Devoir surveillé n°10

Sujet donné le mercredi 25 mai 2022, 4h.

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

La notation tiendra particulièrement compte de **la qualité de la rédaction, la précision des raisonnements et l'énoncé des formules utilisées. Les réponses aux questions seront numérotées et séparées par un trait horizontal. Les résultats essentiels devront être encadrés ou soulignés.**

BON TRAVAIL

Problème - Convergence vague & Polynômes orthogonaux

Notations

Soient $a < b \in \mathbb{R}$. On note pour toutes fonctions f et g définie sur le segment $[a,b]$ et continues par morceaux sur $[a,b]$,

- $\|f\|_1 = \displaystyle\int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t$
- $\|f\|_2 = \sqrt{\displaystyle\int_a^b |f(t)|^2\mathrm{d}t}.$
- $\|f\|_\infty = \sup\limits_{[a,b]}|f| = \sup\{|f(t)|, t \in [a,b]\}$
- $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t$

On note E, l'espace vectoriel des fonctions continue sur $I = [a,b]$.

Ce problème est divisé en quatre parties.

La **Partie I** permet de reprendre quelques résultats du cours. La **Partie II** présente différents types de convergence pour des suites de fonctions définies sur le segment $[a,b]$. Pour restreinte l'étude de la convergence vague, on s'intéresse en **Partie III** aux suites de polynômes orthogonaux définis à partir d'un produit scalaire fonctionnel. Enfin, en **Partie IV** on exploite ces polynômes orthogonaux pour retrouver les formules de quadratures de Gauss.

Les parties **II** et (**III** & **IV**) sont largement indépendantes

I - Résultats du cours. Inégalités

I.1. Donner la définition d'une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$.

I.2. Montrer que si f est continue par morceaux sur $[a,b]$, alors f est bornée sur $[a,b]$.
La réciproque est-elle vraie ? Si oui, prouver le ; sinon, donner un contre exemple.

I.3. Montrer que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ n'est pas un produit scalaire sur l'espace des fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$.

I.4. Montrer que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur l'espace des fonctions continues sur $[a,b]$, noté E.
$\|\cdot\|_2$ est donc la norme euclidienne associée.

I.5. Soient $f, g \in E$. Quelle inégalité a-t-on entre $|\langle f, g\rangle|$, $\|f\|_2$ et $\|g\|_2$? (sans démonstration)
Quelle inégalité simple a-t-on entre $|\langle f, g\rangle|$, $\|f\|_\infty$ et $\|g\|_1$?

II - Convergences variées et implications entre elles

On s'intéresse maintenant à des suites de fonctions (φ_n), d'éléments de E. On définit trois types de convergence :

— La convergence simple de la suite (φ_n) vers φ sur l'intervalle I, noté $(\varphi_n) \xrightarrow{c.s.} \varphi$ si :

$$\forall\, x \in I, \quad (\varphi_n(x)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \varphi(x) \qquad \text{i.e.} \qquad \forall\, x \in I, \forall\, \epsilon > 0, \exists\, N_x \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall\, n \geqslant N_x, |\varphi_n(x) - \varphi(x)| \leqslant \epsilon$$

— La convergence uniforme de la suite (φ_n) vers φ sur l'intervalle I, noté $(\varphi_n) \xrightarrow{c.u.} \varphi$ si :

$$\forall\, \epsilon > 0, \exists\, N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall\, n \geqslant N, \forall\, x \in I, |\varphi_n(x) - \varphi(x)| \leqslant \epsilon$$

— La convergence N_1 de la suite (φ_n) vers φ sur l'intervalle I, noté $(\varphi_n) \xrightarrow{c.n_1} \varphi$ si :

$$\|\varphi_n - \varphi\|_1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \text{i.e.} \qquad \forall\, \epsilon > 0, \exists\, N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall\, n \geqslant N, \int_I |\varphi_n(t) - \varphi(t)|\mathrm{d}t \leqslant \epsilon$$

— La convergence vague de la suite (φ_n) vers φ sur l'intervalle I, noté $(\varphi_n) \xrightarrow{\sim} \varphi$ si :

$$\forall\, \psi \in E, \langle \varphi_n, \psi \rangle \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \langle \varphi, \psi \rangle \qquad \text{i.e.} \qquad \forall\, \psi \in E, \forall\, \epsilon > 0, \exists\, N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall\, n \geqslant N, |\langle \varphi_n - \varphi, \psi \rangle| \leqslant \epsilon$$

On rappelle que dans cette partie, <u>toutes les fonctions sont continues</u> car éléments de E.

II.1. On suppose pour cette question uniquement $I = [0, 1]$.

(a) Montrer que la suite (φ_n) d'élément de E, définie par $\varphi_n : x \mapsto x^n$ converge vaguement vers la fonction nulle, notée $[0]$.

(b) A-t-on $(\varphi_n) \xrightarrow{c.s.} [0]$? A-t-on $(\varphi_n) \xrightarrow{c.u.} [0]$? A-t-on $(\varphi_n) \xrightarrow{c.n_1} [0]$?

II.2. Implication entre convergences

(a) Montrer que : si $(\varphi_n) \xrightarrow{c.u.} \varphi$, alors $(\varphi_n) \xrightarrow{c.s.} \varphi$.

(b) Montrer que : si $(\varphi_n) \xrightarrow{c.u.} \varphi$, alors $(\varphi_n) \xrightarrow{c.n_1} \varphi$.

(c) Montrer que si $(\varphi_n) \xrightarrow{c.n_1} \varphi$, alors $(\varphi_n) \xrightarrow{\sim} \varphi$.

(d) On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M_n := \sup\limits_{x\in I}\{|\varphi_n(x) - \varphi(x)|\} = \sup\{|\varphi_n(x) - \varphi(x)|, x \in I\}$.

Montrer que $(\varphi_n) \xrightarrow{c.u.} \varphi$ si et seulement si $(M_n) \to 0$.

On se concentre sur l'étude de la convergence vague.

II.3. Quelques propriétés. On rappelle qu'on se place dans l'espace E des fonctions continues.

(a) Montrer que si (u_n) converge vaguement, alors sa limite vague u est unique.

(b) Montrer que si (u_n) et (v_n) convergent vaguement respectivement vers u et v, et si a et b sont deux réels, alors $(au_n + bv_n)$ converge vaguement vers $au + bv$.

(c) Considérons (u_n) qui converge vaguement vers u sur E et telle que la suite de réels $(\|u_n\|_1)$ soit bornée. Montrer que si (w_n) converge uniformément vers w, alors la suite $(u_n w_n)$ converge vaguement vers uw.

II.4. Contre-exemple de : $\xrightarrow{\sim} \Rightarrow \xrightarrow{c.n_1}$. Pour cette question 4., on reprend $I = [0, 1]$.

(a) Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue et de période 1, on définit la suite (u_n) de E par : $u_n(x) = f(nx)$.

i. Etant donné φ appartenant à E et n entier non nul, montrer que :

$$\int_0^1 u_n(t)\varphi(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 f(y)\theta_n(y)\mathrm{d}y \qquad \text{où} \qquad \theta_n : y \mapsto \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \varphi\left(\frac{y+k}{n}\right)$$

ii. Soit $y \in [0, 1]$, fixé. En reconnaissant une somme de Riemann avec une subdivision pointée à préciser, montrer que $\theta_n(y) \to \displaystyle\int_0^1 \varphi(t)\mathrm{d}t$.

iii. On suppose que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$.
En exploitant une technique comparable à celle qui permet de calculer la vitesse de convergence d'une somme de Riemann, montrer que (θ_n) converge uniformément vers l'application constante $y \mapsto \displaystyle\int_0^1 \varphi(t)$.

(b) On prend maintenant pour la fonction f la fonction définie par $f(x) = \sin(2\pi x)$, et on considère la suite de fonctions (u_n) correspondante.

i. Quelle est la limite vague de cette suite ?

ii. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^n |\sin(2\pi y)|\mathrm{d}y = n \int_0^1 |\sin(2\pi t)|\mathrm{d}t$.

iii. En déduire que (u_n) ne converge pas vers l'application nulle pour la convergence N_1.

III - Famille de polynômes orthonormés

On rappelle que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, on note pour tout réel x, $\tilde{P}(x)$, le nombre obtenu en substituant x à X dans le calcul donné par P.

On sait que si $P \in \mathbb{R}[X]$, alors l'application : $x \mapsto \tilde{P}(x)$ est une fonction continue, donc vecteur de E.

III.1. Montrer que si $\tilde{P}$ est nul dans E, alors P est nul dans $\mathbb{R}_n[X]$. Pour la suite, on fera l'abus $P = \tilde{P}$.
On a donc $\mathbb{R}_n[X] \subset E$ et on confondra les expressions « polynômes » et « fonctions polynomiales ».

III.2. Quel est le nom de la structure algébrique $\mathbb{R}_n[X]$ muni du produit : $\langle P|Q\rangle := \langle \tilde{P}|\tilde{Q}\rangle$?

III.3. Pour cette question uniquement, on choisit $a = -1$ et $b = 1$ dans la définition du produit scalaire.
En exploitant le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, donner une famille (S_0, S_1, S_2) orthonormée tel que pour tout $i \in \{0, 1, 2\}$, $\deg S_i = i$.

III.4. On cherche une autre façon d'obtenir une base orthogonale, en degré échelonné de $\mathbb{R}_n[X]$, et de coefficient dominant égal à 1 (on dit *unitaire*, ici).
On raisonne par analyse-synthèse.

(a) Analyse : Considérons donc une famille $(T_0, T_1, \dots T_n)$ orthogonale, de degré échelonné et unitaire.
On a donc, pour tout entier $k \in [\![0, n]\!]$, $\deg T_k = k$ et $[T_k]_k = 1$.
Montrer que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $T_k \in (\mathbb{R}_{k-1}[X])^\perp$

(b) Montrer que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $XT_{k-1} - T_k \in \mathbb{R}_{k-1}[X]$ et pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\langle XT_{k-1}|P\rangle = \langle T_{k-1}|XP\rangle$.

