Devoir à la maison n°13
CORRECTION

Exercice

Pour tous.

1. On note que le numérateur est sans racine réel : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2+2x+x^2 = (x+1)^2+1 \geqslant 1 > 0$.
Dans le cours (savoir-faire 186), on lit qu'il faut :
   - commencer par faire apparaître une forme du type $\frac{u'}{u}$, où $u = 2+2x+x^2$.
   Ici $u' = 2x+2$, il faut donc enlever la constante 3 au numérateur,
   - afin d'obtenir une fraction de la forme $\dfrac{1}{(t^2+bt+c)^3}$,
   on écrit alors $2+2x+x^2 = (x+1)^2+1$ et l'on effectue le changement de variable $\tan\theta = 1+x$.

   Cela donne :
$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{2x-1}{(2+2x+x^2)^3}\mathrm{d}x &= \underbrace{\int_0^1 \frac{2x+2}{(2+2x+x^2)^3}\mathrm{d}x}_{u(x)=2+2x+x^2} -3\underbrace{\int_0^1 \frac{1}{(1+(1+x)^2)^3}\mathrm{d}x}_{\tan\theta=1+x}\\ &= \left[-\frac{1}{2}\frac{1}{u^2}\right]_2^5 - 3\int_{\arctan 1}^{\arctan 2} \frac{1}{(1+\tan^2\theta)^3}(1+\tan^2\theta)\mathrm{d}\theta\\ &= \left[-\frac{1}{50}+\frac{1}{8}\right] - 3\int_{\arctan 1}^{\arctan 2}\cos^4\theta\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$
Comme $\cos^4\theta = \left(\dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^4 = \dfrac{1}{16}\left(e^{4i\theta}+e^{-4i\theta}+4e^{2i\theta}+4e^{-2i\theta}+6\right)$,
$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{2x-1}{(2+2x+x^2)^3}\mathrm{d}x &= \frac{21}{200} - 3\int_{\arctan 1}^{\arctan 2}\frac{1}{8}\cos 4\theta + \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{6}{16}\mathrm{d}\theta\\ &= \frac{21}{200} - 3\left[\frac{1}{32}\sin 4\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta + \frac{3}{8}\theta\right]_{\arctan 1}^{\arctan 2}\end{aligned}$$
Enfin, notons que $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ et que $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$, $\sin 4\theta = 4\sin\theta\cos\theta(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$
$\cos\arctan u = \dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2\arctan u}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+u^2}}$ et $\sin(\arctan u) = u \times \dfrac{1}{\sqrt{1+u^2}}$,
$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{2x-1}{(2+2x+x^2)^3}\mathrm{d}x &= \frac{21}{200} - 3\left[\frac{1}{32}(-\frac{24}{25}-0) + \frac{1}{4}(\frac{4}{5}-1) + \frac{3}{8}(\arctan 2 - \frac{\pi}{4})\right]\\ &= \frac{21+18+30}{200} - \frac{9}{8}\arctan 2 + \frac{9\pi}{32}\end{aligned}$$
$$\boxed{\int_0^1 \frac{2x-1}{(2+2x+x^2)^3}\mathrm{d}x = \frac{69}{200} - \frac{9}{8}\arctan 2 + \frac{9\pi}{32}}$$

2. On note $u_n = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\arctan\frac{k}{n}$.
Il s'agit d'une somme de Riemann, on identifie avec $b-a=1$, $a=0$ donc $b=1$ et $f : x \mapsto x\arctan x$.
$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(0+1\frac{k}{n}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell := \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$$
Pour faire le calcul de l'intégrale, on exploite une intégration par parties, avec $u : x \mapsto \arctan x$ et $v : x \mapsto \frac{1}{2}x^2$:
$$\begin{aligned}\ell &= \left[\frac{1}{2}x^2\arctan x\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2(1+x^2)}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x\\ &= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\left[x - \arctan x\right]_0^1 = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{8}\end{aligned}$$
$$\boxed{\ell = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}}$$

Remarques !

Pour calculer l'équivalent de la vitesse de convergence, il faut refaire toute la démonstration.
Pour la partie de l'égalité des accroissements finis, on propose une nouvelle démonstration avec l'égalité de Taylor reste intégral.

