in \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[, \ \forall x \in]0,1[, \ f_\beta(x) < x \text{ et } \forall x \in]1,+\infty[, \ f_\beta(x) > x.}$$

III Cas $\beta \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$

Soit $u \in E_\beta$.

III.1. Montrer que, si u converge, alors sa limite ℓ vaut 0 ou 1.

Notons ℓ la limite de u.

Une récurrence immédiate (analogue à celle de la question II.1(a)) montre que

$$\forall n \in \mathbb{N} \ , \ u_n \geqslant 0.$$

En passant à la limite sur cette inégalité (ce qui est autorisé car les deux membres sont des suites convergentes), on obtient $\ell \geqslant 0$. /1

La convergence de $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers ℓ implique

* celle de ses sous-suites $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{n+2})_{n\in\mathbb{N}}$ vers la même limite ℓ,
* $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n u_{n+1})^\beta = \ell^{2\beta}$ car, avec la convention $0^\beta = 0$ pour $\beta > 0$, $t \mapsto t^\beta$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ donc en ℓ.

Par conséquent, /1

$$\forall n \in \mathbb{N} \ , \quad \underbrace{u_{n+2}}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell} = \underbrace{\frac{u_n + u_{n+1} + (u_n u_{n+1})^\beta}{3}}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\ell + \ell + (\ell^2)^\beta}{3}}$$

donc, par unicité de la limite,

$$3\ell = 2\ell + \ell^{2\beta} \ \Rightarrow \ \ell = \ell^{2\beta} \qquad \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \ell = 0 \\ \text{ou} \\ \ell = \ell^{2\beta} \quad \text{et } \ell > 0, \end{array}\right. \quad \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \ell = 0 \\ \text{ou} \\ \ln \ell = 2\beta \ln \ell \quad \text{et } \ell > 0, \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \ell = 0 \\ \text{ou} \\ \underbrace{(1-2\beta)}_{\neq 0 \ \text{ car } \beta \neq \frac{1}{2}} \ln \ell = 0 \quad \text{et } \ell > 0, \end{array}\right. \quad \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \ell = 0 \\ \text{ou} \\ \ln \ell = 0 \quad \text{et } \ell > 0, \end{array}\right. \quad \Rightarrow \ \ell \in \{0,1\}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, si } u \text{ converge, alors sa limite } \ell \text{ vaut 0 ou 1.}}$$ /1

III.2. Posons $A = \max(u_0, u_1, 1)$. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant A$.

Considérons la propriété $\mathcal{P}(\cdot)$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$\mathcal{P}(n) : « \ u_n \leqslant A \text{ et } u_{n+1} \leqslant A \ ».$$

- ⋆ Par définition de A, $u_0 \leqslant A$ et $u_1 \leqslant A$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- ⋆ Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé quelconque tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie.
  D'une part, la véracité de $\mathcal{P}(n)$ donne $u_{n+1} \leqslant A$.
  D'autre part : la véracité de $\mathcal{P}(n)$ donne $u_n \leqslant A$, $u_{n+1} \leqslant A$ et $u_n u_{n+1} \leqslant A^2$ (car $u_n \geqslant 0$ et $u_{n+1} \geqslant 0$) d'où

$$u_{n+2} = \frac{\overbrace{u_n + u_{n-1}}^{\leqslant 2A} + \overbrace{(u_n u_{n+1})^\beta}^{\leqslant A^{2\beta} \text{ car } t \mapsto t^\beta \text{ croiss. sur } \mathbb{R}_+}}{3} \leqslant \frac{2A + A^{2\beta}}{3} \underbrace{\leqslant}_{\substack{A \geqslant 1 \text{ et } 2\beta < 1 \\ \text{donc } 0 \leqslant A^{2\beta} \leqslant A}} \frac{2A + A}{3} = A\ .$$

  Par conséquent, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. /2

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant A.}$$

III.3. Définissons la suite v pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \sup\{u_k \mid k \in [\![n, +\infty[\![\}$.

(a) Justifier que v est bien définie, montrer que v est décroissante puis qu'elle converge vers un nombre réel $\ell_v \geqslant 0$.

- Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé.
  L'ensemble $\{u_k \mid k \in [\![n, +\infty[\![\}$ est
  — une partie de $\mathbb{R}$,
  — non vide (car elle contient u_n),
  — majorée par A d'après la question précédente car $\forall k \in [\![n, +\infty[\![$, $u_k \leqslant A$,
  donc il admet une borne supérieure. /1,5

$$\boxed{\text{Ainsi, la suite } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bien définie.}}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Par définition de la borne supérieure d'une partie, c'est un majorant de cette partie,
  donc v_n est un majorant de $\{u_k \mid k \in [\![n, +\infty[\![\}$
  or $\{u_k \mid k \in [\![n+1, +\infty[\![\} \subset \{u_k \mid k \in [\![n, +\infty[\![\}$,
  donc v_n est un majorant de $\{u_k \mid k \in [\![n+1, +\infty[\![\}$,
  or la borne supérieure de $\{u_k \mid k \in [\![n+1, +\infty[\![\}$ est le plus petit de ses majorants,
  donc $v_{n+1} = \sup\{u_k \mid k \in [\![n+1, +\infty[\![\} \leqslant v_n$. /1,5

$$\boxed{\text{Ainsi, la suite } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante.}}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé.
  $u_n \in \{u_k \mid k \in [\![n, +\infty[\![\}$ donc $u_n \leqslant \sup\{u_k \mid k \in [\![n, +\infty[\![\} = v_n$.
  De plus une récurrence immédiate (analogue à celle de la question II.1(a)) montre que

$$\forall j \in \mathbb{N}\ ,\ u_j \geqslant 0$$

  donc $u_n \geqslant 0$ donc $v_n \geqslant 0$. /1,5

$$\boxed{\text{Ainsi, la suite } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante et minorée (par 0, constante) donc convergente.}}$$

- Posons $\ell_v = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.
  En passant à la limite sur l'inégalité prouvée ci-dessus (autorisé car les deux membres ont une limite finie)

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ v_n \geqslant 0$$

  on obtient

$$\boxed{\ell_v \geqslant 0.}$$ /1

(b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+2} \leqslant f_\beta(v_n)$ puis en déduire que $\ell_v \leqslant 1$.

- Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé.
Soit $k \in [\![n, +\infty[\![$ fixé.
Par définition, de v_n, $k \geqslant n$ donc $u_k \leqslant v_n$, $u_{k+1} \leqslant v_n$ et $u_k u_{k+1} \leqslant v_n^2$ donc

$$u_{k+2} = \frac{\overbrace{u_k + u_{k+1}}^{\leqslant 2v_n} + \overbrace{(u_k u_{k+1})^\beta}^{\leqslant v_n^{2\beta} \text{ car } t \mapsto t^{2\beta} \text{ est croiss. sur } \mathbb{R}_+}}{3} \leqslant \frac{2v_n + v_n^{2\beta}}{3} = f_\beta(v_n)$$

Nous venons de prouver que $f_\beta(v_n)$ est un majorant de

$$\{u_{k+2} \mid k \in [\![n, +\infty[\![\} \underbrace{=}_{j=k+2} \{u_j \mid j \in [\![n+2, +\infty[\![\}$$

donc

$$v_{n+2} = \sup\{u_j \mid j \in [\![n+2, +\infty[\![\} \leqslant f_\beta(v_n)$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } \forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+2} \leqslant f_\beta(v_n).}$$ /2

- Les deux membres de l'inégalité prouvée dans le point précédent admettent une limite finie lorsque $n \to +\infty$:
  - ⋆ $\lim\limits_{n\to+\infty} v_{n+2} = \ell_v$ car $(v_{n+2})_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite de la suite v qui converge vers ℓ_v,
  - ⋆ $\lim\limits_{n\to+\infty} f_\beta(v_n) = f_\beta(\ell_v)$ par continuité de f_β sur $\mathbb{R}_+$ et donc en ℓ_v car $\ell_v \geqslant 0$ (question précédente).

En passant à la limite lorsque $n \to +\infty$ sur

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ v_{n+2} \leqslant f_\beta(v_n)$$

on obtient

$$\ell_v \leqslant f_\beta(\ell_v) \tag{1}$$

Par l'absurde, supposons que $\ell_v > 1$.
Alors l'inégalité établie dans la question II.3 donne, pour $x \leftarrow \ell_v$ (> 1) :

$$f_\beta(\ell_v) < \ell_v$$

ce qui contredit l'inégalité (1) prouvée ci-dessus. /2

$$\boxed{\text{Ainsi, } \ell_v \leqslant 1.}$$

III.4. Dans cette question on suppose $u_0 + u_1 > 0$.