(c) En déduire

$$T_0 = 1, \quad T_1 = X - \frac{1}{2}(b+a) \quad \text{et pour } k \in [\![2, n]\!], T_k = XT_{k-1} - \frac{\langle T_{k-1}|XT_{k-1}\rangle}{\|T_{k-1}\|^2} T_{k-1} - \frac{\langle T_{k-1}|XT_{k-2}\rangle}{\|T_{k-2}\|^2} T_{k-2} \qquad (\star)$$

(d) Synthèse : Vérifier que la famille (T_i) définie par les relations $(\star)$ est bien définie, en degré échelonné, orthogonale et chaque T_i est unitaire.

III.5. Expression explicite de T_n (par le calcul d'un déterminant).

On fixe $n \in \mathbb{N}$. On note $S_n : x \mapsto \det \begin{pmatrix} \langle 1, 1\rangle & \langle 1, X\rangle & \cdots & \langle 1, X^n\rangle \\ \langle X, 1\rangle & \langle X, X\rangle & \cdots & \langle X, X^n\rangle \\ \vdots & & & \vdots \\ \langle X^{n-1}, 1\rangle & \langle X^{n-1}, X\rangle & \cdots & \langle X^{n-1}, X^n\rangle \\ 1 & x & \cdots & x^n \end{pmatrix}$

(a) Montrer que S_n est une fonction polynomiale. Quel est son degré ?
Exprimer par un calcul de déterminant le coefficient dominant de S_n

(b) Montrer que $S_n \perp X^k$, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$.

(c) En déduire, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, une expression de T_n comme division de deux déterminants.

IV - Racines & Formules de quadrature

On considère donc, jusqu'à la fin du problème, la suite de polynômes $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par $(\star)$.
Cette suite dépend des nombres a et b. On note pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, $\mathcal{Z}(P) = \{z \in \mathbb{R} \mid P(z) = 0\}$, les racines du polynôme P et $\mathcal{Z}_{[a,b]}(P) = \{z \in [a,b] \mid P(z) = 0\} = \mathcal{Z} \cap [a,b]$.
Pour $z \in \mathcal{Z}(P)$, on note $\alpha_P(z)$, la multiplicité de z en tant que racine de P - *noté souvent $\alpha(z)$ si le polynôme P considéré est évident.*

IV.1. On fixe $n \in \mathbb{N}$.

(a) Donner une définition formelle (avec la conjonction de deux calculs) de : $\alpha_P(z) = k$.

(b) Donner un majorant de $\text{Card}\big(\mathcal{Z}_{[a,b]}(T_n)\big)$.

(c) On note $\mathcal{E} = \{z \in \mathcal{Z}_{[a,b]}(T_n) \mid \alpha_{T_n}(z) \equiv 1[2]\}$, ensemble des racines de T_n dans $[a,b]$ et d'ordre de multiplicité impair.
On considère $Q = \displaystyle\prod_{z\in\mathcal{E}}(X - z)$. Montrer que $\langle T_n | Q\rangle \neq 0$

(d) En déduire, par l'absurde, que $\text{Card}(\mathcal{E}) = n$.

(e) Conclure qu'il existe $a_1, a_2, \dots a_n$ tels que :

$$a \leqslant a_1 < a_2 < \cdots a_n \leqslant b \qquad \text{et } T_n = \prod_{i=1}^{n}(X - a_i)$$

IV.2. On fixe de nouveau $n \in \mathbb{N}$.
On note $\phi_i : \mathbb{R}_{n-1}[X] \to \mathbb{R}$, $P \mapsto P(a_i)$. On admet qu'il s'agit d'une une forme linéaire donc d'un vecteur de $(\mathbb{R}_{n-1}[X])^*$.

(a) Montrer que $\Phi : \mathbb{R}_{n-1}[X] \to \mathbb{R}$, $P \mapsto \displaystyle\int_a^b P(t)\mathrm{d}t$ est une forme linéaire, donc élément de $(\mathbb{R}_{n-1}[X])^*$

(b) Montrer que $(\phi_1, \phi_2, \dots \phi_n)$ est une base de $(\mathbb{R}_{n-1}[X])^*$

(c) En déduire qu'il existe $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall\ P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \qquad \int_a^b P(t)\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k P(a_k)$$

(d) Evaluer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k$

IV.3. Soit $S \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$. On note Q et R, le quotient et le reste respectivement de la division euclidienne de S par T_n.

(a) Montrer que, pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $S(a_i) = R(a_i)$

(b) Montrer que $\displaystyle\int_a^b S(t)\mathrm{d}t = \int_a^b R(t)\mathrm{d}t$

(c) En déduire,

$$\forall\ S \in \mathbb{R}_{2n-1}[X], \qquad \int_a^b S(t)\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k S(a_k)$$

IV.4. On note, pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $L_i = \displaystyle\prod_{k\neq i} \frac{X - a_k}{a_i - a_k}$.

(a) Montrer que, pour tout $i \in \mathbb{N}_n$,

$$\lambda_i = \int_a^b L_i(t)\mathrm{d}t$$

(b) Montrer que, pour tout $i \in \mathbb{N}_n$,

$$\lambda_i = \int_a^b L_i^2(t)\mathrm{d}t$$

(c) En déduire que pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $\lambda_i > 0$.

IV.5. On relâche le caractère fixé de n et on note, pour $n \in \mathbb{N}$, et $P \in \mathbb{R}[X]$, $\ell_n(P) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k P(a_k)$,

(où $(a_1, \dots a_n)$ et $(\lambda_1, \dots \lambda_n)$ sont définis comme précédemment).

Montrer que $\ell_n(P)$ converge, quelle est sa limite ?

Correction

Problème - Convergence vague & Polynômes orthogonaux

I - Résultats du cours. Inégalités

I.1. Donner la définition d'une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$.

Voir le cours.
f est continue par morceaux sur $[a, b]$ si il existe :
— $n \in \mathbb{N}$
— $x_0 = a < x_1 < \cdots x_{n-1} < x_n = b$, une subdivision de $[a, b]$
telle que :
pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $f_{|]x_{i-1},x_i[}$ soit continue et prolongeable par continuité en x_{i-1}^+ (i.e. supérieurement) et en x_i^- (i.e. inférieurement) ou autrement écrit si $\lim\limits_{x\to x_{i-1}^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to x_i^-} f(x)$ existent. /2

I.2. Montrer que si f est continue par morceaux sur $[a, b]$, alors f est bornée sur $[a, b]$.
La réciproque est-elle vraie ? Si oui, prouver le ; sinon, donner un contre exemple.

Question de cours.

En gardant les notations précédentes, on note $\tilde{f}_i : [x_{i-1}, x_i] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \begin{cases} \lim\limits_{t\to x_{i-1}^+} f(t) & \text{si } t = x_{i-1} \\ f(t) & \text{si } t \in]x_{i-1}, x_i[\\ \lim\limits_{t\to x_i^-} f(t) & \text{si } t = x_i \end{cases}$

Alors pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $\tilde{f}_i$ est continue sur le compact $[x_{i-1}, x_i]$ donc bornée.
On note $M_i = \sup\limits_{[x_{i-1},x_i]} |\tilde{f}_i|$. Puis $M = \max(M_1, M_2, \ldots M_n, |f(x_0)|, |f(x_1)|, \ldots |f(x_n)|)$.
Alors pour tout $t \in [a, b]$,
ou bien $\exists\, i \in \mathbb{N}_n$ tel que $t \in]x_{i-1}, x_i[$ et donc $|f(t)| \leqslant M_i \leqslant M$ ou bien $\exists\, i \in [\![0, n]\!]$ tel que $t = x_i$ et donc $|f(t)| \leqslant |f(x_i)| \leqslant M$ /2

$$\boxed{\text{Donc } f \text{ est bornée (par } M).}$$

La réciproque est fausse. La fonction $\chi : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \end{cases}$ (indicatrice que $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$) est bornée mais non continue par morceaux. /2

I.3. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ n'est pas un produit scalaire sur l'espace des fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$.

Soit $f = \mathbf{1}_{\{\frac{a+b}{2}\}}$, indicatrice du singleton $\dfrac{a+b}{2}$. f n'est pas nulle sur $[a, b]$.
Et pourtant

$$\langle f, f \rangle = \int_a^b f(t)^2 \mathrm{d}t = \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(t)\mathrm{d}t + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(t)\mathrm{d}t = 0 + 0 = 0$$

Donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ n'est pas défini. /1,5

$$\boxed{\langle \cdot, \cdot \rangle \text{ n'est pas un produit scalaire sur l'espace des fonctions continues par morceaux sur } [a, b].}$$

I.4. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur l'espace des fonctions continues sur $[a, b]$, noté E.
On note $\| \cdot \|_2$, la norme associée, i.e. pour tout $f \in E$, $\|f\|_2 = \sqrt{\displaystyle\int_a^b |f(t)|^2 \mathrm{d}t}$.

Voir le cours, de nouveau.
Notons que :

i) Il s'agit d'une forme : $\forall\ f, g \in E,\ \langle f, g\rangle \in \mathbb{R}$

ii) Elle est symétrique : $\forall\ f, g \in E,\ \langle f, g\rangle = \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t = \langle f, g\rangle$

iii) Elle est bilinéaire, car linéaire à gauche :

$$\forall\ f_1, f_2, g \in E, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \quad \langle \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2, g\rangle = \int_a^b \lambda_1 f_1(t)g(t) + \lambda_2 f(t)g(t) = \lambda_1\langle f_1, g\rangle + \lambda_2\langle f_2, g\rangle$$

et symétrique

iv) Elle est positive : $\forall\ f \in E,\ \langle f, f\rangle = \displaystyle\int_a^b f^2(t)\mathrm{d}t \geqslant 0$ par positivité de l'intégration

v) Elle est définie : soit $f \in E$ tel que $\langle f, f\rangle = \displaystyle\int_a^b f^2(t)\mathrm{d}t = 0$.
Alors comme f^2 est continue et positive, nécessairement pour tout $t \in [a, b]$, $f^2(t) = 0$, donc $f = [0]_{[a,b]}$. /2

$$\boxed{\langle\cdot,\cdot\rangle \text{ est un produit scalaire sur l'espace } E.}$$

I.5. Soient $f, g \in E$. Quelle inégalité a-t-on entre $\langle f, g\rangle$, $\|f^2\|_1$ et $\|g^2\|_1$? (sans démonstration)
Quelle inégalité simple a-t-on entre $\langle f, g\rangle$, $\|f\|_\infty$ et $\|g\|_\infty$ et un facteur multiplicatif bien choisi ?