On a, en notant F, une primitive de f. Par télescopage :

$$\ell - u_n = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \sum_{k=1}^n \left(F(\frac{k}{n}) - F(\frac{k-1}{n}) - \frac{1}{n}f(\frac{k}{n})\right)$$

D'après la formule de Taylor avec reste intégral (avec $a \leftarrow x_k = \frac{k}{n}$ et $b \leftarrow x_{k-1}$) :

$$F(x_{k-1}) = F(x_k) + (x_{k-1}-x_k)F'(x_k) + \int_{x_k}^{x_{k-1}} \frac{x_{k-1}-t}{1}F''(t)\mathrm{d}t$$

$$F\left(\frac{k}{n}\right) - F\left(\frac{k-1}{n}\right) - \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right) = -\int_{x_k}^{x_{k-1}} \frac{x_{k-1}-t}{1}F''(t)\mathrm{d}t = \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} (x_{k-1}-t)f'(t)\mathrm{d}t$$

Or f' est continue (car f est de classe $\mathcal{C}^\infty$), donc $f'([x_{k-1},x_k])$ est borné (Weierstrass),
notons $M_k = \sup_{[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}]} f'$ et $m_k = \inf_{[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}]} f'$.
Comme $t - x_{k-1}$ est positive sur $[x_{k-1}, x_k]$:

$$\frac{m_k}{2}(x_k-x_{k-1})^2 = m_k\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}(t-x_{k-1})\mathrm{d}t \leqslant \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}(t-x_{k-1})f'(t)\mathrm{d}t \leqslant M_k\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}(t-x_{k-1})\mathrm{d}t = \frac{M_k}{2}(x_k-x_{k-1})^2$$

Donc, comme $(x_k - x_{k-1})^2 = \frac{1}{n^2}$:

$$m_k \leqslant -2n^2\left(F\left(\frac{k}{n}\right) - F\left(\frac{k-1}{n}\right) - \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right) \leqslant M_k$$

Et donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires (f' est continue) :

$$\exists\ c_k \in [\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}] \text{ tel que } \left(F\left(\frac{k}{n}\right) - F\left(\frac{k-1}{n}\right) - \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right) = \frac{-1}{2n^2}f'(c_k)$$

On a alors (on reconnait une somme de Riemann) :

$$2n(\ell - u_n) = \frac{-1}{n}\sum_{k=1}^n f'(c_k) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\int_0^1 f'(t)\mathrm{d}t = f(1) - f(0) = -1\arctan 1 = \frac{-\pi}{4}$$

$$\boxed{\ell - u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-\pi}{8n}}$$

3. Soit $x \in \mathbb{R}$.
Avec la formule de Taylor avec reste intégral, puisque cos est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,x]$ (ou $[x,0]$) :

$$\cos x = \cos 0 + \sum_{k=0}^{2n} \frac{(x-0)^k}{k!}\cos^{(k)}(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!}\cos^{(2n+1)}(t)\mathrm{d}t$$

Or $\cos^{(s)}(x) = \cos(x + \frac{\pi}{2}s)$ et donc $\cos^{(k)}(0) = \cos\frac{k\pi}{2} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \equiv 1[2] \\ 1 & \text{si } k \equiv 0[4] \\ -1 & \text{si } k \equiv 2[4] \end{cases}$
et $\cos^{(2n+1)}(x) = \cos(x + n\pi + \frac{\pi}{2}) = (-1)^n\cos(x + \frac{\pi}{2} = -(-1)^n\sin x = (-1)^{n+1}\sin x$.
Donc

$$\begin{aligned}\cos x &= 1 + \sum_{k\leqslant 2n, k\equiv 1[2]} \frac{(x-0)^k}{k!}\cos^{(k)}(0) + \sum_{k\leqslant 2n, k\equiv 0[2]} \frac{(x-0)^k}{k!}\cos^{(k)}(0) + \int_0^x (-1)^{2n+1}\frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!}\sin(t)\mathrm{d}t \\ &= \sum_{r=0}^n (-1)^r\frac{x^{2r}}{(2r)!} + \int_0^x (-1)^{2n+1}\frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!}\sin(t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Donc (on rappelle que x **est fixé**)

$$\left|\cos x - \sum_{r=0}^n (-1)^r\frac{x^{2r}}{(2r)!}\right| \leqslant \int_{\min(0,x)}^{\max(0,x)} \frac{|x-t|^{2n}}{(2n)!}\mathrm{d}t = \frac{1}{(2n+1)!}|x|^{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\boxed{\forall\ x\in\mathbb{R},\qquad \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = \cos x}$$

Remarques !