(a) Montrer qu'il existe un réel $a > 0$ tel que $\forall n \geqslant 2$, $u_n \geqslant a$.

Posons $a = \min(1, u_2, u_3)$.

- L'hypothèse $u_0 + u_1 > 0$ permet d'affirmer (question II.1(a)) que $u_2 > 0$ et $u_3 > 0$ donc $a > 0$.
- Considérons la propriété $\mathcal{P}(\cdot)$ définie pour tout $n \in [\![2, +\infty[\![$ par

$$\mathcal{P}(n) : \text{« } u_n \geqslant a \text{ et } u_{n+1} \geqslant a \text{ ».}$$

  - ⋆ Par définition de a, $u_2 \geqslant a$ et $u_3 \geqslant a$ donc $\mathcal{P}(2)$ est vraie.
  - ⋆ Soit $n \in [\![2, +\infty[\![$ fixé quelconque tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie.
    D'une part, la véracité de $\mathcal{P}(n)$ donne $u_{n+1} \geqslant a$.
    D'autre part : la véracité de $\mathcal{P}(n)$ donne $u_n \geqslant a$, $u_{n+1} \geqslant a$ et $u_n u_{n+1} \geqslant a^2$ (car $a \geqslant 0$) d'où

$$u_{n+2} = \frac{\overbrace{u_n + u_{n-1}}^{\geqslant 2a} + \overbrace{(u_n u_{n+1})^\beta}^{\geqslant a^{2\beta} \text{ car } t \mapsto t^\beta \text{ croiss. sur } \mathbb{R}_+}}{3} \geqslant \frac{2a + a^{2\beta}}{3} \underbrace{\geqslant}_{\substack{a \in]0,1[\text{ et } 2\beta < 1 \\ \text{donc } a^{2\beta} \geqslant a}} \frac{2a + a}{3} = a\ .$$

    Par conséquent, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

/2

$$\boxed{\text{Ainsi, il existe un réel } a > 0 \text{ tel que } \forall n \geqslant 2,\ u_n \geqslant a.}$$

(b) Définissons la suite w pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $w_n = \inf\{u_k \mid k \in [\![n, +\infty[\![\}$.
Montrer que w est bien définie, monotone puis qu'elle converge vers un nombre réel $\ell_w \geqslant a$.

- Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé.
  L'ensemble $\{u_k \mid k \in [\![n, +\infty[\![\}$ est
  — une partie de $\mathbb{R}$,
  — non vide (car elle contient u_n),
  — minorée par a d'après la question précédente car $\forall k \in [\![n, +\infty[\![$, $u_k \geqslant a$,
  donc il admet une borne inférieure. /1

$$\boxed{\text{Ainsi, la suite } (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bien définie.}}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Par définition de la borne inférieure d'une partie, c'est un minorant de cette partie,
  donc w_n est un minorant de $\{u_k \mid k \in [\![n, +\infty[\![\}$
  or $\{u_k \mid k \in [\![n+1, +\infty[\![\} \subset \{u_k \mid k \in [\![n, +\infty[\![\}$,
  donc w_n est un minorant de $\{u_k \mid k \in [\![n+1, +\infty[\![\}$,
  or la borne inférieure de $\{u_k \mid k \in [\![n+1, +\infty[\![\}$ est le plus grand de ses minorants,
  donc $w_{n+1} = \inf\{u_k \mid k \in [\![n+1, +\infty[\![\} \geqslant w_n$. /1

$$\boxed{\text{Ainsi, la suite } (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante.}}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé.
  D'après la question III.2,

$$\forall k \in \mathbb{N}\ ,\ u_k \leqslant A$$

  donc $w_n = \inf\{u_k \mid k \in [\![n, +\infty[\![\} \leqslant u_n \leqslant A$. /1

$$\boxed{\text{Ainsi, la suite } (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante et majorée (par } A\text{) donc convergente.}}$$

- Posons $\ell_w = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n$.
  Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé.
  Nous avons déjà signalé que a minore $\{u_k \mid k \in [\![n, +\infty[\![\}$ donc il est inférieur au plus grand des minorants de cet ensemble qui est sa borne inférieure :

$$a \leqslant \inf\{u_k \mid k \in [\![n, +\infty[\![\} = w_n$$

  En passant à la limite sur l'inégalité (autorisé car les deux membres ont une limite finie)

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ a \leqslant w_n$$

  on obtient

$$\boxed{a \leqslant \ell_w.}$$ /1

(c) Montrer que $\ell_w = \ell_v = 1$.

⋆ D'une part,

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ w_n = \inf\{u_k \mid k \in [\![n, +\infty[\![\} \leqslant u_n \leqslant \sup\{u_k \mid k \in [\![n, +\infty[\![\} = v_n$$

donc

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ w_n \leqslant v_n$$

si bien qu'en passant à la limite sur cette inégalité (autorisé car les deux membres ont une limite finie), /1,5

$$\ell_w \leqslant \ell_v \tag{2}$$

⋆ D'autre part, soit $n \in \mathbb{N}$ fixé.
Soit $k \in [\![n, +\infty[\![$ fixé.
Par définition, de w_n, $k \geqslant n$ donc $u_k \geqslant w_n$, $u_{k+1} \geqslant w_n$ et $u_k u_{k+1} \geqslant w_n^2$ donc

$$\overbrace{u_k + u_{k+1}}^{\geqslant 2w_n} + \overbrace{(u_k u_{k+1})^{\beta}}^{\geqslant w_n^{2\beta} \text{ car } t \mapsto t^{2\beta} \text{ est croiss. sur } \mathbb{R}_+} \quad \geqslant \quad 2w_n + w_n^{2\beta}$$

Nous venons de prouver que $f_\beta(w_n)$ est un minorant de

$$\{u_{k+2} \mid k \in [\![n, +\infty[\![\} \underbrace{=}_{j=k+2} \{u_j \mid j \in [\![n+2, +\infty[\![\}$$

donc

$$w_{n+2} = \inf\{u_j \mid j \in [\![n+2, +\infty[\![\} \geqslant f_\beta(w_n)$$

$\boxed{\text{Ainsi, } \forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+2} \geqslant f_\beta(w_n).}$ /1

Les deux membres de l'inégalité ci-dessus admettent une limite finie lorsque $n \to +\infty$:

- ⋆ $\lim\limits_{n\to+\infty} w_{n+2} = \ell_w$ car $(w_{n+2})_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite de la suite w qui converge vers ℓ_w,
- ⋆ $\lim\limits_{n\to+\infty} f_\beta(w_n) = f_\beta(\ell_w)$ par continuité de f_β sur $\mathbb{R}_+$ et donc en ℓ_w car $\ell_w \geqslant a \geqslant 0$ (question précédente).

En passant à la limite lorsque $n \to +\infty$ sur

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ w_{n+2} \geqslant f_\beta(w_n)$$

on obtient

$$\ell_w \geqslant f_\beta(\ell_w) \tag{3}$$

Par l'absurde, supposons que $\ell_w < 1$.
Alors l'inégalité établie dans la question II.3 donne, pour $x \leftarrow \ell_v$ ($\in]0,1[$car $0 < a \leqslant \ell_w < 1$) : /1,5

$$f_\beta(\ell_w) > \ell_w$$

ce qui contredit l'inégalité (3) prouvée ci-dessus.
Par conséquent,

$$\ell_w \geqslant 1 \tag{4}$$

En combinant les inégalités (2), (4) et la majoration de ℓ_v prouvée dans la question III.3(b),

$$1 \leqslant \ell_w \leqslant \ell_v \leqslant 1$$

$\boxed{\text{donc, } \ell_w = \ell_v = 1.}$

III.5. En déduire la convergence de u et sa limite.

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé.
On a $u_n \in \{u_k \mid k \in [\![n, +\infty[\![\}$ donc

$$w_n = \inf\{u_k \mid k \in [\![n, +\infty[\![\} \leqslant u_n \leqslant \sup\{u_k \mid k \in [\![n, +\infty[\![\} = v_n$$

Par conséquent,

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ w_n \leqslant u_n \leqslant v_n$$

or les deux suites extrêmes convergent vers la même limite finie puisque $\ell_w = \ell_v = 1$ (questions III.3 et III.4), donc le théorème d'existence de limite par encadrement permet d'affirmer que /1,5

$\boxed{\text{la suite } u \text{ converge et sa limite est 1.}}$

IV Cas $\beta = \dfrac{1}{2}$

Soit $u \in E_{\frac{1}{2}}$.

IV.1. Dans cette question, supposons qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} = u_{n_0+1}$.

(a) Montrer que la suite u est stationnaire et préciser la valeur b de stationnarité.