Puisqu'il s'agit d'un produit scalaire, on a l'inégalité de Cauchy-Schwarz : /1,5

$$\boxed{\forall\ f, g \in E, \quad |\langle f, g\rangle| \leqslant \|f\|_2\|g\|_2 = \sqrt{\int_a^b f^2(t)\mathrm{d}t}\sqrt{\int_a^b g^2(t)\mathrm{d}t} = \sqrt{\|f\|_2}\sqrt{\|g\|_2}}$$

Par ailleurs, si f est continue sur $[a, b]$, $\|f\|_\infty$ existe
et pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) \leqslant \|f\|_\infty$. Par positivité de l'intégration : /1

$$\boxed{|\langle f, g\rangle| \leqslant \int_a^b |f(t)| \times |g(t)|\mathrm{d}t \leqslant \|f\|_\infty \int_a^b |g|\mathrm{d}t = \|f\|_\infty\|g\|_1}$$

II - Convergences variées et implications entre elles

On s'intéresse maintenant à des suites de fonctions (φ_n), d'éléments de E. On définit trois types de convergence :

— La convergence simple de la suite (φ_n) vers φ sur l'intervalle I, noté $(\varphi_n) \xrightarrow{c.s.} \varphi$ si :

$$\forall\ x \in I, \quad (\varphi_n(x)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \varphi(x) \qquad \text{i.e.} \qquad \forall\ x \in I, \forall\ \epsilon > 0, \exists\ N_x \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall\ n \geqslant N_x, |\varphi_n(x) - \varphi(x)| \leqslant \epsilon$$

— La convergence uniforme de la suite (φ_n) vers φ sur l'intervalle I, noté $(\varphi_n) \xrightarrow{c.u.} \varphi$ si :

$$\forall\ \epsilon > 0, \exists\ N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall\ n \geqslant N, \forall\ x \in I, |\varphi_n(x) - \varphi(x)| \leqslant \epsilon$$

— La convergence N_1 de la suite (φ_n) vers φ sur l'intervalle I, noté $(\varphi_n) \xrightarrow{c.n_1} \varphi$ si :

$$\|\varphi_n - \varphi\|_1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \text{i.e.} \qquad \forall\ \epsilon > 0, \exists\ N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall\ n \geqslant N, \int_I |\varphi_n(t) - \varphi(t)|\mathrm{d}t \leqslant \epsilon$$

— La convergence vague de la suite (φ_n) vers φ sur l'intervalle I, noté $(\varphi_n) \xrightarrow{\sim} \varphi$ si :

$$\forall\ \psi \in E, \langle \varphi_n, \psi\rangle \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \langle \varphi, \psi\rangle \qquad \text{i.e.} \qquad \forall\ \psi \in E, \forall\ \epsilon > 0, \exists\ N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall\ n \geqslant N, |\langle \varphi_n - \varphi, \psi\rangle| \leqslant \epsilon$$

On rappelle que dans cette partie, <u>toutes les fonctions sont continues</u> car éléments de E.

II.1. Etude d'un exemple. On suppose pour cette question uniquement $I = [0, 1]$.

(a) Montrer que la suite (φ_n) d'élément de E, définie par $\varphi_n : x \mapsto x^n$ converge vaguement vers la fonction nulle, notée $[0]$.

Dans ces démonstrations, on notera ITI (inégalité triangulaire intégrale), le fait que $\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t$.

Soit $\psi \in E$, une fonction continue définie sur $[0,1]$, elle est donc bornée. On note $M = \sup\limits_{[0,1]} |\psi|$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\left|\int_0^1 \varphi_n(x)\psi(x)\mathrm{d}x\right| \underbrace{\leqslant}_{ITI + x^n > 0} \int_0^1 x^n|\psi(x)|\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^n M\mathrm{d}x = \left[\frac{Mx^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{M}{n+1}$$

Par encadrement, $\left(\int_0^1 \varphi_n(x)\psi(x)\mathrm{d}x\right)_{n\to\mathbb{N}}$ converge vers $0 = \int_0^1 [0]\psi(t)\mathrm{d}t$. Ceci étant vrai, pour toute fonction ψ continue, /1,5

$$\boxed{(\varphi_n) \xrightarrow{\sim} [0].}$$

(b) A-t-on $(\varphi_n) \xrightarrow{c.s.} [0]$? A-t-on $(\varphi_n) \xrightarrow{c.u.} [0]$? A-t-on $(\varphi_n) \xrightarrow{c.n_1} [0]$?

- Pour $x = 1$, $\varphi_n(x) = \varphi_n(1) = 1 \to 1 \neq [0](1)$.
  Donc il existe $x \in [0,1]$ tel que $\varphi_n(x) \not\to [0](x)$, donc on n'a pas $(\varphi_n) \xrightarrow{c.s.} [0]$
- La convergence uniforme implique la convergence simple puisque : $\exists\ N \mid \forall\ x \ldots \Longrightarrow \forall\ x, \exists\ N_x = N \ldots$.
  Donc si on n'a pas la convergence simple, il ne peut y avoir de convergence uniforme : on n'a pas $(\varphi_n) \xrightarrow{c.u.} [0]$
- Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^1 |\varphi_n(x) - [0](x)|\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1} \to 0$$

  Donc on a : $(\varphi_n) \xrightarrow{c.n_1} [0]$. /2,5

$$\boxed{\text{Bilan : on n'a ni } (\varphi_n) \xrightarrow{c.s.} [0] \text{ ni } (\varphi_n) \xrightarrow{c.u.} [0]\text{, mais on a } (\varphi_n) \xrightarrow{c.n1} [0]\ .}$$

II.2. Implication entre convergences

(a) Montrer que : si $(\varphi_n) \xrightarrow{c.u.} \varphi$, alors $(\varphi_n) \xrightarrow{c.s.} \varphi$.

Soit $\epsilon > 0$.

Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\ x \in I$, $|\varphi_n(x) - \varphi(x)| \leqslant \epsilon$.

Alors, pour tout $x \in I$, il existe $N_x (:= N)$ tel que $|\varphi_n(x) - \varphi(x)| \leqslant \epsilon$ /1,5

$$\boxed{\text{si } (\varphi_n) \xrightarrow{c.u.} \varphi\text{, alors } (\varphi_n) \xrightarrow{c.s.} \varphi.}$$

(b) Montrer que : si $(\varphi_n) \xrightarrow{c.u.} \varphi$, alors $(\varphi_n) \xrightarrow{c.n_1} \varphi$.

On rappelle que $I = [a - b]$, donc $\int_I |1|\mathrm{d}t = b - a$.

Soit $\epsilon > 0$.

Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\ x \in I$, $|\varphi_n(x) - \varphi(x)| \leqslant \dfrac{\epsilon}{b-a}$.

$$0 \leqslant \int_I |\varphi_n(x) - \varphi(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \int_I \frac{\epsilon}{b-a}\mathrm{d}x = \epsilon$$

/1,5

$$\boxed{(\varphi_n) \xrightarrow{c.u.} \varphi\text{, alors } (\varphi_n) \xrightarrow{c.n_1} \varphi.}$$

(c) Montrer que si $(\varphi_n) \xrightarrow{c.n_1} \varphi$, alors $(\varphi_n) \xrightarrow{\sim} \varphi$.

Soit $\psi \in E$. ψ est bornée sur I, car ψ est continue. Notons $M = \sup_I |\psi|$.
Soit $\epsilon > 0$.
Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\, x \in I$, $\|\varphi_n - \varphi\|_1 = \int_I |\varphi_n(x) - \varphi(x)| \leqslant \frac{\epsilon}{M}$ car $(\varphi_n) \xrightarrow{c.n_1} \varphi$.
D'après la seconde inégalité en I.5.

$$\left|\int_I (\varphi_n - \varphi)(x)\psi(x)\mathrm{d}x\right| = |\langle \varphi_n - \varphi, \psi\rangle| \leqslant \|\varphi_n - \varphi\|_1 \|\psi\|_\infty \leqslant \epsilon$$

/2

$$\boxed{\text{Donc } (\varphi_n) \xrightarrow{c.n_1} \varphi, \text{ alors } (\varphi_n) \xrightarrow{\sim} \varphi.}$$

(d) On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M_n := \sup_{x\in I}\{|\varphi_n(x) - \varphi(x)|\} = \sup\{|\varphi_n(x) - \varphi(x)|, x \in I\}$.
Montrer que $(\varphi_n) \xrightarrow{c.u.} \varphi$ si et seulement si $(M_n) \to 0$.

M_n est un majorant de $\{|\varphi_n(x) - \varphi(x)|\}$. Donc $M_n \leqslant \epsilon \Rightarrow \forall\, x \in I$, $|\varphi_n(x) - \varphi(x)| \leqslant \epsilon$.
Par ailleurs, c'est le plus petit des majorants, donc $\forall\, x \in I$, $|\varphi_n(x) - \varphi(x)| \leqslant \epsilon \Rightarrow M_n \leqslant \epsilon$.
Il y a donc une équivalence qui permet d'affirmer : /1

$$\boxed{(\varphi_n) \xrightarrow{c.u.} \varphi \text{ si et seulement } \forall\, x \in I,\ |\varphi_n(x) - \varphi(x)| \to 0 \text{ si et seulement si } (M_n := \sup_{x\in I}\{|\varphi_n(x) - \varphi(x)|\}) \to 0.}$$

On se concentre sur l'étude de la convergence vague.