Comme x^{2n} est positif, on aurait pu appliquer le critère de Leibniz pour assurer la convergence, et même la majoration du reste (conforme par ailleurs au résultat ici redémontré).
En revanche, nous n'aurions pas eu accès à la valeur exacte de la limite ($\cos x$).

Soit $n \in \mathbb{N}$, fixé.
cos est bornée, pour calculer l'équivalent d'un polynôme en $+\infty$, on se concentre sur le terme de plus haut degré :

$$\cos x - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

Donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left| \cos x - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} \right| = +\infty$.

Et donc, il existe $X \in \mathbb{R}$ tel que $\forall\, x \geqslant X$, $\displaystyle\left| \cos x - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} \right| > 1$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires (continuité de $\psi : x \mapsto \cos x - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$),

il existe $x_0 \in [0, X]$ tel que $\cos x_0 - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x_0^{2k}}{(2k)!} = 1 \in [\psi(0), \psi(X)]$.

Remarques !

En fait, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$ (premier considéré puis fixé),
A partir d'un certain rang $n(x)$ (second considéré, qui dépend de x), la somme jusqu'au rang $n(x)$ vaut à peu près $\cos x$ (première question).
On a $\lim_{x\to+\infty} n(x) = +\infty$
Et en même temps, pour tout $n \in \mathbb{N}$ (premier considéré puis fixé),
Il existe toujours un nombre réel $x(n)$ (second considéré, qui dépend de n), tel que la somme jusqu'au rang n est déifférente (nettement aussi qu'on veut) de $\cos x$. (seconde question).
On a, là aussi, $\lim_{n\to+\infty} x(n) = +\infty$
Il est important de bien faire attention aux ordres de passage à la limite pour les convergences !

4. La fonction f est croissante. Donc par composition, $x \in \mathbb{R}_+ \mapsto f(\underbrace{e^{-x}}_{\in[0,1]})$ est décroissante.

Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [k, k+1]$:

$$f(e^{-(k+1)} \leqslant f(e^{-t}) \leqslant f(e^{-k})$$

Puis, on intègre entre k et $k+1$ (à gauche et à droite, on intègre des constantes) :

$$f(e^{-(k+1)} = \int_k^{k+1} f(e^{-(k+1)})\mathrm{d}t \leqslant \int_k^{k+1} f(e^{-t})\mathrm{d}t \leqslant f(e^{-k})$$

Puis, on somme pour k de 0 à $K-1 (\in \mathbb{N})$, avec la relation de Chasles :

$$\sum_{k=1}^{K} f(e^{-k}) = \sum_{k=0}^{K-1} f(e^{-(k+1)}) \leqslant \int_0^K f(e^{-t})\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=0}^{K-1} f(e^{-k}) \qquad (1)$$

Faisons alors, pour le calcul intégral, le changement de variable : $u = e^t$, ($t \mapsto e^t$ est de classe $\mathcal{C}^1$, bijective).

On a $t = \ln u$ et donc $\mathrm{d}t = \dfrac{1}{u}\mathrm{d}u$ et $e^{-t} = \frac{1}{e^t} = \frac{1}{u}$.
Donc

$$\int_0^K f(e^{-t})\mathrm{d}t = \int_1^{e^K} \frac{1}{u} f\left(\frac{1}{u}\right) \mathrm{d}u \qquad (2)$$

Or, si $0 < u_1 < u_2$, alors $\frac{1}{u_1} > \frac{1}{u_2} > 0$ et $f\left(\frac{1}{u_1}\right) > f\left(\frac{1}{u_2}\right) > 0$ (car f à valeurs dans $\mathbb{R}_+$) donc $\frac{1}{u_1} f\left(\frac{1}{u_1}\right) \underbrace{>}_{\text{positivité de } f} \frac{1}{u_2} f\left(\frac{1}{u_1}\right) > \frac{1}{u_2} f\left(\frac{1}{u_2}\right)$.

Donc $u \mapsto \frac{1}{u} f\left(\frac{1}{u}\right)$ décroissante.