Considérons la propriété $\mathcal{P}(\cdot)$ définie pour tout $n \in [\![n_0, +\infty[\![$ par

- ⋆ Par hypothèse dans cette question, $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie.
- ⋆ Soit $n \in [\![n_0, +\infty[\![$ fixé quelconque tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie.
  D'une part, la véracité de $\mathcal{P}(n)$ donne $u_{n+1} = u_{n_0}$.
  D'autre part : la véracité de $\mathcal{P}(n)$ donne $u_n = u_{n+1} = u_{n_0}$ d'où

$$u_{n+2} = \frac{u_n + u_{n+1} + \sqrt{u_n u_{n+1}}}{3} = \frac{2u_{n_0} + \sqrt{u_{n_0}^2}}{3} = \frac{2u_{n_0} + |u_{n_0}|}{3} \underbrace{=}_{\substack{u_{n_0} \geqslant 0 \\ \text{car la suite } u \text{ est } \geqslant 0}} u_{n_0}\ .$$

  Par conséquent, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. /1

$$\boxed{\text{Ainsi, la suite } u \text{ est stationnaire à la valeur } u_{n_0}.}$$

Posons $p_0 = \min\{k \in \mathbb{N} \mid \forall j \in [\![k, +\infty[\![\ ,\ u_j = b\}$.

(b) Justifier que $p_0 \in \mathbb{N}$ est bien défini.

L'ensemble $\{k \in \mathbb{N} \mid \forall j \in [\![k, +\infty[\![\ ,\ u_j = b\}$ est une partie de $\mathbb{N}$ non vide (car elle contient n_0 d'après la question précédente) donc elle admet un plus petit élément. /0,5

$$\boxed{\text{Ainsi, } p_0 \in \mathbb{N} \text{ est bien défini.}}$$

(c) Soit g la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ par $g(x) = \dfrac{1}{3}(x + b + \sqrt{bx})$. En étudiant les variations de g, montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+\ ,\ g(x) = b \iff x = b$$

La fonction g est définie sur $\mathbb{R}_+$, continue sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivée

$$\forall x \in]0, +\infty[\ ,\ g'(x) = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{\sqrt{b}}{2\sqrt{x}}\right) > 0$$

donc la fonction g est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

- ⋆ La stricte monotonie de g permet d'affirmer que l'équation $g(x) = b$ admet au plus une solution.
- ⋆ Par calcul, $g(b) = \dfrac{1}{3}(b + b + \sqrt{b^2}) = \dfrac{2b + |b|}{3} = b$ (car $b = u_{n_0} \geqslant 0$) donc l'équation $g(x) = b$ admet au moins une solution qui est $x = b$. /1

$$\boxed{\text{Ainsi, } \forall x \in \mathbb{R}_+\ ,\ g(x) = b \iff x = b.}$$

(d) Supposons que $p_0 \geqslant 1$. Calculer $g(u_{p_0-1})$. Que peut-on en déduire concernant u ?

Par définition de p_0, $u_{p_0} = b$ donc

$$g(u_{p_0-1}) = \frac{u_{p_0-1} + b + \sqrt{bu_{p_0-1}}}{3} = \underbrace{\frac{u_{p_0-1} + u_{p_0} + \sqrt{u_{p_0} u_{p_0-1}}}{3} = u_{(p_0-1)+2}}_{\text{déf. de la suite } u \text{ par récurrence}} = \underbrace{u_{p_0+1} = b}_{\text{déf. de } p_0}$$

ce qui permet d'utiliser l'équivalence établie dans la question précédente pour affirmer que $u_{p_0-1} = b$,
or $\forall j \in [\![p_0, +\infty[\![$, $u_j = b$ (par def de p_0),
donc $\forall j \in [\![p_0 - 1, +\infty[\![$, $u_j = b$,
d'où $p_0 - 1 \in \{k \in \mathbb{N} \mid \forall j \in [\![k, +\infty[\![\ ,\ u_j = b\}$,
donc $p_0 - 1 \geqslant \min\{k \in \mathbb{N} \mid \forall j \in [\![k, +\infty[\![\ ,\ u_j = b\} = p_0$,
ce qui implique $-1 \geqslant 0$ d'où une contradiction. /1

$$\boxed{\text{Ainsi, } p_0 < 1 \text{ donc } p_0 = 0 \text{ donc } u \text{ est la suite constante de valeur } u_{n_0}.}$$

IV.2. Montrer que, pour tout $c \in \mathbb{R}_+$, il existe une unique suite $u \in E_{\frac{1}{2}}$ stationnaire à la valeur c.

Soit $c \in \mathbb{R}_+$ fixé.

⋆ **Analyse.**
Soit $u \in E_{\frac{1}{2}}$ une suite stationnaire à la valeur c fixée.
Alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} = c = u_{n_0+1}$ ce qui permet d'appliquer le résultat de la question IV.1 afin de conclure que u est la suite constante de valeur c.
Par conséquent, il existe au plus une suite de $E_{\frac{1}{2}}$ stationnaire à la valeur c.

⋆ **Synthèse.**
Une récurrence immédiate permet de montrer que la suite de $E_{\frac{1}{2}}$ définie par les conditions initiales $u_0 = c$ et $u_1 = c$ est la suite constante de valeur c,
donc la suite constante de valeur c est une suite de $E_{\frac{1}{2}}$ stationnaire à la valeur c.
Par conséquent, il existe au moins une suite de $E_{\frac{1}{2}}$ stationnaire à la valeur c. /2

$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } c \in \mathbb{R}_+, \text{ il existe une unique suite } u \in E_{\frac{1}{2}} \text{ stationnaire à la valeur } c \text{ (c'est la suite constante de valeur } c).}$

IV.3. Supposons que $u_0 \leqslant u_1$ et posons $p = (u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $i = (u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ les sous-suites de u constituées des termes d'indices pairs et impairs.

(a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} - u_n = \dfrac{1}{3}(\sqrt{u_{n+1}} - \sqrt{u_n})(\sqrt{u_{n+1}} + 2\sqrt{u_n})$. En déduire que le signe au sens large de $u_{n+2} - u_n$ est le même que celui de $u_{n+1} - u_n$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé.

$$\begin{aligned}
u_{n+2} - u_n &= \frac{1}{3}\left(u_{n+1} + u_n + \sqrt{u_n u_{n+1}} - 3u_n\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(u_{n+1} - u_n + \sqrt{u_n u_{n+1}} - u_n\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(\sqrt{u_{n+1}}^2 - \sqrt{u_n}^2 + \sqrt{u_n}(\sqrt{u_{n+1}} - \sqrt{u_n})\right) \quad \text{car } u_n \geqslant 0 \text{ et } u_{n+1} \geqslant 0 \\
&= \frac{1}{3}\left((\sqrt{u_{n+1}} - \sqrt{u_n})(\sqrt{u_{n+1}} + \sqrt{u_n}) + \sqrt{u_n}(\sqrt{u_{n+1}} - \sqrt{u_n})\right) \\
&= \frac{1}{3}(\sqrt{u_{n+1}} - \sqrt{u_n})(\sqrt{u_{n+1}} + 2\sqrt{u_n})
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} - u_n = \frac{1}{3}(\sqrt{u_{n+1}} - \sqrt{u_n})(\sqrt{u_{n+1}} + 2\sqrt{u_n}).} \qquad /1$$

La fonction $\sqrt{\cdot}$ étant croissante, le signe (au sens large) de $\sqrt{u_{n+1}} - \sqrt{u_n}$ est le même que celui de $u_{n+1} - u_n$,
or $\sqrt{u_{n+1}} + 2\sqrt{u_n} \geqslant 0$,
donc le signe de $(\sqrt{u_{n+1}} - \sqrt{u_n})(\sqrt{u_{n+1}} + 2\sqrt{u_n})$ est celui de $u_{n+1} - u_n$, /1

$\boxed{\text{donc le signe de } u_{n+2} - u_n \text{ au sens large est le même que celui de } u_{n+1} - u_n.}$

(b) Montrer que $u_0 \leqslant u_2 \leqslant u_3 \leqslant u_1$.

⋆ Sachant que $0 \leqslant u_0 \leqslant u_1$,

$$u_2 = \frac{u_0 + u_1 + \sqrt{u_0 u_1}}{3} \leqslant \frac{u_1 + u_1 + \sqrt{u_1 u_1}}{3} = \frac{u_1 + u_1 + |u_1|}{3} = u_1 \quad (u_1 \geqslant 0)$$

donc $\boxed{u_2 \leqslant u_1}$.
De plus, d'après la question précédente, le signe de $u_2 - u_0$ est celui de $u_1 - u_0$ or par hypothèse, $u_1 - u_0 \geqslant 0$ donc $\boxed{u_0 \leqslant u_2}$.