II.3. Quelques propriétés. On rappelle qu'on se place dans l'espace E des fonctions continues.

(a) Montrer que si (u_n) converge vaguement, alors sa limite vague u est unique.

Supposons que (u_n) (suite de fonctions) converge vers les fonctions continues u et v (puisque dans E).
Alors, en notant $\psi = u - v$,

$$0 \leqslant \int_I (u-v)^2(t)\mathrm{d}t = \int_I (u - u_n + u_n - v)(t) \times (u-v)(t) = \int_I (u-u_n)(t) \times \psi(t)\mathrm{d}t + \int_I (u_n - v)(t) \times \psi(t)\mathrm{d}t$$

Soit $\epsilon > 0$. Il existe N_1 et $N_2 \in \mathbb{N}$, tel que $\left|\int_I (u-u_n)(t)\psi(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{\epsilon}{2}$ et $\left|\int_I (u_n - v)(t)\psi(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{\epsilon}{2}$
car $(u_n) \xrightarrow{\sim} u$ et $(u_n) \xrightarrow{\sim} v$.
Donc pour tout $n \geqslant \max(N_1, N_2)$

$$0 \leqslant \int_I (u-v)^2(t)\mathrm{d}t \leqslant \epsilon$$

Ceci étant vrai, pour tout ϵ, en passant à la borne inférieure : $\int_I (u-v)^2(t)\mathrm{d}t = 0$.
Ainsi, comme $(u-v)^2$ est une application continue et positive : $\forall\, t \in I$, $(u-v)^2(t) = 0$, i.e. $u(t) = v(t)$. /2,5

$$\boxed{\text{si } (u_n) \text{ converge vaguement, alors sa limite vague } u \text{ est unique.}}$$

(b) Montrer que si (u_n) et (v_n) convergent vaguement respectivement vers u et v, et si a et b sont deux réels, alors $(au_n + bv_n)$ converge vaguement vers $au + bv$.

Soit $\psi \in E$. Par linéarité de l'intégrale (deux fois) et linéarité du passage à la limite :

$$\int_I (au_n + bv_n)(x)\psi(x)\mathrm{d}x = a\int_I u(x)\psi(x)\mathrm{d}x + b\int_I v_n(x)\psi(x)\mathrm{d}x \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a\int_I u\psi + b\int_I v\psi = \int_I (au+bv)\psi$$

/1,5

$$\boxed{\text{Donc : si } (u_n) \xrightarrow{\sim} u \text{ et } (v_n) \xrightarrow{\sim} v \text{ et si } a \text{ et } b \in \mathbb{R}, \text{ alors } (au_n + bv_n) \text{ converge vaguement vers } au+bv.}$$

(c) Considérons (u_n) qui converge vaguement vers u sur E et telle que la suite de réels $(\|u_n\|_1)$ soit bornée. Montrer que si (w_n) converge uniformément vers w, alors la suite $(u_n w_n)$ converge vaguement vers uw.

Notons M, un majorant de $(\|u_n\|_1)_{n\in\mathbb{N}}$, donc $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_I |u_n(x)|\mathrm{d}x \leqslant M$.
Soit $\psi \in E$, $\quad \psi$ est continue sur le compact $[0,1]$, donc il existe M' tel que $\forall\, x \in [0,1]$, $|\psi(x)| \leqslant M'$

$$\left|\int_I (u_n w_n)(x) \times \psi(x)\mathrm{d}x - \int_I (uw)(x)\psi(x)\mathrm{d}x\right| = \left|\int_I (u_n(x)w_n(x) - u(x)w(x))\psi(x)\mathrm{d}x\right|$$

$$\begin{aligned}
&= \left|\int_I (u_n(x)w_n(x) - u_n(x)w(x) + u_n(x)w(x) - u(x)w(x))\psi(x)\mathrm{d}x\right| \\
&= \left|\int_I (u_n(x)w_n(x) - u_n(x)w(x))\psi(x)\mathrm{d}x + \left(\int_I u_n(x)w(x)\psi(x)\mathrm{d}x - \int_I u(x)w(x)\psi(x)\mathrm{d}x\right)\right| \\
&\leqslant \left|\int_I (u_n(x)w_n(x) - u_n(x)w(x))\psi(x)\mathrm{d}x\right| + \left|\int_I u_n(x)w(x)\psi(x)\mathrm{d}x - \int_I u(x)w(x)\psi(x)\mathrm{d}x\right| \\
&\leqslant \int_I |u_n||w_n - w||\psi| + \left|\int_I u_n w\psi - \int_I uw\psi\right|
\end{aligned}$$

par linéarités et inégalités triangulaires.
Fixons $\epsilon > 0$.
On sait que (w_n) converge uniformément vers w.

$$\exists\, N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall\, n \geqslant N, \forall\, x \in I, |w_n(x) - w(x)| \leqslant \frac{\epsilon}{2M'M}$$

On a donc, pour $n \geqslant N$ (linéarité) :

$$\int_I |u_n||w_n - w||\psi| \leqslant M' \frac{\epsilon}{2M'M} \int |u_n| \leqslant \frac{\epsilon}{2M} M = \frac{\epsilon}{2}$$

Par ailleurs, (u_n) converge vaguement vers u, donc pour toute fonction $\theta = w\psi$ continue :

$$\exists\, N' \text{ tel que } \forall\, n \geqslant N' \left|\int_I u_n\theta - \int_I u\theta\right| \leqslant \frac{\epsilon}{2}$$

Ainsi, pour $n \geqslant \max(N, N')$:

$$\left|\int_I (u_n w_n)(x) \times \psi(x)\mathrm{d}x - \int_I (uw)(x)\psi(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \epsilon$$

/3

$$\boxed{\text{Si } (u_n) \overset{\sim}{\to} u,\ (\|u_n\|_1) \text{ est bornée et } (w_n) \overset{c.u.}{\to} w, \text{ alors } (u_n w_n) \text{ converge vaguement vers } uw.}$$

II.4. Contre-exemple de : $\overset{\sim}{\to} \Rightarrow \overset{c.n_1}{\to}$. Pour cette question 4., on reprend $I = [0,1]$.

(a) Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue et de période 1, on définit la suite (u_n) de E par : $u_n(x) = f(nx)$.

i. Etant donné φ appartenant à E et n entier non nul, montrer que :

$$\int_0^1 u_n(t)\varphi(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 f(y)\theta_n(y)\mathrm{d}y \qquad \text{où} \qquad \theta_n : y \mapsto \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \varphi\left(\frac{y+k}{n}\right)$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi \in E$.
On fait le changement de variable linéaire $u = nt$, et on applique la relation de Chasles

$$\int_0^1 u_n(t)\varphi(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 f(nt)\varphi(t)\mathrm{d}t = \int_0^n f(u)\varphi\left(\frac{u}{n}\right)\frac{\mathrm{d}u}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{\int_k^{k+1} f(u)\varphi\left(\frac{u}{n}\right)\mathrm{d}u}_{:=I_k}$$

Puis, comme f est 1-périodique pour tout entier k, $f(y+k) = f(y)$,
et donc avec le changement de variable $y = u - k$ dans l'intégrale I_k :

$$\int_0^1 u_n(t)\varphi(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^1 f(y+k)\varphi\left(\frac{y+k}{n}\right)\mathrm{d}y = \int_0^1 \left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(y)\varphi\left(\frac{y+k}{n}\right)\right)\mathrm{d}y$$

Ainsi, par linéarité de Σ : /2

$$\boxed{\int_0^1 u_n(t)\varphi(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 f(y)\theta_n(y)\mathrm{d}y \qquad \text{où } \theta_n : y \mapsto \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\varphi\left(\frac{y+k}{n}\right)}$$

---

ii. Soit $y \in [0,1]$, fixé. En reconnaissant une somme de Riemann avec une subdivision pointée à préciser, montrer que $\theta_n(y) \to \displaystyle\int_0^1 \varphi(t)\mathrm{d}t$.

Soit $y \in [0,1]$, fixé. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0,n]\!]$, $x_k = \dfrac{k}{n}$ et $t_k = x_k + \dfrac{y}{n}$.

On alors $x_k \leqslant t_k \leqslant x_k + \dfrac{1}{n} = x_{k+1}$.

Et donc $\sigma_p^n = \big(([x_{k-1}, x_k], t_k), k \in \mathbb{N}_n\big)$ est une subdivision pointée de $[0,1]$ à pas constant.

Par ailleurs, $\varphi \in E$ donc est continue donc est Riemann-intégrable sur $[0,1]$.

donc les sommes de Riemann à pas constant converge vers $\displaystyle\int_{[0,1]} \varphi$.

$$S(\varphi, \sigma_p^n) \longrightarrow \int_0^1 \varphi$$

Et comme, $S(\varphi, \sigma_p^n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1})\varphi(t_k) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\varphi\left(\frac{y+k}{n}\right) = \theta_n(y)$, /2

$$\boxed{\theta_n(y) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \varphi(t).}$$

Notons que le résultat est indépendant de y !!

---

iii. On suppose que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.
En exploitant une technique comparable à celle qui permet de calculer la vitesse de convergence d'une somme de Riemann, montrer que (θ_n) converge uniformément vers l'application constante $y \mapsto \displaystyle\int_0^1 \varphi(t)$.

La fonction φ est continue sur $[0,1]$. Notons $\Phi : y \mapsto \displaystyle\int_0^y \varphi(t)\mathrm{d}t$, la primitive de φ qui s'annule en 0.

Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.