Donc, on a de la même façon que précédemment (pour prouver (1)),
Pour tout $N \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=2}^{N} \frac{1}{k} f\left(\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k+1} f\left(\frac{1}{k+1}\right) \leqslant \int_1^N \frac{1}{u} f\left(\frac{1}{u}\right) \mathrm{d}u \leqslant \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k} f\left(\frac{1}{k}\right) \tag{3}$$

Soit $K \in \mathbb{N}$. On a donc, en notant $N = \lfloor \exp K \rfloor$, donc $N \leqslant e^K \leqslant N+1$:

$$\sum_{k=1}^{K} f(e^{-k}) \underbrace{\leqslant}_{(1)} \int_0^K f(e^{-t})\mathrm{d}t \underbrace{=}_{(2)} \int_1^{e^K} \frac{1}{u} f\left(\frac{1}{u}\right) \mathrm{d}u \underbrace{\leqslant}_{\text{positivité de } \frac{1}{u}f(\frac{1}{u})} \int_1^{N+1} \frac{1}{u} f\left(\frac{1}{u}\right) \mathrm{d}u \underbrace{\leqslant}_{(3)} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} f\left(\frac{1}{k}\right)$$

Donc si $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k} f\left(\frac{1}{k}\right)$ converge, la série à termes positifs $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} f(e^{-k})$ est majorée donc convergente.
Et de même

$$\sum_{k=2}^{N} \frac{1}{k} f\left(\frac{1}{k}\right) \underbrace{\leqslant}_{(3)} \int_1^N \frac{1}{u} f\left(\frac{1}{u}\right) \mathrm{d}u \underbrace{\leqslant}_{\text{positivité de } \frac{1}{u}f(\frac{1}{u})} \int_1^{e^K} \frac{1}{u} f\left(\frac{1}{u}\right) \mathrm{d}u \underbrace{=}_{(2)} \int_0^K f(e^{-t})\mathrm{d}t \underbrace{\leqslant}_{(1)} \sum_{k=0}^{K-1} f(e^{-k})$$

Donc si $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} f(e^{-k})$ converge, la série à termes positifs $\displaystyle\sum_{k\geqslant 2} \frac{1}{k} f\left(\frac{1}{k}\right)$ est majorée donc convergente.

$$\boxed{\sum \frac{1}{n} f\left(e^{-n}\right) \text{ et } \sum \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) \text{ sont de même nature.}}$$

Problème

A. Théorème de convergence monotone

Dans cette partie, on démontre le théorème de convergence monotone (appelé aussi théorème de Beppo-Levi) sur un intervalle du type $[a, +\infty[$. On commence par établir le théorème sur les segments bornées $[a, b]$ avant de généraliser.

1. Soit une suite de fonctions (f_n) définie sur $[a, b]$, KH-intégrable sur $[a, b]$. On suppose que
   - cette suite est croissante, c'est-à-dire : $\forall\, x \in [a, b], \forall\, n \in \mathbb{N},\ f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)$.
   - cette suite est convergente vers une fonction f sur $[a, b]$: $\forall\, x \in [a, b],\ \big(f_n(x)\big)_n \to f(x)$
   - la suite $\left(\int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t\right)$ est majorée par une constante M (indépendante de n).

   On fixe $\epsilon > 0$. Les premières questions permettent surtout ici de s'accorder sur les notations.

   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

   $$\forall\, x \in [a, b], f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x) \quad\implies\quad I_n = \int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b f_{n+1}(t)\mathrm{d}t = I_{n+1}$$

   Donc (I_n) est un suite croissante.
   Par hypothèse, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

   $$I_n = \int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x \leqslant M$$

   Donc (I_n) est bornée.
   D'après le théorème de convergence monotone :

   $$\boxed{(I_n) \text{ est convergente. On note } I \text{ sa limite, alors } I = \sup(I_n).}$$

   Et, pour ϵ (fixé précédemment) :

   $$\boxed{\exists\, n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall\, n \geqslant n_0,\ I - \epsilon \leqslant I_{n_0} \leqslant I_n \leqslant I_{n+1} \leqslant I}$$

   (b) De même, pour x fixé, la suite $(f_n(x))_n$ converge, de manière croissante, vers $f(x)$, donc :

   $$\exists\, N_1(x) \text{ tel que } \forall\, n \geqslant N_1(x),\ f(x) - \epsilon \leqslant f_n(x) \leqslant f(x)$$