⋆ Sachant que $u_2 \leqslant u_1$,

$$u_3 = \frac{u_1 + u_2 + \sqrt{u_1 u_2}}{3} \geqslant \frac{u_2 + u_2 + \sqrt{u_2 u_2}}{3} = \frac{u_2 + u_2 + |u_2|}{3} = u_2 \quad (u_2 \geqslant 0)$$

donc $\boxed{u_2 \leqslant u_3}$.
De plus, d'après la question précédente, le signe de $u_3 - u_1$ est celui de $u_2 - u_1$ or d'après le premier point ci-dessus, $u_2 - u_1 \leqslant 0$ donc $\boxed{u_3 \leqslant u_1}$. /2

$\boxed{\text{Ainsi, } u_0 \leqslant u_2 \leqslant u_3 \leqslant u_1.}$

(c) Montrer, par récurrence sur n la propriété $\mathcal{Q}(\cdot)$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$\mathcal{Q}(n) : « \ p_n \leqslant p_{n+1} \leqslant i_{n+1} \leqslant i_n \ »$$

- Par définition, $p_0 = u_0$, $p_1 = u_2$, $i_1 = u_3$, $i_0 = u_1$ donc les inégalités établies dans la question précédente s'écrivent $p_0 \leqslant p_1 \leqslant i_1 \leqslant i_0$ si bien que $\mathcal{Q}(0)$ est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé quelconque tel que $\mathcal{Q}(n)$ est vraie.
  - ⋆ Sachant que $p_{n+1} \leqslant i_{n+1}$ car $\mathcal{Q}(n)$ est vraie,

$$p_{n+2} = u_{2n+4} = \frac{u_{2n+2} + u_{2n+3} + \sqrt{u_{2n+2}u_{2n+3}}}{3} = \frac{p_{n+1} + i_{n+1} + \sqrt{p_{n+1}i_{n+1}}}{3} \leqslant \frac{i_{n+1} + i_{n+1} + \sqrt{i_{n+1}i_{n+1}}}{3} = i_{n+1}$$

donc $\boxed{p_{n+2} \leqslant i_{n+1}}$.
De plus, d'après la question précédente, le signe de $p_{n+2} - p_{n+1} = u_{2n+4} - u_{2n+2}$ est celui de $u_{2n+3} - u_{2n+2} = i_{n+1} - p_{n+1}$ or puisque $\mathcal{Q}(n)$ est vraie, $i_{n+1} - p_{n+1} \geqslant 0$ donc $\boxed{p_{n+1} \leqslant p_{n+2}}$.
  - ⋆ Sachant que $p_{n+2} \leqslant i_{n+1}$,

$$i_{n+2} = u_{2n+5} = \frac{u_{2n+3} + u_{2n+4} + \sqrt{u_{2n+3}u_{2n+4}}}{3} = \frac{i_{n+1} + p_{n+2} + \sqrt{i_{n+1}p_{n+2}}}{3} \geqslant \frac{p_{n+2} + p_{n+2} + \sqrt{p_{n+2}p_{n+2}}}{3} = p_{n+2}$$

donc $\boxed{p_{n+2} \leqslant i_{n+2}}$.
De plus, d'après la question précédente, le signe de $i_{n+2} - i_{n+1} = u_{2n+5} - u_{2n+3}$ est celui de $u_{2n+4} - u_{2n+3} = p_{n+2} - i_{n+1}$ or d'après le point précédent, $p_{n+2} \leqslant i_{n+1}$ donc $p_{n+2} - i_{n+1} \leqslant 0$ donc $\boxed{i_{n+2} \leqslant i_{n+1}}$.

Par conséquent, $p_{n+1} \leqslant p_{n+2} \leqslant i_{n+2} \leqslant i_{n+1}$ donc $\mathcal{Q}(n+1)$ est vraie. /1,5

$$\boxed{\text{Ainsi, } \forall n \in \mathbb{N},\ p_n \leqslant p_{n+1} \leqslant i_{n+1} \leqslant i_n.}$$

(d) Montrer que les suites p et i sont convergentes de limites positives ou nulles.

- ⋆ D'après la question précédente, la suite i est décroissante,
or elle est minorée par 0 (car c'est une sous-suite de u qui est à termes positifs ou nuls)
donc i converge vers $\inf\{i_n \mid n \in \mathbb{N}\} \geqslant 0$ (car 0 minore $\{i_n \mid n \in \mathbb{N}\}$).
- ⋆ D'après la question précédente, la suite p est croissante,
or elle est majorée par i_0 (car $\forall n \in \mathbb{N}$, $p_n \leqslant i_n$ d'après $\mathcal{Q}(n)$ et $i_n \leqslant i_0$ puisque i décroît donc $p_n \leqslant i_0$)
donc p converge vers $\sup\{p_n \mid n \in \mathbb{N}\} \geqslant p_0 = u_0 \geqslant 0$. /1,5

$$\boxed{\text{Ainsi, les suites } p \text{ et } i \text{ sont convergentes et leurs limites sont positives ou nulles.}}$$

Posons $\ell_p = \lim\limits_{n \to +\infty} p_n$ et $\ell_i = \lim\limits_{n \to +\infty} i_n$.

(e) En écrivant la formule démontrée dans la question IV.3(a) pour $n \leftarrow 2n$ et en calculant les limites des deux membres, montrer que $\ell_i = \ell_p$. Que peut-on en déduire concernant la suite u ?

Écrivons la formule démontrée dans la question IV.3(a) pour $n \leftarrow 2n$:

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ u_{2n+2} - u_{2n} = \frac{1}{3}(\sqrt{u_{2n+1}} - \sqrt{u_{2n}})(\sqrt{u_{2n+1}} + 2\sqrt{u_{2n}})$$

d'où, par continuité de $\sqrt{\cdot}$ sur $\mathbb{R}_+$ donc en ℓ_i et ℓ_p (ces limites sont $\geqslant 0$ d'après la question précédente),

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\quad \underbrace{p_{n+1} - p_n}_{\substack{\xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell_p - \ell_p \\ \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0}} = \frac{1}{3} \underbrace{\underbrace{(\sqrt{i_n} - \sqrt{p_n})}_{\xrightarrow[n \to +\infty]{} \sqrt{\ell_i} - \sqrt{\ell_p}} \underbrace{(\sqrt{i_n} + 2\sqrt{p_n})}_{\xrightarrow[n \to +\infty]{} \sqrt{\ell_i} + 2\sqrt{\ell_p}}}_{\xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{3}(\sqrt{\ell_i} - \sqrt{\ell_p})(\sqrt{\ell_i} + 2\sqrt{\ell_p})}$$

Par unicité de la limite d'une suite,

$$\frac{1}{3}(\sqrt{\ell_i} - \sqrt{\ell_p})(\sqrt{\ell_i} + 2\sqrt{\ell_p}) = 0$$

donc

$$(\sqrt{\ell_i}-\sqrt{\ell_p})(\sqrt{\ell_i}+2\sqrt{\ell_p})=0$$

donc

$$\sqrt{\ell_i}-\sqrt{\ell_p}=0 \quad \text{ou} \quad \sqrt{\ell_i}+2\sqrt{\ell_p}=0$$

— Si $\sqrt{\ell_i}-\sqrt{\ell_p}=0$, alors $\sqrt{\ell_i}=\sqrt{\ell_p}$ donc $\ell_i=\ell_p$.

— Sinon, alors $\underbrace{\sqrt{\ell_i}}_{\geqslant 0}+2\underbrace{\sqrt{\ell_p}}_{\geqslant 0}=0$, donc $\sqrt{\ell_i}=0$ et $\sqrt{\ell_p}=0$ donc $\ell_i=0$ et $\ell_p=0$ donc $\ell_i=0=\ell_p$. /2

$$\boxed{\text{Ainsi, } \ell_i=\ell_p.}$$

Par conséquent, les sous-suites de u constituées par les termes d'indices pairs et impairs convergent vers la même limite donc la suite u converge. /1

$$\boxed{\text{Ainsi, la suite } u \text{ converge (vers } \ell_i=\ell_p).}$$

Dans la suite de cette partie, on admet que sous l'hypothèse $u_0>u_1$ on démontre par des techniques analogues à celles de la question précédente que les suites i et p convergent vers la même limite.

