Pour le 17.05.22

Devoir à la maison n°13

La notation tiendra particulièrement compte de **la qualité de la rédaction, la précision des raisonnements et l'énoncé des formules utilisées**.

Exercice

Pour tous.

1. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x-1}{(2+2x+x^2)^3}\mathrm{d}x$
2. Calculer $\displaystyle\ell = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k\arctan\frac{k}{n}$. Donner un équivalent de $\displaystyle\left(\ell - \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k\arctan\frac{k}{n}\right)_n$.
3. En exploitant une formule de Taylor bien choisie, que $\forall\ x\in\mathbb{R}$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = \cos x$.

   Montrer, en revanche, que l'on a aussi : $\forall\ n\in\mathbb{N}, \exists\ x\in\mathbb{R}$ tel que $\displaystyle\left|\cos x - \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}\right| \geqslant 1$
4. A l'aide de comparaisons séries/intégrales (et d'un changement de variable), montrer que : si $f : [0,1]\to\mathbb{R}_+$ est continue, croissante, alors $\sum f(e^{-n})$ et $\displaystyle\sum \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)$ sont de même nature.

Problème

Non obligatoire pour tous, mais néanmoins pas interdit...

Pour l'ensemble du problème, on a besoin de la définition suivante :

> Soit $a\in\mathbb{R}$.
> On dit qu'une fonction f définie sur un intervalle $[a,+\infty[$ est KH-intégrable sur $[a,+\infty[$, si
> $$\forall\ b>a, f \text{ est KH-intégrable sur } [a,b] \quad \text{et} \quad \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \text{ existe}$$
> Dans ce cas, on note $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ cette limite.

A. Théorème de convergence monotone

Dans cette partie, on démontre le théorème de convergence monotone (appelé aussi théorème de Beppo-Levi) sur un intervalle du type $[a,+\infty[$. On commence par établir le théorème sur les segments bornées $[a,b]$ avant de généraliser.

1. Soit une suite de fonctions (f_n) définie sur $[a,b]$, KH-intégrable sur $[a,b]$. On suppose que
   - cette suite est croissante, c'est-à-dire : $\forall\ x\in[a,b], \forall\ n\in\mathbb{N},\ f_n(x)\leqslant f_{n+1}(x)$.
   - cette suite est convergente vers une fonction f sur $[a,b]$: $\forall\ x\in[a,b],\ \big(f_n(x)\big)_n \to f(x)$
   - la suite $\left(\int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t\right)$ est majorée par une constante M (indépendante de n).

   On fixe $\epsilon>0$. Les premières questions permettent surtout ici de s'accorder sur les notations.

   (a) On note $\displaystyle I_n = \int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t$. Montrer que (I_n) est convergente. On note I sa limite.
   Montrer qu'il existe $n_0\in\mathbb{N}$ tel que $\forall\ n\geqslant n_0,\ I-\epsilon\leqslant I_n\leqslant I_{n+1}\leqslant I$

   (b) Montrer : pour tout $x\in[a,b]$, il existe $N(x)\geqslant n_0$ tel que $\forall\ n\geqslant N(x),\ f(x)-\epsilon\leqslant f_n(x)\leqslant f(x)$

   (c) Justifier, pour tout $n\in\mathbb{N}$, l'existence de δ_n, jauge sur $[a,b]$ tel que
   $$\forall\ \sigma_p = \big(([x_0,x_1],t_1),\dots([x_{p-1},x_p],t_p)\big)\ \delta_n\text{-fine},\ |S(f_n,\sigma_p)-I_n|\leqslant\frac{\epsilon}{2^n}.$$

(d) (*) On considère alors $\delta : [a, b] \to \mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto \delta_{N(x)}(x)$.

Montrer, avec δ, que f est intégrable sur $[a, b]$ et que $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = I$

On pourra commencer par écrire, pour $\sigma_p = \big(([x_0, x_1], t_1), \dots ([x_{p-1}, x_p], t_p)\big)$, *$\delta$-fine :*

$$S(f, \sigma_p) = \sum_{k=1}^{p}(x_k - x_{k-1})(f(t_k) - f_{N(t_k)}(t_k)) + \sum_{k=1}^{p}\left((x_k - x_{k-1})f_{N(t_k)}(t_k) - \int_{x_{k-1}}^{x_k} f_{N(t_k)}(t)dt\right) + \sum_{k=1}^{p}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f_{N(t_k)}(t)dt$$

On exploitera également p fois le lemme de Henstock pour majorer la somme centrale ici.

2. Sur l'intervalle $[a, +\infty[$.
Soit une suite de fonctions (f_n) définie sur $[a, +\infty[$, KH-intégrable sur $[a, +\infty[$. On suppose que
• cette suite est croissante, c'est-à-dire : $\forall\, x \in [a, +\infty[, \forall\, n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)$.
• cette suite est convergente vers f sur $[a, +\infty[$: $\forall\, x \in [a, +\infty[, \forall\, n \in \mathbb{N}$, $\big(f_n(x)\big)_n \to f(x)$
• la suite $\left(\int_a^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t\right)$ est majorée par une constante M (indépendante de n).

(a) Soit $b > 0$. Montrer que l'on peut appliquer le théorème de convergence monotone à $((f_n - f_0)_{|[a,b]})_n$.

(b) En déduire le théorème de convergence monotone (Beppo Levi) sur tout intervalle de type $[a, +\infty[$.

B. Relation de récurrence

Soit $\alpha > 1$.

On considère, pour tout $x \geqslant 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n(x) = x^\alpha e^{-nx}$. On note ensuite $U_n : x \mapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k(x)$.

1. Fonction Zéta de Riemann.
Quel est l'ensemble de définition de $\zeta : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$?

2. Soit $a > 0$. Fonction Gamma d'Euler.
(a) Montrer qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall\, x \geqslant M$, $x^a e^{-x} \leqslant \dfrac{1}{x^2}$.
(b) En déduire que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $b > 0$ tel que $\forall\, c > b$, $\left|\displaystyle\int_b^c x^\alpha e^{-x}\mathrm{d}x\right| \leqslant \epsilon$
(c) Conclure que $x \mapsto x^a e^{-x}$ est KH-intégrable sur $[0, +\infty[$.

On note, pour tout $a > 0$, $\Gamma(a+1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^a e^{-x}\mathrm{d}x$.

3. Etude de $\displaystyle\int_0^{+\infty} u_n(x)\mathrm{d}x$.
(a) Soit $b > 0$. Montrer que u_n est KH-intégrable sur $[0, b]$.
Montrer qu'il existe $N(\alpha, n)$, à préciser, tel que $\displaystyle\int_0^b u_n(x)\mathrm{d}x = N(\alpha, n) \times \int_0^{nb} x^\alpha e^{-x}\mathrm{d}x$,
(b) Montrer que u_n est KH-intégrable sur $[0, +\infty[$. Exprimer $\displaystyle\int_0^{+\infty} u_n(x)\mathrm{d}x$ en fonction de Γ.

4. Application du lemme de Beppo-Levi.
(a) Montrer, que la suite (U_n) est croissante.
(b) Soit $x > 0$.
Montrer que la série de terme général $u_n(x)$ est convergente et que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = \frac{x^\alpha}{e^x - 1}$.
(c) Enfin, démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{e^x - 1}\mathrm{d}x = \Gamma(\alpha+1)\zeta(\alpha+1)$$