Pour tout entier n, (en gardant la notation, pour y fixé $t_k = x_k + \dfrac{y}{n}$), par téléscopage :

$$\begin{aligned}
\theta_n(y) - \int_0^1 \varphi(t) &= \sum_{k=1}^{n}(x_k - t_k + t_k - x_{k-1})\Phi'(t_k) - (\Phi(x_k) - \Phi(t_k) + \Phi(t_k) - \Phi(x_{k-1})) \\
&= \sum_{k=1}^{n}\big((x_k - t_k)\Phi'(t_k) - (\Phi(x_k) - \Phi(t_k))\big) + \big((t_k - x_{k-1})\Phi'(t_k) - (\Phi(t_k) - \Phi(x_{k-1}))\big)
\end{aligned}$$

Φ étant de classe $\mathcal{C}^2$, car φ est de classe $\mathcal{C}^1$,
la formule de Taylor reste-intégrale, donne :

$$\Phi(x_k) = \Phi(t_k) + (x_k - t_k)\Phi'(t_k) + \int_{t_k}^{x_k}(x_k - t)\Phi^{(2)}(t)\mathrm{d}t$$

Donc, comme le nombre $x_k - t > 0$ et $\Phi^{(2)}$ est continue sur $[t_k, x_k]$,
les bornes étant atteintes d'après le théorème de Weierstrass (en a_k et b_k) :

$$\Phi(x_k)-\Phi(t_k)-(x_k-t_k)\Phi'(t_k) = \int_{t_k}^{x_k}(x_k-t)\Phi^{(2)}(t)\mathrm{d}t \leqslant \sup_{[t_k,x_k]}\times\Phi^{(2)}\int_{t_k}^{x_k}(x_k-t)\mathrm{d}t = \Phi^{(2)}(b_k)\times\frac{(x_k-t_k)^2}{2}$$

De même

$$\Phi(x_k) - \Phi(t_k) - (x_k - t_k)\Phi'(t_k) \geqslant \Phi^{(2)}(a_k) \times \frac{(x_k-t_k)^2}{2}$$

Enfin, comme $\Phi^{(2)}$ est continue, sur $[t_k, x_k]$ à valeurs dans $[\Phi^{(2)}(a_k), \Phi^{(2)}(b_k)]$,
le théorème des valeurs intermédiaires assure l'existence de $c_k \in [t_k, x_k]$ tel que

$$\Phi(x_k) - \Phi(t_k) - (x_k - t_k)\Phi'(t_k) = \frac{(x_k-t_k)^2}{2}\Phi^{(2)}(c_k)$$

De même, il existe $d_k \in [x_{k-1}, t_k]$ tel que

$$\Phi(t_k) - \Phi(x_{k-1}) - (t_k - x_{k-1})\Phi'(t_k) = \frac{(t_k-x_{k-1})^2}{2}\Phi^{(2)}(d_k)$$

Notons à ce stade, que y a été fixé initialement (mais nous chercherons une majoration uniforme en y),
$x_k = \dfrac{k}{n}$ *ne dépend pas de y, alors que t_k, et donc c_k et d_k dépendent de y.*

Le calcul initial devient donc, en majorant en valeur absolue,

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 \varphi(t) - \theta_n(y)\right| &= \left|\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{(x_k-t_k)^2}{2}\Phi^{(2)}(c_k) + \frac{(t_k-x_{k-1})^2}{2}\Phi^{(2)}(d_k)\right)\right| \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{(x_k-t_k)^2}{2}\left|\Phi^{(2)}(c_k)\right| + \frac{(t_k-x_{k-1})^2}{2}\left|\Phi^{(2)}(d_k)\right|\right)\end{aligned}$$

Puisque $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$ et que $x_k - x_{k-1} = \dfrac{1}{n}$, on a donc

$$\left|\int_0^1 \varphi(t) - \theta_n(y)\right| \leqslant \frac{1}{2n} \times \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left|\Phi^{(2)}(c_k)\right| + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left|\Phi^{(2)}(d_k)\right|\right)$$

Or $c_k \in [t_k, x_k] \subset [x_{k-1}, x_k]$ et $d_k \in [x_{k-1}, t_k] \subset [x_{k-1}, x_k]$, on peut majorer par $M_2 := \sup\limits_{[0,1]} |\Phi^{(2)}|$,
puisque, par hypothèse, φ est de classe $\mathcal{C}^1$sur $[0, 1]$, donc Φ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, 1]$.
ainsi $\Phi^{(2)}$ et donc $|\Phi^{(2)}$ sont continues sur $[0, 1]$. Ainsi

$$\left|\int_0^1 \varphi(t) - \theta_n(y)\right| \leqslant \frac{1}{2n} \times \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M_2 + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M_2\right) \leqslant \frac{M_2}{n}$$

Soit $\epsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{M_2}{n} \leqslant \epsilon$ Cette majoration est indépendante de y, donc elle est uniforme : /4

$$\forall\ \epsilon, \exists\ N \in \mathbb{N},\ \text{tel que}\ \forall\ n \geqslant N \forall\ y \in [0,1], \qquad \left|\int_0^1 \varphi(t) - \theta_n(y)\right| \leqslant \epsilon$$

$$\boxed{\text{Ainsi } \theta_n \xrightarrow{c.u.} \int_0^1 \varphi(t) \text{ (application constante).}}$$

Notons qu'avec un peu plus d'information sur $\Phi^{(2)}$, on aurait pu calculer la vitesse de convergence...

(b) On prend maintenant pour la fonction f la fonction définie par $f(x) = \sin(2\pi x)$,
et on considère la suite de fonctions (u_n) correspondante.

i. Quelle est la limite vague de cette suite ?

La fonction f est 1-périodique : $f(x+1) = \sin(2\pi(x+1)) = \sin(2\pi x + 2\pi) = \sin(2\pi x) = f(x)$. f est continue
Soit $\varphi \in E$. D'après la question 3. :

$$\int_0^1 u_n(t)\varphi(t) = \int_0^1 f(y)\theta_n(y)\mathrm{d}y$$

Or θ_n converge uniformément vers la fonction constante $y \mapsto \displaystyle\int_0^1 \varphi(t)\mathrm{d}t := I$.
Puis f est continue sur $[0,1]$ donc bornée et donc $f\theta_n \overset{c.u.}{\to} f \times I$.
La convergence uniforme impliquant la convergence en norme n_1 : $f\theta_n \overset{c.n_1}{\to} f \times I$. Donc

$$\int_0^1 u_n(t)\varphi(t) = \int_0^1 f(y)\theta_n(y)\mathrm{d}y \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f(y) \times I\mathrm{d}y = \underbrace{\int_0^1 f(y)\mathrm{d}y}_{:=J} \int_0^1 \varphi(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 J\varphi(t)\mathrm{d}t$$

Notons que $J = \displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 \sin(2\pi t)\mathrm{d}t = \left[\frac{-1}{2\pi}\cos(2\pi t)\right]_0^1 = 0$ /3

$$\boxed{u_n \text{ converge vaguement vers la fonction constante } u : t \mapsto J = 0.}$$

---

ii. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, \displaystyle\int_0^n |\sin(2\pi y)|\mathrm{d}y = n\int_0^1 |\sin(2\pi t)|\mathrm{d}t$.

Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}$, en exploitant la relation de Chasles, puis un changement de variable $u = y - k$:

$$\int_0^n |\sin(2\pi y)|\mathrm{d}y = \sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1} |\sin(2\pi y)|\mathrm{d}y = \sum_{k=0}^{n}\int_0^1 |\sin(2\pi u + 2\pi k)|\mathrm{d}u$$

On retrouve n termes identiques égaux à $\displaystyle\int_0^1 |\sin(2\pi u)\mathrm{d}u$ /2

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}, \int_0^n |\sin(2\pi y)|\mathrm{d}y = n\int_0^1 |\sin(2\pi t)|\mathrm{d}t.}$$

---

iii. En déduire que (u_n) ne converge pas vers l'application nulle pour la convergence N_1.

$u_n : x \mapsto f(nx) = \sin(2\pi nx)$.
Faisons le changement de variable $y = nx$

$$\int_0^1 |u_n(x)|\,\mathrm{d}x = \int_0^n |\sin(2\pi y)|\frac{\mathrm{d}y}{n} = \int_0^1 |\sin(2\pi t)|\mathrm{d}t$$

d'après la question précédente.
Ainsi, $N_1(u_n - 0) = N_1(u_n) \not\to 0$ /2

$$\boxed{\text{Donc } (u_n) \text{ ne converge pas vers 0, au sens de la norme } N_1.}$$

III - Famille de polynômes orthonormés

On rappelle que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, on note pour tout réel x, $\tilde{P}(x)$, le nombre obtenu en substituant x à X dans le calcul donné par P.
On sait que si $P \in \mathbb{R}[X]$, alors l'application : $x \mapsto \tilde{P}(x)$ est une fonction continue, donc vecteur de E.

III.1. Montrer que si $\tilde{P}$ est nul dans E, alors P est nul dans $\mathbb{R}_n[X]$.

Si $\tilde{P}$ est nul dans E, cela signifie que pour tout $t \in [a,b]$, $P(t) = 0$.
Donc P admet une infinité de racines (tous les réels entre a et b). /1

$$\boxed{\text{Donc } P = 0\text{, le polynôme nul.}}$$

III.2. Pour la suite, on fera l'abus $P = \tilde{P}$.
On a donc $\mathbb{R}_n[X] \subset E$ et on confondra les expressions « polynômes » et « fonctions polynomiales ».

III.3. Quel est le nom de la structure algébrique $\mathbb{R}_n[X]$ muni du produit : $\langle P|Q\rangle := \langle \tilde{P}|\tilde{Q}\rangle$?

Il s'agit d'un espace vectoriel de dimension finie, muni d'un produit scalaire
$(\langle P|P\rangle = 0 \Rightarrow \langle \tilde{P}|\tilde{P}\rangle \Rightarrow \tilde{P} = 0 \Rightarrow P = 0)$. /1

$$\boxed{\text{Donc } \mathbb{R}_n[X] \text{ est un espace euclidien (de dimension } n+1).}$$

III.4. Pour cette question uniquement, on choisit $a = -1$ et $b = 1$ dans la définition du produit scalaire.
En exploitant le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, donner une famille (S_0, S_1, S_2) orthonormée tel que pour tout $i \in \{0,1,2\}$, $\deg S_i = i$.