IV.4. On admet que l'on dispose de deux fonctions `p(u_0, u_1, n)` et `i(u_0, u_1, n)` écrites en python qui renvoient respectivement les valeurs p_n et i_n. On veut en déduire une fonction `approximation(u_0, u_1, epsilon)` qui renvoie une valeur approchée `v` de la limite de la suite u à `epsilon` près (c'est-à-dire telle que $|$`v`$-\lim u|\leqslant$`epsilon`). Écrire une telle fonction en utilisant les propriétés des suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et une boucle « tant que ».

```python
def approximation1(u_0, u_1, epsilon):
    n = 0

    while abs(i(u_0, u_1, n)-p(u_0, u_1, n)) > 2*epsilon:
        n = n+1

    return (i(u_0, u_1, n)+p(u_0, u_1, n))/2

def approximation2(u_0, u_1, epsilon):
    n = 0

    while abs(i(u_0, u_1, n)-p(u_0, u_1, n)) > epsilon:
        n = n+1

    return i(u_0, u_1, n)    # ou p(u_0, u_1, n)
```

/2

IV.5. Dans cette question, on suppose que $u_0\neq u_1$.
Posons, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\delta_n=|u_{n+1}-u_n|$.

(a) Après avoir justifié que la suite $\left(\dfrac{u_{n+2}-u_{n+1}}{u_{n+1}-u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie, montrer qu'elle tend vers $-\dfrac{1}{2}$ (on justifiera au passage que $\lim u>0$) puis en déduire la convergence de $(\ln\delta_{n+1}-\ln\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

- Supposons qu'il existe $n_0\in\mathbb{N}$ tel que $u_{n_0}=u_{n_0+1}$, alors d'après la question IV.1(a), u est stationnaire donc d'après la question IV.2, u est une suite constante donc $u_0=u_1$ ce qui contredit les hypothèses de cette question.
  Donc, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n\neq u_{n+1}$ et donc : /1

$$\boxed{\text{la suite } \left(\dfrac{u_{n+2}-u_{n+1}}{u_{n+1}-u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bien définie.}}$$

- D'après la question IV.3, la suite u converge et sa limite ℓ est la limite commune des deux suites adjacentes (p_n) et (i_n). La suite u étant à termes positifs ou nuls, en passant à la limite sur l'inégalité $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n\geqslant 0$, on obtient $\ell\geqslant 0$.
  Par l'absurde, supposons que $\ell=0$.

— Si $u_0 \leqslant u_1$, la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (question IV.3(d)) et converge vers ℓ donc $0 = \ell = \sup\{p_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ donc

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ 0 \leqslant u_{2n} = p_n \leqslant \ell = 0$$

donc (p_n) est la suite nulle donc $p_0 = u_0 = 0$, or $u_1 \neq 0$ donc $u_1 > 0$ donc $u_0 + u_1 > 0$ donc (question II.1(a)) $p_1 = u_2 > 0$ d'où une contradiction avec la nullité de la suite (p_n).

— Si $u_0 > u_1$, la suite $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (admis par l'énoncé à la fin de la question IV.3) et converge vers ℓ donc $0 = \ell = \sup\{i_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ donc

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ 0 \leqslant u_{2n+1} = i_n \leqslant \ell = 0$$

donc (i_n) est la suite nulle donc $i_0 = u_1 = 0$, or $u_0 \neq 0$ donc $u_0 > 0$ donc $u_0 + u_1 > 0$ donc (question II.1(a)) $i_1 = u_3 > 0$ d'où une contradiction avec la nullité de la suite (i_n). /1

$$\boxed{\text{Par conséquent, la suite } u \text{ converge vers une limite } \ell > 0.}$$

- Puis le calcul donne, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+2}-u_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n+u_{n+1}+\sqrt{u_n u_{n+1}}-3u_{n+1}) = \frac{1}{3}(u_n-2u_{n+1}+\sqrt{u_n u_{n+1}}) = \frac{1}{3}(\sqrt{u_n}-\sqrt{u_{n+1}})(\sqrt{u_n}+2\sqrt{u_{n+1}})$$

Et comme $u_{n+1} - u_n = (\sqrt{u_{n+1}} - \sqrt{u_n})(\sqrt{u_{n+1}} + \sqrt{u_n})$, en simplifiant par $\sqrt{u_{n+1}} - \sqrt{u_n}$:

$$\boxed{\frac{u_{n+2} - u_{n+1}}{u_{n+1} - u_n} = -\frac{\sqrt{u_n} + 2\sqrt{u_{n+1}}}{3(\sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n+1}})} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\frac{\sqrt{\ell} + 2\sqrt{\ell}}{3(\sqrt{\ell} + \sqrt{\ell})} = -\frac{1}{2}} \quad \text{(continuité de } \sqrt{\cdot} \text{ en } \ell)$$

en utilisant que $\sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n+1}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sqrt{\ell} + \sqrt{\ell} = 2\sqrt{\ell} \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n+1}}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2\sqrt{\ell}}$ est vraie car nous /2 savons que $\ell > 0$ (justifié dans le point précédent !) donc $2\sqrt{\ell} \neq 0$ ce qui permet d'appliquer le théorème disant que l'inverse d'une suite qui converge vers une valeur non nulle converge vers la limite inverse.

- Enfin, par continuité de ln en $\dfrac{1}{2}$ et de $t \mapsto |t|$ en $-\dfrac{1}{2}$: /1

$$\boxed{\ln \delta_{n+1} - \ln \delta_n = \ln \left|\frac{u_{n+2} - u_{n+1}}{u_{n+1} - u_n}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln \frac{1}{2} = -\ln 2}$$

(b) Soit $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle qui converge vers le réel s.

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $m_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} s_k$.

Soit $\varepsilon > 0$ fixé.

i. Justifier l'existence de $N \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$n \geqslant N \Rightarrow |m_n - s| \leqslant \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{N}(s_k - s)\right| + \frac{\varepsilon}{2}$$

Comme $(s_n) \to s$, avec le ε fixé par l'énoncé :

$\exists\ N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\ n \geqslant N$, $|s_n - s| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$. Et donc, pour tout $n \geqslant N$,

$$|m_n - s| = \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} s_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} s\right| = \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{N}(s_k - s) + \sum_{k=N+1}^{n}(s_k - s)\right| \leqslant \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{N}(s_k - s)\right| + \frac{1}{n}\left|\sum_{k=N+1}^{n}(s_k - s)\right|$$

Par inégalité triangulaire et majoration pour $k \geqslant N + 1$ (à droite) :

$$|m_n-s| \leqslant \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{N}(s_k - s)\right|+\frac{1}{n}\sum_{k=N+1}^{n}\underbrace{|s_k - s|}_{\leqslant \frac{\varepsilon}{2}} \leqslant \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{N}(s_k - s)\right|+\frac{1}{n}\underbrace{(n-(N+1)+1)}_{=n-N\leqslant n}\frac{\varepsilon}{2} \leqslant \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{N}(s_k - s)\right|+\frac{\varepsilon}{2}$$

/2

$$\boxed{\text{Il existe, donc, } N \in \mathbb{N}^* \text{ tel que pour tout } n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \Rightarrow |m_n - s| \leqslant \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{N}(s_k - s)\right| + \frac{\varepsilon}{2}.}$$

ii. En déduire la convergence de $(m_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers s.

La suite $\left(\dfrac{1}{n}\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{N}(s_k-s)\right|\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0 ($\displaystyle\sum_{k=1}^{N}(s_k-s)$ est une constante).

Donc il existe $N'\in N^*$ tel que pour tout $n\geqslant N'$, $\dfrac{1}{n}\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{N}(s_k-s)\right|\leqslant\dfrac{\varepsilon}{2}$.

Posons $N''=\max(N',N)$. Soit $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $n\geqslant N''$.

$$|m_n-s|\underbrace{\leqslant}_{n\geqslant N''\geqslant N}\frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{N}(s_k-s)\right|+\frac{\varepsilon}{2}\underbrace{\leqslant}_{n\geqslant N''\geqslant N'}\varepsilon$$

C'est la définition (puisque ε est quelconque) : /1,5

$$\boxed{m_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}s.}$$

(c) Utiliser la question précédente pour établir un équivalent de $\ln|u_{n+1}-u_n|$.

version MPSI 1 Utiliser la question précédente pour montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln|u_{n+1}-u_n|}{n}=\ln\frac{1}{2}$ ce qui sera prochainement formalisé en disant que les suites $(\ln|u_{n+1}-u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\ln\dfrac{1}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont équivalentes.

D'après la question précédente, appliquée pour $s_n=\ln(\delta_{n+1})-\ln(\delta_n)$, puisque $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $-\ln 2$ (question IV.5(a)), la suite $m_n=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}s_n=\dfrac{1}{n}(\ln\delta_{n+1}-\ln\delta_1)$ (par téléscopage) converge aussi vers $-\ln 2$.

On a $\dfrac{1}{n}(\ln\delta_{n+1}-\ln\delta_1)\xrightarrow[n\to+\infty]{}-\ln 2$ et $\dfrac{1}{n}\ln\delta_1\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$, donc par somme de deux suites convergentes, /1

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln|u_{n+1}-u_n|}{n}=\ln\frac{1}{2}\iff\ln|u_{n+1}-u_n|\underset{n\to+\infty}{\sim}\ln\frac{1}{2^n}}$$

V Étude de la limite de $u\in E_{\frac{1}{2}}$ en fonction des conditions initiales

Pour tout $(a,b)\in\mathbb{R}_+^2$ et tout $n\in\mathbb{N}$, notons $u_n(a,b)$ le terme d'indice n de la suite de l'ensemble $E_{\frac{1}{2}}$ définie par les conditions initiales $u_0=a$ et $u_1=b$.

Nous avons vu dans la partie IV que la suite $(u_n(a,b))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Posons $\ell(a,b)=\displaystyle\lim_{n\to+\infty}u_n(a,b)$. On note, en particulier, $\gamma=\ell\left(1,\dfrac{1}{3}\right)$

V.1. (a) Calculer, pour tout $a\in\mathbb{R}_+$, $\ell(a,a)$ en fonction de a (on pourra déduire ce résultat de la partie IV).

Considérons la propriété $\mathcal{P}(\cdot)$ définie pour tout $n\in\mathbb{N}$ par

$$\mathcal{P}(n):\text{« } u_n(a,a)=u_{n+1}(a,a)=a \text{ ».}$$

- ⋆ $\mathcal{P}(0)$ est vraie, puisque $u_0(a,a)=a$ et $u_1(a,a)=a$
- ⋆ Soit $n\in\mathbb{N}$ fixé quelconque tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

$$u_{n+2}=F_{\frac{1}{2}}(u_n(a,a),u_{n+1}(a,a))=F_{\frac{1}{2}}(a,a)=\frac{a+a+\sqrt{a^2}}{3}=\frac{2a+|a|}{3}=a$$

car $a\geqslant 0$.

Par conséquent, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n(a,a)=a$. Par unicité de la limite, /1

$$\boxed{\ell(a,a)=a.}$$

(b) Justifier que, pour tout $b \in \mathbb{R}_+$, $\ell(0,b) = \ell\left(b, \frac{b}{3}\right)$.

Soit $b \in \mathbb{R}_+$.

D'une part : $u_1(0,b) = b = u_0(b, \frac{b}{3})$. Et d'autre part :

$$u_2(0,b) = \frac{u_0(0,b) + u_1(0,b) + \sqrt{u_0(0,b) \times u_1(0,b)}}{3} = \frac{0 + b + \sqrt{0 \times b}}{3} = \frac{b}{3} = u_1(b, \frac{b}{3})$$

Puisqu'elles vérifient la même relation de récurrence $(\mathcal{R}_{\frac{1}{2}})$, par récurrence facile :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1}(0,b) = u_n(b, \frac{b}{3})$$

Par unicité de la limite, /1,5

$$\boxed{\forall\, b \in \mathbb{R}_+, \quad \ell(0,b) = \ell(b, \frac{b}{3}).}$$

(c) Soit $\lambda \geqslant 0$ un réel fixé.
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n(\lambda a, \lambda b) = \lambda u_n(a,b)$ puis en déduire $\ell(\lambda a, \lambda b) = \lambda \times \ell(a,b)$.

(Pour changer, faisons une récurrence à deux termes).

Considérons la propriété $\mathcal{P}(\cdot)$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$\mathcal{P}(n) : \text{« } u_n(\lambda a, \lambda b) = \lambda u_n(a,b) \text{ ».}$$

- ⋆ $\mathcal{P}(0)$ est vraie, puisque $u_0(\lambda a, \lambda b) = \lambda a$ et $\lambda u_0(a,b) = \lambda a$
- ⋆ $\mathcal{P}(1)$ est vraie, puisque $u_1(\lambda a, \lambda b) = \lambda b$ et $\lambda u_1(a,b) = \lambda b$
- ⋆ Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé quelconque tel que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies.

$$\begin{aligned} u_{n+2}(\lambda a, \lambda b) &= \frac{u_n(\lambda a, \lambda b) + u_{n+1}(\lambda a, \lambda b) + \sqrt{u_n(\lambda a, \lambda b) \times u_{n+1}(\lambda a, \lambda b)}}{3} \\ &\underbrace{=}_{\mathcal{P}(n) \& \mathcal{P}(n+1)} \frac{\lambda u_n(a,b) + \lambda u_{n+1}(a,b) + |\lambda| \sqrt{u_n(a,b) \times u_{n+1}(a,b)}}{3} \\ &\underbrace{=}_{\lambda \geqslant 0} \lambda u_{n+2}(a,b) \end{aligned}$$

Par conséquent, $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie. /1,5

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n(\lambda a, \lambda b) = \lambda u_n(a,b).}$$

Par unicité de la limite,

$$\boxed{\ell(\lambda a, \lambda b) = \lambda \ell(a,b).}$$

Posons, pour tout $b \in \mathbb{R}_+$, $L(b) = \ell(1,b)$.

V.2. (a) Exprimer pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+$, $\ell(a,b)$ comme le produit d'un nombre avec $L(x)$ où x est un réel positif ou nul bien choisi.

$$\ell(a,b) \underbrace{=}_{a \neq 0} \underbrace{\ell\left(a \times 1, a \times \frac{b}{a}\right) = a\ell\left(1, \frac{b}{a}\right)}_{\text{question précédente appliquée pour } \lambda \leftarrow a \text{ (autorisé } a \geqslant 0)} = a \times L\left(\frac{b}{a}\right)$$

/1

$$\boxed{\ell(a,b) = a \times L\left(\frac{b}{a}\right).}$$

(b) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(a,b) \in {\mathbb{R}_+^*}^2$. Justifier que $u_n(a,b) > 0$ et montrer que

$$\ell(a,b) = \ell(u_n(a,b), u_{n+1}(a,b)) = u_n(a,b) \times \ell(1, \frac{u_{n+1}(a,b)}{u_n(a,b)})$$

En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $L(x) = u_n(1,x) \times L(\frac{u_{n+1}(1,x)}{u_n(1,x)})$.

Soit $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Soit $n \in \mathbb{N}$.
D'après la partie IV, les sous-suites des termes d'indices pairs et impairs de $(u_k(a,b))_{k\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes donc si la suite croissante est celle des termes pairs, u_0 minore la suite, si la suite croissante est celle des termes impairs, u_1 minore la suite si bien que

$$\forall k \in \mathbb{N}\ ,\ u_k(a,b) \geqslant \min(u_0(a,b), u_1(a,b)) = \min(a,b)$$

Par conséquent, $\boxed{u_n(a,b) \geqslant \min(a,b) > 0}$ car dans cette question, on a supposé $a > 0$ et $b > 0$. /1

La suite $\left(u_k(a,b)\right)_{k\geqslant n}$ est extraite de la suite $\left(u_k(a,b)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $\ell(a,b)$ donc elle converge vers la même limite $\ell(a,b)$.
Or la suite $\left(u_k(a,b)\right)_{k\geqslant n}$ fait partie de $E_{\frac{1}{2}}$, avec pour premiers termes $u_n(a,b)$ et $u_{n+1}(a,b)$ donc elle converge et sa limite vaut $\ell(u_n(a,b), u_{n+1}(a,b))$.
Par unicité de la limite, puis en factorisant par $\lambda \leftarrow u_n(a,b)$ et en utilisant que $u_n(a,b) \neq 0$:

$$\boxed{\forall\ n \in \mathbb{N},\ \ell(a,b) = \ell(u_n(a,b), u_{n+1}(a,b)) = u_n(a,b) \times \ell(1, \frac{u_{n+1}(a,b)}{u_n(a,b)}).}$$

Puis comme $L(x) = \ell(1,x)$, en prenant $a \leftarrow 1$ et $b \leftarrow x$: /1,5

$$\boxed{\forall\ n \in \mathbb{N},\ \forall\ x \in \mathbb{R}_+^*,\ L(x) = u_n(1,x) \times L(\frac{u_{n+1}(1,x)}{u_n(1,x)}).}$$

(c) Montrer que, pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}_+^2$, $u_2(a,b) = u_2(b,a)$ puis en déduire que pour tout $x > 0$, $L(x) = xL(\frac{u_2(1,x)}{x}) = xL(\frac{u_2(x,1)}{x})$.

Comme l'interversion $u_0 \leftrightarrow u_1$ ne change pas le calcul de u_2 :

$$\boxed{u_2(a,b) = \frac{a+b+\sqrt{ab}}{3} = \frac{b+a+\sqrt{ba}}{3} = u_2(b,a)}.$$

Avec la formule de la question précédente pour $n = 1$, /1,5

$$\boxed{\forall\ x > 0,\ L(x) = u_1(1,x)L\left(\frac{u_2(1,x)}{u_1(1,x)}\right) = xL\left(\frac{u_2(x,1)}{x}\right) = xL\left(\frac{u_2(1,x)}{x}\right)}$$

(d) Soient $0 \leqslant b \leqslant b'$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n(1,b) \leqslant u_n(1,b')$. Que peut-on en déduire concernant la fonction L ?