Notons que pour tout $a, b \in \mathbb{N}$, $\langle X^a, X^b\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} t^{a+b}\mathrm{d}t = \frac{t^{a+b+1}}{a+b+1} = \begin{cases} \dfrac{2}{a+b+1} & \text{si } a+b \equiv 0[2] \\ 0 & \text{si } a+b \equiv 1[2] \end{cases}$.

On applique le procédé à partir de la famille libre $(1, X, X^2)$ base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
A chaque étape note $R_i = X^i - \displaystyle\sum_{j=0}^{i-1} \langle X^i, S_j\rangle S_j$, orthogonal à $S_0, \dots S_{i-1}$, puis $S_i = \dfrac{1}{\|R_i\|} R_i$, normé.

- $R_0 = X^0 = 1$ et $S_0 = \dfrac{1}{\|R_0\|}1 = \dfrac{1}{\sqrt{\langle X^0, X^0\rangle}}1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
- $R_1 = X - \langle X, S_0\rangle S_0 = X - \dfrac{1}{\sqrt{2}^2}\underbrace{\langle X^1, X^0\rangle}_{=0} 1 = X$.

  Puis $\|R_1\|^2 = \langle X, X\rangle = \dfrac{2}{3}$, donc $S_1 = \dfrac{1}{\sqrt{\frac{2}{3}}}X = \dfrac{\sqrt{6}}{2}X$
- $R_2 = X^2 - \langle X^2, S_0\rangle S_0 - \langle X^2, S_1\rangle S_1 = X^2 - \dfrac{1}{2}\langle X^2, 1\rangle 1 - \dfrac{3}{2}\underbrace{\langle X^2, X^1\rangle}_{=0} X = X^2 - \dfrac{1}{2}\dfrac{2}{3} = X^2 - \dfrac{1}{3}$.

  Puis $\|R_2\|^2 = \langle X^2 - \dfrac{1}{3}, X^2 - \dfrac{1}{3}\rangle = \langle X^2, X^2\rangle - 2\dfrac{1}{3}\langle X^2, 1\rangle + \dfrac{1}{9}\langle 1, 1\rangle = \dfrac{2}{5} - \dfrac{4}{9} + \dfrac{2}{9} = \dfrac{8}{45}$.

  Et donc $S_2 = \dfrac{1}{\|R_2\|}R_2 = \dfrac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}(X^2 - \dfrac{1}{3}) = \dfrac{3\sqrt{10}}{4}X^2 - \dfrac{\sqrt{10}}{4}$ /3

$$\boxed{(S_0, S_1, S_2) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}X, \frac{3\sqrt{10}}{4}X^2 - \frac{\sqrt{10}}{4}\right)}$$

III.5. On cherche une base une autre façon d'obtenir une base orthogonale, en degré échelonné de $\mathbb{R}_n[X]$, et de coefficient dominant égal à 1 (on dit *unitaire*, ici).
On raisonne par analyse-synthèse.

(a) Analyse : Considérons donc une famille $(T_0, T_1, \dots T_n)$ orthogonale, de degré échelonné et unitaire.
On a donc, pour tout entier $k \in [\![0, n]\!]$, $\deg T_k = k$ et $[T_k]_k = 1$.
Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}_n$, $T_k \in (\mathbb{R}_{k-1}[X])^\perp$

Soit $k \in \mathbb{N}_n$.
Comme, pour tout $j \leqslant k-1$, $\deg T_j = j$, alors $(T_0, T_1, \dots T_{k-1})$ est de degré échelonné donc libre, c'est une famille de k vecteurs éléments de $\mathbb{R}_{k-1}[X]$. C'en est donc une base.
Ainsi, $(T_0, T_1, \dots T_{k-1})$ est génératrice de $\mathbb{R}_{k-1}[X]$.
Pour montrer que $T_k \in (\mathbb{R}_{k-1}[X])^\perp$, il suffit de montrer que pour tout $j \leqslant k-1$, $T_k \perp T_j$.
Ce qui est vrai par hypothèse. /1,5

$$\boxed{\text{Donc pour tout } k \in \mathbb{N}_n,\ T_k \in (\mathbb{R}_{k-1}[X])^\perp.}$$

(b) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}_n$, $XT_{k-1} - T_k \in \mathbb{R}_{k-1}[X]$ et pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $\langle XT_{k-1}|P\rangle = \langle T_{k-1}|XP\rangle$.

$\deg(XT_{k-1}) = 1 + \deg(T_{k-1}) = 1 + (k-1) = k$, donc $\deg(XT_{k-1} - T_k) \leqslant \max(\deg(XT_{k-1}, T_k) \leqslant k$.
Or $[XT_{k-1}]_k = [X]_0[T_{k-1}]_k + [X]_1[T_{k-1}]_{k-1} = 0 \times 0 + 1 \times 1 = 1$, donc $[XT_{k-1} - T_k]_k = 1 - 1 = 0$. /1

$$\boxed{\text{Ainsi, } XT_{k-1} - T_k \in \mathbb{R}_{k-1}[X].}$$

Notons aussi, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, /0,5

$$\boxed{\langle XT_{k-1}|P\rangle = \int_a^b tT_{k-1}(t)P(t)\mathrm{d}t = \int_a^b T_{k-1}(t) \times tP(t)\mathrm{d}t = \langle T_{k-1}|XP\rangle}$$

(c) En déduire

$$T_0 = 1, \quad T_1 = X - \frac{1}{2}(b+a) \quad \text{et pour } k \in [\![2, n]\!], T_k = XT_{k-1} - \frac{\langle T_{k-1}|XT_{k-1}\rangle}{\|T_{k-1}\|^2}T_{k-1} - \frac{\langle T_{k-1}|XT_{k-2}\rangle}{\|T_{k-2}\|^2}T_{k-2} \quad (\star)$$

- $\deg T_0 = 0$ et T_0 est unitaire, donc nécessairement : $T_0 = 1$.
- T_1 est unitaire de degré 1, donc il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $T_1 = X + \mu$. Puis

$$0 = \langle T_1, T_0\rangle = \int_a^b (t+\mu)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(b^2 - a^2) + \mu(b-a) = (b-a)(\frac{b+a}{2} + \mu)$$

Or ce produit est nul si et seulement si $\mu = -\frac{a+b}{2}$. Et donc $T_1 = X - \frac{a+b}{2}$.

- D'après la question précédente : $T_k - XT_{k-1} \in R_{k-1}[X] = \text{vect}(T_0, T_1, \dots T_{k-1})$.
Comme la famille $(T_0, T_1, \dots T_{k-1})$ est orthogonale (et non orthonormale) :

$$T_k - XT_{k-1} = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\langle T_k - XT_{k-1}, T_i\rangle}{\|T_i\|^2}T_i$$

Mais pour tout $i < k$, $\langle T_k, T_i\rangle = 0$ et si $i \leqslant k-3$: $\langle XT_{k-1}, T_i\rangle = \langle T_{k-1}, \underbrace{XT_i}_{\in \mathbb{R}_{i+1}[X] \subset \mathbb{R}_{k-2}[X] \subset (T_{k-1})^\perp}\rangle = 0$.
Donc par linéarité :

$$T_k - XT_{k-1} = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\langle T_k, T_i\rangle}{\|T_i\|^2}T_i - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\langle XT_{k-1}, T_i\rangle}{\|T_i\|^2}T_i = -\frac{\langle XT_{k-1}, T_{k-1}\rangle}{\|T_{k-1}\|^2}T_{k-1} - \frac{\langle XT_{k-1}, T_{k-2}\rangle}{\|T_{k-2}\|^2}T_{k-2}$$

Par commutativité du X dans le produit scalaire : /3

$$\boxed{T_0 = 1,\ T_1 = X - \frac{1}{2}(b+a) \text{ et } \forall\, k \in [\![2, n]\!],\ T_k = XT_{k-1} - \frac{\langle T_{k-1}|XT_{k-1}\rangle}{\|T_{k-1}\|^2}T_{k-1} - \frac{\langle T_{k-1}|XT_{k-2}\rangle}{\|T_{k-2}\|^2}T_{k-2} \quad (\star)}$$

(d) Synthèse : Vérifier que la famille (T_i) définie par les relations $(\star)$ est bien définie, en degré échelonné, orthogonale et chaque T_i est unitaire.

Considérons la suite de fonctions (T_n) définies par récurrence par $(\star)$.
On note que T_0 et T_1 sont des fonctions polynomiales de degré 0 et 1 respectivement.
Notons $\mathcal{P}_n$: « T_n est une fonction polynomiale de degré n et unitaire ».

— $\mathcal{P}_0$ et $\mathcal{P}_1$ sont vraies.
— Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_{n+1}$ sont vraies.
  Il existe $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ tels que $T_{n+2} = (X + a_n)T_{n+1} + b_n T_n$. Il s'agit donc d'un polynôme.
  Et $\deg(X + a_n)T_{n+1}) = 1 + \deg T_{n+1} = n + 2$ et $\deg T_n = n$, donc $\deg T_{n+2} = n + 2$.
  Et ainsi $[T_{n+2}]_{n+2} = [XT_{n+1}]_{n+2} = 1 \times [T_{n+1}]_{n+1} = 1 \times 1 = 1$, d'après $\mathcal{P}_{n+1}$.
  Donc $\mathcal{P}_{n+2}$ est vraie.

Montrons enfin que la famille (T_n) ainsi définie est orthogonale.
Exploitons encore une récurrence.
Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{Q}_n$: « $\forall\, k < n$, $\langle T_k, T_n\rangle = 0$ ».