Toujours par récurrence, considérons la propriété $\mathcal{P}(\cdot)$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$\mathcal{P}(n) : « \ u_n(1,b) \leqslant u_n(1,b')\ ».$$

- ⋆ $\mathcal{P}(0)$ est vraie, puisque $u_0(1,b) = 1 = u_0(1,b')$.
- ⋆ $\mathcal{P}(1)$ est vraie, puisque $u_1(1,b) = b \leqslant b' = u_1(1,b')$.
- ⋆ Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé quelconque tel que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies.

$$u_{n+2}(1,b) = F_{\frac{1}{2}}(u_n(1,b), u_{n+1}(1,b)) \leqslant F_{\frac{1}{2}}(u_n(1,b'), u_{n+1}(1,b')) = u_{n+2}(1,b')$$

en appliquant le résultat de la question II.2. avec $\left\{\begin{array}{c} x \leftarrow u_n(1,b) \\ y \leftarrow u_{n+1}(1,b) \\ x' \leftarrow u_n(1,b') \\ y' \leftarrow u_{n+1}(1,b') \end{array}\right.$ puisque $x \leqslant x'$ et $y \leqslant y'$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } n\in\mathbb{N},\ u_n(1,b)\leqslant u_n(1,b').}$$ /1,5

En passant à la limite (autorisé car les deux membres sont des suites convergentes), /0,5

$$\boxed{L(b)=\ell(1,b)\leqslant \ell(1,b')=L(b'),\text{ i.e. } L \text{ est croissante sur } \mathbb{R}_+.}$$

V.3. Posons, pour tout $b\in\mathbb{R}_+$, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $S_n(b)=1+\sum_{k=0}^{n}(u_{k+1}(1,b)-u_k(1,b))$. Soit $b\in\mathbb{R}_+$ fixé.

(a) Justifier que, $L(b)=\lim_{n\to+\infty}S_n(b)$.

Soit $n\in\mathbb{N}$. Il y a télescopage directement :

$$\begin{aligned}S_n(b)&=1+\sum_{k=0}^{n}(u_{k+1}(1,b)-u_k(1,b))=1+\sum_{k=0}^{n}u_{k+1}(1,b)-\sum_{k=0}^{n}u_k(1,b)\\&=1+\left(\sum_{k=1}^{n}u_k(1,b)+u_{n+1}(1,b)\right)-\left(\sum_{k=1}^{n}u_k(1,b)+\underbrace{u_0(1,b)}_{=1}\right)=u_{n+1}(1,b)\end{aligned}$$

or $(u_n(a,b))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell(a,b)$ donc $(u_{n+1}(a,b))_{n\in\mathbb{N}}$, qui en est extraite, converge vers la même limite : /1

$$\boxed{L(b)=\lim_{n\to+\infty}u_{n+1}(1,b)=\lim_{n\to+\infty}S_n(b)}$$

(b) Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$u_{n+2}(1,b)-u_{n+1}(1,b)=\frac{-1}{3}(u_{n+1}(1,b)-u_n(1,b))\left[1+\frac{\sqrt{u_{n+1}(1,b)}}{\sqrt{u_{n+1}(1,b)}+\sqrt{u_n(1,b)}}\right]$$

puis en déduire que $|u_{n+2}(1,b)-u_{n+1}(1,b)|\leqslant K|u_{n+1}(1,b)-u_n(1,b)|$ où K est une constante réelle indépendante de n et b vérifiant $K\in]0,1[$ que l'on précisera.

Soit $n\in\mathbb{N}$. En reprenant la technique de calcul de la question IV.5(a),

$$\begin{aligned}u_{n+2}(1,b)-u_{n+1}(1,b)&=\frac{\overbrace{u_n(1,b)-u_{n+1}(1,b)}^{(\sqrt{u_n(1,b)}-\sqrt{u_{n+1}(1,b)})(\sqrt{u_n(1,b)}+\sqrt{u_{n+1}(1,b)})}\quad\overbrace{+\sqrt{u_n(1,b)u_{n+1}(1,b)}-u_{n+1}(1,b)}^{\sqrt{u_{n+1}(1,b)}(\sqrt{u_n(1,b)}-\sqrt{u_{n+1}(1,b)})}}{3}\\&=\frac{(\sqrt{u_n(1,b)}-\sqrt{u_{n+1}(1,b)})(\sqrt{u_n(1,b)}+2\sqrt{u_{n+1}(1,b)})}{3}\end{aligned}$$

or deux termes consécutifs ne sont pas tous les deux nuls (sinon c'est la suite nulle, quest IV.1) donc $\sqrt{u_n(1,b)}+\sqrt{u_{n+1}(1,b)}\neq 0$ ce qui permet de multiplier par l'expression conjuguée

$$\begin{aligned}&=\frac{u_n(1,b)-u_{n+1}(1,b)}{\sqrt{u_n(1,b)}+\sqrt{u_{n+1}(1,b)}}\times\frac{\sqrt{u_n(1,b)}+2\sqrt{u_{n+1}(1,b)}}{3}\\&=-\frac{u_{n+1}(1,b)-u_n(1,b)}{3}\times\frac{\sqrt{u_n(1,b)}+\sqrt{u_{n+1}(1,b)}+\sqrt{u_{n+1}(1,b)}}{\sqrt{u_n(1,b)}+\sqrt{u_{n+1}(1,b)}}\end{aligned}$$

/1,5

$$\boxed{u_{n+2}(1,b)-u_{n+1}(1,b)=-\frac{u_{n+1}(1,b)-u_n(1,b)}{3}\left(1+\frac{\sqrt{u_{n+1}(1,b)}}{\sqrt{u_n(1,b)}+\sqrt{u_{n+1}(1,b)}}\right)}$$

Puis, comme $\sqrt{u_n(1,b)}\geqslant 0$ et $\sqrt{u_{n+1}(1,b)}\geqslant 0$, alors

$$\frac{\sqrt{u_{n+1}(1,b)}}{\sqrt{u_n(1,b)}+\sqrt{u_{n+1}(1,b)}}\leqslant\frac{\sqrt{u_n(1,b)}+\sqrt{u_{n+1}(1,b)}}{\sqrt{u_n(1,b)}+\sqrt{u_{n+1}(1,b)}}=1$$

Donc

$$\left|\frac{u_{n+2}(1,b)-u_{n+1}(1,b)}{\ldots}\right|\leqslant\frac{1}{3}\times 2$$

/1,5

$$\boxed{\forall\ n \in \mathbb{N}, \forall\ b \in \mathbb{R}_+,\ |u_{n+2}(1,b) - u_{n+1}(1,b)| \leqslant \frac{2}{3}|u_{n+1}(1,b) - u_n(1,b)|.}$$

(c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_{n+1}(1,b) - u_n(1,b)| \leqslant K^n |b-1|$$

On réalise une récurrence, en posant pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$\mathcal{P}_n$: « $|u_{n+1}(1,b) - u_n(1,b)| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n |b-1|$ ».

— $\mathcal{P}_0$ est vraie, puis $|u_{0+1}(1,b) - u_0(1,b)| = |b-1| = K^0|b-1|$.

— Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie.

D'après la question précédente, $|u_{n+2}(1,b) - u_{n+1}(1,b)| \leqslant \frac{2}{3}|u_{n+1}(1,b) - u_n(1,b)|$.

Mais d'après $\mathcal{P}_n$ le terme de droite est inférieur à $\left(\frac{2}{3}\right)^n |b-1|$.

Donc $|u_{n+2}(1,b) - u_{n+1}(1,b)| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} |b-1|$. Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. /1

$$\boxed{\forall\ b \in \mathbb{R}_+, \forall\ n \in \mathbb{N}, \qquad |u_{n+1}(1,b) - u_n(1,b)| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n |b-1|.}$$

(d) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$|S_{n+p}(b) - S_n(b)| \leqslant \frac{K^{n+1}}{1-K}|b-1|$$

puis conclure que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|L(b) - S_n(b)| \leqslant \frac{K^{n+1}}{1-K}|b-1|$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$ (on a donc $n+p \geqslant n$) :

$$\begin{aligned} |S_{n+p}(b) - S_n(b)| &= \left|1 + \sum_{k=0}^{n+p}(u_{k+1}(1,b) - u_k(1,b)) - 1 - \sum_{k=0}^{n}(u_{k+1}(1,b) - u_k(1,b))\right| \\ &= \left|\sum_{k=n+1}^{n+p}(u_{k+1}(1,b) - u_k(1,b))\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p}|u_{k+1}(1,b) - u_k(1,b)| \end{aligned}$$

D'après la question précédente :

$$|S_{n+p}(b) - S_n(b)| \leqslant \left|\sum_{k=n+1}^{n+p}\left(\frac{2}{3}\right)^k |b-1|\right| = |b-1|\sum_{k=n+1}^{n+p}\left(\frac{2}{3}\right)^k$$

On reconnaît la somme de $(n+p) - (n+1) + 1 = p$ termes consécutifs de la suite géométrique de raison $K = \frac{2}{3}$ et de premier terme $K^{n+1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$,

$$|S_{n+p}(b) - S_n(b)| \leqslant |b-1| \times \frac{1-K^p}{1-K} \times K^{n+1} \leqslant \frac{K^{n+1}}{1-K}|b-1|$$

/1,5

$$\boxed{|S_{n+p}(b) - S_n(b)| \leqslant \frac{K^{n+1}}{1-K}|b-1| = 3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} |b-1|.}$$

Le terme de gauche converge pour $p \to +\infty$ vers $|L(b) - S_n(b)|$, le terme de droite est un majorant indépendant de p donc en passant à la limite dans l'inégalité, /1

$$\boxed{|L(b) - S_n(b)| \leqslant \frac{K^{n+1}}{1-K}|b-1| = 3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} |b-1|.}$$

(e) Soit $x \in \mathbb{R}_+$ fixé.

i. Montrer que, pour tout $x' \in \mathbb{R}_+$,

$$|L(x) - L(x')| \leqslant \frac{K^{n+1}}{1-K}(|x-1| + |x'-1|) + |S_n(x) - S_n(x')|$$

Soit $x' \in \mathbb{R}_+$. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$|L(x) - L(x')| = \big|(L(x) - S_n(x)) + (S_n(x) - S_n(x')) + (S_n(x') - L(x'))\big|$$

Par inégalité triangulaire :

$$|L(x) - L(x')| \leqslant |L(x) - S_n(x)| + |S_n(x) - S_n(x')| + |S_n(x') - L(x')|$$

On exploite (deux fois) l'inégalité précédente, pour $b \leftarrow x$ et $b \leftarrow x'$. /1

$$\boxed{|L(x) - L(x')| \leqslant \frac{K^{n+1}}{1-K}\left(|x-1| + |x'-1|\right) + |S_n(x) - S_n(x')|}$$

---

ii. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b \mapsto u_n(1,b)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

On démontre que $b \mapsto u_n(1,b)$ est continue par récurrence (à deux termes).
On pose pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,
$\mathcal{P}_n$: « $b \mapsto u_n(1,b)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ ».

- $\mathcal{P}_0$ est vraie, puis $u_0(1,b) = 1$ et donc $b \mapsto u_0(1,b) = 1$ est constante donc continue.
- $\mathcal{P}_1$ est vraie, puis $u_1(1,b) = b$ et donc $b \mapsto u_0(1,b) = b$ est continue.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_{n+1}$ sont vraies.
  Or : $u_{n+2}(1,b) = \frac{1}{3}(u_n(1,b) + u_{n+1}(1,b) + \sqrt{u_n(1,b) \times u_{n+1}(1,b)}$.
  Mais par produit, composition avec la fonction racine carrée continue sur $\mathbb{R}_+$, puis addition : $b \mapsto u_{n+2}(1,b)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. Donc $\mathcal{P}_{n+2}$ est vraie. /1,5

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ b \mapsto u_n(1,b) \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+.}$$

---

iii. En déduire que L est continue en x.

Soit $\varepsilon > 0$.
1. Majoration indépendante de x' pour $x' \in [x-1, x+1] \cap \mathbb{R}_+$.
Si $x' \in [x-1, x+1] \cap \mathbb{R}_+$, alors $x' - 1 \in [\max(x-2, -1), x]$,
donc $|x'-1| \in [0, \max(x, 1, 2-x)]$ donc $|x'-1| \leqslant \max(2, x)$.
et de même $|x-1| \leqslant \max(1, x) \leqslant \max(2, x)$.
Ainsi, pour tout $x' \in [x-1, x+1] \cap \mathbb{R}_+$, $|x-1| + |x'-1| \leqslant 2\max(2, x)$.

Une autre méthode, moins précise mais cela n'a pas d'importance dans ce type de raisonnement, consiste à utiliser l'inégalité triangulaire

$$|x-1| \leqslant |x| + 1 \leqslant x+1\ ,\ |x'-1| = |x' - x + x - 1| \leqslant |x - x'| + |x-1| \leqslant 1 + (x+1) = 2 + x$$

si bien que, pour tout $x' \in [x-1, x+1]$, $|x-1| + |x'-1| \leqslant 3 + 2x$.
2. Choix de N grand
Comme $K \in [0, 1[$ et que pour tout $x' \in [x-1, x+1]$, $|x-1| + |x'-1|$ est majoré par $2\max(2, x)$
$0 \leqslant \frac{K^{n+1}}{1-K}\left(|x-1| + |x'-1|\right) \leqslant \frac{K^{n+1}}{1-K} \times 2\max(2,x)$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{K^{n+1}}{1-K} \times 2\max(2,x) = 0$.
Alors, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\, n \geqslant N$, $0 \leqslant \frac{K^{n+1}}{1-K} \times 2\max(2,x) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.
Donc, par encadrement, $\forall\, n \geqslant N$, $\forall\, x' \in [x-1, x+1] \cap \mathbb{R}_+$, $0 \leqslant \frac{K^{n+1}}{1-K}\left(|x-1| + |x'-1|\right) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.

3. *Continuité en grand N de S_N, où N est bien choisi.*

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $b \mapsto u_k(1,b)$ est continue alors par addition finie (N fixé), S_N est continue en x.
Par conséquent, il existe $\delta > 0$ tel que $\forall\, x' \in [x-\delta, x+\delta] \cap \mathbb{R}_+$, $|S_N(x) - S_N(x')| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$.

4. *Bilan*

Posons $\eta = \min(\delta, 1) > 0$. Soit $x' \in [x-\eta, x+\eta] \cap \mathbb{R}_+$ fixé,

$$\left|L(x) - L(x')\right| \leqslant \underbrace{\frac{K^n}{1-K}\left(|x-1| + |x'-1|\right)}_{\leqslant \frac{\varepsilon}{2} \text{ car } \eta \leqslant 1} + \underbrace{\left|S_n(x) - S_n(x')\right|}_{\leqslant \frac{\varepsilon}{2} \text{ car } \eta \leqslant \delta} \leqslant \varepsilon$$

C'est la définition de la continuité de L en x. /3

$$\boxed{L \text{ est continue en (tout) } x \in \mathbb{R}_+, \text{ donc continue sur } \mathbb{R}_+.}$$

V.4. On cherche à approcher des valeurs particulières de L.
On rappelle que $\gamma = \ell\left(1, \dfrac{1}{3}\right) = L\left(\dfrac{1}{3}\right)$

(a) Montrer que $L(0) = \dfrac{1}{3}\gamma$.

$L(0) = \ell(1,0)$.
Or $u_2(1,0) = \dfrac{1+0+0}{3} = \dfrac{1}{3}$, et $u_3(1,0) = \dfrac{0 + \frac{1}{3} + \sqrt{0}}{3} = \dfrac{1}{9}$.
Donc d'après la question V.2(b) :

$$L(0) = \ell(1,0) = u_2(1,0) \times \ell\left(1, \frac{u_3(1,0)}{u_2(1,0)}\right) = \frac{1}{3}\ell\left(1, \frac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{3}}\right) = \frac{1}{3}L\left(\frac{1}{3}\right)$$

/1,5

$$\boxed{L(0) = \frac{1}{3}\gamma}$$

(b) En utilisant la relation établie dans la question V.2(c), montrer que $L(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \gamma x$ ce qui équivaut à $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{L(x)}{x} = \gamma$.

On a vu que

$$L(x) = xL\left(\frac{u_2(1,x)}{x}\right) = xL\left(\frac{1+x+\sqrt{x}}{3x}\right)$$

Or, d'une part $\dfrac{1+x+\sqrt{x}}{3x} = \dfrac{1}{3x} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3\sqrt{x}} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{3}$,
et d'autre part L est continue en $\dfrac{1}{3}$,

$$\text{donc} \quad \frac{L(x)}{x} = L\left(\frac{1+x+\sqrt{x}}{3x}\right) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} L\left(\frac{1}{3}\right) = \gamma \quad \text{(composition des limites)}$$

Cela signifie exactement : /1,5

$$\boxed{L(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \gamma x.}$$