— $\mathcal{Q}_0$ est vraie (rien à vérifier)
— $\langle T_0, T_1\rangle = \displaystyle\int_a^b \left(t - \frac{a+b}{2}\right) \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[\left(t - \frac{a+b}{2}\right)^2\right]_a^b = \frac{1}{2}\left(\frac{(b-a)^2}{2} - \frac{(a-b)^2}{2}\right) = 0$, donc $\mathcal{Q}_1$ est vraie.
— Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{Q}_n$ et $\mathcal{Q}_{n+1}$ sont vraies.
  On va calculer $\langle T_k, T_{n+2}\rangle$ pour toutes les valeurs de $k < n + 2$.
  • Si $k = n + 1$, par linéarité :

$$\langle T_{n+1}, T_{n+2}\rangle = \langle T_{n+1}, XT_{n+1}\rangle - \frac{\langle T_{n+1}|XT_{n+1}\rangle}{\|T_{n+1}\|^2}\langle T_{n+1}, T_{n+1}\rangle - \frac{\langle T_{n+1}|XT_n\rangle}{\|T_n\|^2}\underbrace{\langle T_{n+1}, T_n\rangle}_{=0 \text{ d'après } \mathcal{Q}_{n+1}} = 0$$

  • Si $k = n$, par linéarité :

$$\langle T_n, T_{n+2}\rangle = \underbrace{\langle T_n, XT_{n+1}\rangle}_{=\langle XT_n, T_{n+1}\rangle} - \frac{\langle T_n|XT_{n+1}\rangle}{\|T_{n+1}\|^2}\underbrace{\langle T_n, T_{n+1}\rangle}_{=0 \text{ d'après } \mathcal{Q}_{n+1}} - \frac{\langle T_{n+1}|XT_n\rangle}{\|T_n\|^2}\langle T_n, T_n\rangle = 0$$

  • Si $k \leqslant n$.

$$\langle T_k, T_{n+2}\rangle = \underbrace{\langle T_k, XT_{n+1}\rangle}_{=\langle XT_k, T_{n+1}\rangle = 0 \text{ d'après } \mathcal{Q}_{n+1}} - \frac{\langle T_n|XT_{n+1}\rangle}{\|T_{n+1}\|^2}\underbrace{\langle T_k, T_{n+1}\rangle}_{=0 \text{ d'après } \mathcal{Q}_{n+1}} - \frac{\langle T_{n+1}|XT_n\rangle}{\|T_n\|^2}\underbrace{\langle T_k, T_n\rangle}_{\text{d'après } \mathcal{Q}_n} = 0$$

  Donc $\mathcal{Q}_{n+2}$ est vraie. /3

$$\boxed{(T_i) \text{ définie par } (\star) \text{ est bien définie, en degré échelonné, orthogonale et chaque } T_i \text{ est unitaire.}}$$

III.6. Expression explicite de T_n (par le calcul d'un déterminant).

On fixe $n \in \mathbb{N}$. On note $S_n : x \mapsto \det \begin{pmatrix} \langle 1, 1\rangle & \langle 1, X\rangle & \cdots & \langle 1, X^n\rangle \\ \langle X, 1\rangle & \langle X, X\rangle & \cdots & \langle X, X^n\rangle \\ \vdots & & & \vdots \\ \langle X^{n-1}, 1\rangle & \langle X^{n-1}, X\rangle & \cdots & \langle X^{n-1}, X^n\rangle \\ 1 & x & \cdots & x^n \end{pmatrix}$

(a) Montrer que S_n est une fonction polynomiale. Quel est son degré ?
Exprimer par un calcul de déterminant le coefficient dominant de S_n

---

Notons d'abord que S_n est une matrice d'ordre $n + 1$.

Le développement de S_n par rapport à la dernière ligne donne $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \sigma_k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{n} \sigma_{k+1} x^k$

où $\alpha_k = (-1)^{n+1+k} \det(S_n^{(n+1)\wedge k})$ avec $S_n^{(n+1)\wedge k}$ matrice obtenue à partir de S_n
à laquelle on a enlevé la ligne $n + 1$ et la colonne k On a ainsi /1,5

$\boxed{S_n \text{ est une fonction polynomiale, de degré } n \text{ et de coefficient dominant } \det(\langle X^{i-1}|X^{j-1}\rangle)_{i,j\in\mathbb{N}_n}.}$

car $(-1)^{2(n+1)} = 1$ et $S_n^{(n+1)\wedge(n+1)} = \big(\langle X^{i-1}, X^{j-1}\rangle\big)_{i,j\in\mathbb{N}_n}$.

(b) Montrer que $S_n \perp X^k$, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$.

Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. Par linéarité à gauche,

$$\langle S_n|X^k\rangle = \sum_{j=0}^{n-1} \sigma_{j+1}\langle X^j, X^k\rangle$$

Or ce calcul est exactement le même que celui qui obtient lorsqu'on fait le développement par rapport à la dernière ligne de

$$\det\begin{pmatrix} \langle 1,1\rangle & \langle 1,X\rangle & \cdots & \langle 1,X^n\rangle \\ \langle X,1\rangle & \langle X,X\rangle & \cdots & \langle X,X^n\rangle \\ \vdots & & & \vdots \\ \langle X^{n-1},1\rangle & \langle X^{n-1},X\rangle & \cdots & \langle X^{n-1},X^n\rangle \\ \langle 1,X^k\rangle & \langle X,X^k\rangle & \cdots & \langle X^n,X^k\rangle \end{pmatrix}$$

Ce calcul est nul car il s'agit du calcul d'un déterminant avec deux lignes identiques : L_{k+1} et L_{n+1} ($k \leqslant n-1$) /2

$$\boxed{\text{Donc } \langle S_n, X^k\rangle = 0.}$$

(c) En déduire, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, une expression de T_n comme division de deux déterminants.

Ainsi, la famille (S_n) est une famille de degré échelonné,

Et si $k < n$, alors $S_k = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j X^j$ et donc $\langle S_n, S_k\rangle = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j \langle S_n, X^j\rangle = 0$,

C'est donc une famille orthogonale.

Si on divise S_n par $[S_n]_n$, on retrouve donc les propriétés caractéristiques de la suite (T_n). /2

$$\boxed{\text{Donc, pour tout } n\in\mathbb{N},\ T_n : x \mapsto = \frac{1}{[S_n]_n} S_n(x) = \frac{\det\begin{pmatrix} \langle 1,1\rangle & \langle 1,X\rangle & \cdots & \langle 1,X^n\rangle \\ \langle X,1\rangle & \langle X,X\rangle & \cdots & \langle X,X^n\rangle \\ \vdots & & & \vdots \\ \langle X^{n-1},1\rangle & \langle X^{n-1},X\rangle & \cdots & \langle X^{n-1},X^n\rangle \\ 1 & x & \cdots & x^n \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} \langle 1,1\rangle & \langle 1,X\rangle & \cdots & \langle 1,X^{n-1}\rangle \\ \langle X,1\rangle & \langle X,X\rangle & \cdots & \langle X,X^{n-1}\rangle \\ \vdots & & & \vdots \\ \langle X^{n-1},1\rangle & \langle X^{n-1},X\rangle & \cdots & \langle X^{n-1},X^{n-1}\rangle \end{pmatrix}}.}$$

IV - Racines & Formules de quadrature

On considère donc, jusqu'à la fin du problème, la suite de polynômes $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par $(\star)$.
Cette suite dépend des nombres a et b. On note pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, $\mathcal{Z}(P) = \{z \in \mathbb{R} \mid P(z) = 0\}$, les racines du polynôme P et $\mathcal{Z}_{[a,b]}(P) = \{z \in [a,b] \mid P(z) = 0\} = \mathcal{Z} \cap [a,b]$.
Pour $z \in \mathcal{Z}(P)$, on note $\alpha_P(z)$, la multiplicité de z en tant que racine de P - *noté souvent $\alpha(z)$ si le polynôme P considéré est évident.*

IV.1. On fixe $n \in \mathbb{N}$.

(a) Donner une définition formelle (avec la conjonction de deux calculs) de : $\alpha_P(z) = k$.

$$\boxed{\alpha_P(z) = k \Longleftrightarrow z \text{ est racine d'ordre } k \text{ de P } \Longleftrightarrow \exists\ Q \in \mathbb{R}[X] \text{ tel que } P = (X-z)^k Q \text{ et } Q(z) \neq 0}$$

/1

(b) Donner un majorant de $\mathrm{Card}\big(\mathcal{Z}_{[a,b]}(T_n)\big)$.

Le nombre de racines de T_n, de degré n est au plus n. Elles peuvent, au plus, être disjointes et dans $[a,b]$.

$$\boxed{\mathrm{Card}\big(\mathcal{Z}_{[a,b]}(T_n)\big) \leqslant n}$$

/1

(c) On note $\mathcal{E} = \{z \in \mathcal{Z}_{[a,b]}(T_n) \mid \alpha_{T_n}(z) \equiv 1[2]\}$, ensemble des racines de T_n dans $[a,b]$ et d'ordre de multiplicité impair.
On considère $Q = \displaystyle\prod_{z\in\mathcal{E}}(X-z)$. Montrer que $\langle T_n|Q\rangle \neq 0$.

Les racines de Q sont toutes des racines de T_n, donc

$$\forall\ x \in [a,b], \qquad (T_nQ)(x) = 0 \Rightarrow T_n(x) = 0 \Rightarrow x \in \mathcal{Z}_{[a,b]}(T_n)$$

Puis, ou bien x est une racine d'ordre pair de T_n et n'est racine pas de Q, donc $t \mapsto T_n(t)Q(t) = (t-x)^{2s}R(t)$ avec $R(x) \neq 0$

donc T_nQ est de signe constant au voisinage de x. ou bien x est une racine d'ordre impair de T_n et est racine simple de Q, donc $t \mapsto T_n(t)Q(t) = (t-x)^{2s+1+1}R(t)$ avec $R(x) \neq 0$

donc T_nQ est de signe constant au voisinage de x. Ainsi, T_nQ est de signe constant sur $[a,b]$, et elle est continue et non nul (sinon ce serait le polynôme nul, avec une infinité de racines),

Donc $\displaystyle\int_a^b T_n(t)Q(t)\mathrm{d}t \neq 0$ /2

$$\boxed{\langle T_n|Q\rangle \neq 0.}$$

(d) En déduire, par l'absurde, que $\mathrm{Card}(\mathcal{E}) = n$.

Puisque $\mathcal{E} \subset (\mathcal{Z}_{[a,b]}(T_n)$, $\mathrm{card}(\mathcal{E}) \leqslant \mathrm{card}(\mathcal{Z}_{[a,b]}(T_n) \leqslant n$.
Supposons que $\mathrm{Card}(\mathcal{E}) \neq n$, donc $\mathrm{Card}(\mathcal{E}) < n$.
Ainsi, $\deg Q = \mathrm{Card}(\mathcal{E}) < n$ (Q défini à la question précédente), donc $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Enfin, $T_n \in (\mathbb{R}_{n-1}[X])^\perp$, donc $\langle T_n, Q\rangle = 0$. C'est en contradiction avec le résultat de la question précédente. /1,5

$$\boxed{\mathrm{Card}(E) = n.}$$

(e) Conclure qu'il existe $a_1, a_2, \dots a_n$ tels que :

$$a \leqslant a_1 < a_2 < \cdots a_n \leqslant b \qquad \text{et } T_n = \prod_{i=1}^{n}(X-a_i)$$

Notons, $a_1, a_2, \dots a_n$, les n éléments distincts de E et ordonnés.
Ce sont des racines de T_n, avec $\deg T_n = n$, donc ce sont les racines de T_n et d'ordre 1, nécessairement.
Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $T_n = \lambda \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(X-a_k)$.
Dans ce cas le coefficient dominant de T_n est λ. Or on sait qu'il vaut 1. /1,5

$$\boxed{\exists\ a_1 < a_2 < \cdots a_n \in [a,b] \qquad \text{tels que } T_n = \prod_{i=1}^{n}(X - a_i)}$$

IV.2. On fixe de nouveau $n \in \mathbb{N}$.
On note $\phi_i : \mathbb{R}_{n-1}[X] \to \mathbb{R}$, $P \mapsto P(a_i)$. On admet qu'il s'agit d'une une forme linéaire donc d'un vecteur de $(\mathbb{R}_{n-1}[X])^*$.

(a) Montrer que $\Phi : \mathbb{R}_{n-1}[X] \to \mathbb{R}$, $P \mapsto \displaystyle\int_a^b P(t)\mathrm{d}t$ est une forme linéaire, donc élément de $(\mathbb{R}_{n-1}[X])^*$

Φ est bien linéaire : $\forall\ P_1, P_2 \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $\forall\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$,

$$\Phi(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) = \int_a^b (\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)(t)\mathrm{d}t = \int_a^b [\lambda_1 P_1(t) + \lambda_2 P_2(t)]\mathrm{d}t = \lambda_1 \int_a^b P_1(t)\mathrm{d}t + \lambda_2 \int_a^b P_2(t)\mathrm{d}t$$

$$\Phi(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) = \lambda_1 \Phi(P_1) + \lambda_2 \Phi(P_2)$$

Par ailleurs, Φ est à valeurs dans $\mathbb{R}$. /1

$$\boxed{\Phi : \mathbb{R}_{n-1}[X] \to \mathbb{R},\ P \mapsto \int_a^b P(t)\mathrm{d}t \text{ est une forme linéaire.}}$$

(b) Montrer que $(\phi_1, \phi_2, \dots \phi_n)$ est une base de $(\mathbb{R}_{n-1}[X])^*$

Soient $\lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \phi_i = [0]$ (application nulle).

Alors pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a $0 = [0](P) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \phi_i(P) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P(a_i)$.

Soit $k \in \mathbb{N}_n$. Considérons $P(:= L_k) = \displaystyle\prod_{j \neq k} \frac{X - a_j}{a_k - a_j}$.

Alors $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $0 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i P(a_i) = \lambda_k \underbrace{P(a_k)}_{=1} + \sum_{i \neq k} \lambda_i \underbrace{P(a_i)}_{=0} = \lambda_k$ Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}_N$, $\lambda_k = 0$.

Donc la famille $(\phi_1, \psi_2, \dots \phi_n)$ est une famille libre de $(\mathbb{R}_{n-1}[X])^*$.
Elle est composée de $n = \dim((\mathbb{R}_{n-1}[X])) = \dim((\mathbb{R}_{n-1}[X])^*)$ vecteurs. C'en est donc une base. /1,5

$$\boxed{(\phi_1, \psi_2, \dots \phi_n) \text{ est une base de } (\mathbb{R}_{n-1}[X])^*.}$$

(c) En déduire qu'il existe $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall\ P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \qquad \int_a^b P(t)\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k P(a_k)$$

Comme $(\psi_1, \dots \psi_n)$ est génératrice de $(\mathbb{R}_{n-1}[X])^*$, il existe donc $\lambda_1, \dots \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \psi_i$$

Appliquer en P (pour tout $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$) : /1

$$\boxed{\exists\ \lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n \in \mathbb{R} \text{ tels que } \forall\ P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \qquad \int_a^b P(t)\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k P(a_k).}$$

(d) Evaluer $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k$

Considérons le polynôme $P = 1$, alors $P(a_k) = 1$ et donc

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k P(a_k) = \int_a^b P(t)\mathrm{d}t = \int_a^b 1\mathrm{d}t = b - a$$

/1,5

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1}$$

IV.3. Soit $S \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$. On note Q et R, le quotient et le reste respectivement de la division euclidienne de S par T_n.

(a) Montrer que, pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $S(a_i) = R(a_i)$.

On a $S = QT_n + R$, avec $\deg R < \deg T_n = n$.
Puis, pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, puisque a_i est racine de T_n, /1

$$\boxed{S(a_i) = Q(a_i)\underbrace{T_n(a_i)}_{=0} + R(a_i) = R(a_i)}$$

(b) Montrer que $\int_a^b S(t)\mathrm{d}t = \int_a^b R(t)\mathrm{d}t$.

Et de même, par linéarité :

$$\int_a^b S(t)\mathrm{d}t = \int_a^b (Q(t)T_n(t) + R(t))\mathrm{d}t = \int_a^b Q(t)T_n(t)\mathrm{d}t + \int_a^b R(t)\mathrm{d}t = \langle Q, T_n\rangle + \int_a^b R(t)\mathrm{d}t$$

Or $\deg S = \deg T_n + \deg Q$, donc $\deg Q = \deg S - \deg T_n \leqslant 2n - 1 - n = n - 1$. Donc $Q \perp T_n$.
Ainsi /2

$$\boxed{\int_a^b S(t)\mathrm{d}t = \int_a^b R(t)\mathrm{d}t}$$

(c) En déduire,

$$\forall\ S \in \mathbb{R}_{2n-1}[X], \qquad \int_a^b S(t)\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k S(a_k)$$

On a donc, puisque $R \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et d'après les questions précédentes : /2

$$\boxed{\int_a^b S(t)\mathrm{d}t = \int_a^b R(t)\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k R(a_k) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k S(a_k)}$$

IV.4. On note, pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $L_i = \prod_{k \neq i} \frac{X - a_k}{a_i - a_k}$.

(a) Montrer que, pour tout $i \in \mathbb{N}_n$,

$$\lambda_i = \int_a^b L_i(t)\mathrm{d}t$$

Le calcul a été fait plus haut : $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k L_i(a_k) = \lambda_i$, mais on a aussi $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k L_i(a_k) = \int_a^b L_i(t)\mathrm{d}t$, car $\deg L_i \leqslant n-1$.
Donc /1

$$\boxed{\lambda_i = \int_a^b L_i(t)\mathrm{d}t}$$

(b) Montrer que, pour tout $i \in \mathbb{N}_n$,

$$\lambda_i = \int_a^b L_i^2(t)\mathrm{d}t$$

C'est un peu plus subtil, car $\deg L_i^2 \leqslant 2(n-1) = 2n-2$.
Fixons $i \in \mathbb{N}_n$.
Faisons la division euclidienne de L_i^2 par T_n.
Il existe $(Q, R) \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $L_i^2 = T_n Q + R$.
Or pour tout $k \in \mathbb{N}_n$ et $k \neq i$, $L_i^2(a_k) = 0 = R(a_k)$ donc a_k est une racine de R.
Ainsi R est divisible par $\prod_{k\neq i}(X - a_k)$, donc par L_i. Autrement écrit : il existe $\nu_i \in \mathbb{R}$ tel que $R = \nu_i L_i$.
Ensuite, $L_i^2(a_i) = (L_i(a_i))^2 = 1^2 = 1 = R(a_i) = \nu_i L_i(a_i) = \nu_i$.
Donc $R = L_i$.
Et finalement : /2

$$\boxed{\int_a^b L_i^2(t)\mathrm{d}t = \int_a^b R(t)\mathrm{d}t = \int_a^b L_i(t)\mathrm{d}t = \lambda_i}$$

(c) En déduire que pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $\lambda_i > 0$.

Puisque pour tout $t \in [a, b]$, $t \mapsto L_i^2(t)$ est continue, positive, non identiquement nul, alors /1

$$\boxed{\lambda_i = \int_a^b L_i^2(t)\mathrm{d}t > 0.}$$

IV.5. On relâche le caractère fixé de n et on note, pour $n \in \mathbb{N}$, et $P \in \mathbb{R}[X]$, $\ell_n(P) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k P(a_k)$,

(où $(a_1, \dots a_n)$ et $(\lambda_1, \dots \lambda_n)$ sont définis comme précédemment).
Montrer que $\ell_n(P)$ converge, quelle est sa limite ?

Il faut bien comprendre que dans cette question P est FIXÉ.
Notons $\deg P = m$. Alors pour tout $n \geqslant m$ (mais en fait $n \geqslant \frac{m+1}{2}$ suffit) :

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k P(a_k) = \int_a^b P(t)\mathrm{d}t, \quad \text{indépendant de } n$$

/2

$$\boxed{\text{Donc la suite } \ell_n(P) \text{ est stationnaire et convergente vers } \int_a^b P(t)\mathrm{d}t.}$$