   En prenant $N_0(x) = \max(N_1(x), n_0)$:

   $$\boxed{\exists\, N(x) \geqslant n_0 \text{ tel que } \forall\, n \geqslant N(x),\ f(x) - \epsilon \leqslant f_n(x) \leqslant f(x)}$$

(c) On fixe $n \in \mathbb{N}$, on considère alors $\epsilon_n = \frac{\epsilon}{2^n}$.
Par définition de l'intégrale I_n de f_n sur $[a, b]$,

$$\boxed{\text{il existe } \delta_n \text{, jauge sur } [a,b] \text{ tel que } \forall\ \sigma_p = \big(([x_0, x_1], t_1), \dots ([x_{p-1}, x_p], t_p)\big)\ \delta_n\text{-fine, } |S(f_n, \sigma_p) - I_n| \leqslant \epsilon_n = \frac{\epsilon}{2^n}.}$$

(d) On considère alors $\delta : [a, b] \to \mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto \delta_{N(x)}(x)$.
Soit $\sigma_p = \big(([x_0, x_1], t_1), \dots ([x_{p-1}, x_p], t_p)\big)$, une subdivision pointée δ-fine.
Soit $n \in \mathbb{N}$, on compare f à son intégrale potentielle, en passant par $f_{N(t_k)}$ (pour tout k) :

$$\begin{aligned}
|S(f, \sigma_p) - I| &= \Big| \sum_{k=1}^{p} (x_k - x_{k-1})(f(t_k) - f_{N(t_k)}(t_k)) + \sum_{k=1}^{p} \left((x_k - x_{k-1}) f_{N(t_k)}(t_k) - \int_{x_{k-1}}^{x_k} f_{N(t_k)}(t)\mathrm{d}t \right) \\
&\qquad + \sum_{k=1}^{p} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f_{N(t_k)}(t)\mathrm{d}t - I \Big| \\
&\leqslant \Big| \sum_{k=1}^{p} (x_k - x_{k-1})(f(t_k) - f_{N(t_k)}(t_k)) \Big| + \Big| \sum_{k=1}^{p} \left((x_k - x_{k-1}) f_{N(t_k)}(t_k) - \int_{x_{k-1}}^{x_k} f_{N(t_k)}(t)\mathrm{d}t \right) \Big| \\
&\qquad + \Big| \sum_{k=1}^{p} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f_{N(t_k)}(t)\mathrm{d}t - I \Big|
\end{aligned}$$

On va s'intéresser à chacun des morceaux, cela nous donnera une condition sur n...

— Pour le premier morceau :

$$\left| \sum_{k=1}^{p} (x_k - x_{k-1})(f(t_k) - f_{N(t_k)}(t_k)) \right| \leqslant \sum_{k=1}^{p} |x_k - x_{k-1}|\epsilon = \epsilon \sum_{k=1}^{p} (x_k - x_{k-1}) = \epsilon(b - a)$$

— Pour le deuxième morceau (par définition de $N(t_k)$) :

$$\sum_{k=1}^{p} \left((x_k - x_{k-1}) f_{N(t_k)}(t_k) - \int_{x_{k-1}}^{x_k} f_{N(t_k)}(t)\mathrm{d}t \right)$$

on reconnait p fois le lemme d'Henstock appliquée aux fonctions $f_{N(t_k)}$.
Or on peut avoir plusieurs fois une même fonction $f_{N(t_k)}$ (si $N(t_k) = N(t_h)$), on les regroupe donc ainsi, on trouve :

$$\left| \sum_{k=1}^{p} \left((x_k - x_{k-1}) f_{N(t_k)}(t_k) - \int_{x_{k-1}}^{x_k} f_{N(t_k)}(t)\mathrm{d}t \right) \right| \leqslant \sum_{n=n_0}^{+\infty} \sum_{N(t_k)=n} \left| (x_k - x_{k-1}) f_{N(t_k)}(t_k) - \int_{x_{k-1}}^{x_k} f_{N(t_k)}(t)\mathrm{d}t \right|$$

$$\leqslant \sum_{n=n_0}^{+\infty} \sum_{N(t_k)=n} \left| (x_k - x_{k-1}) f_n(t_k) - \int_{x_{k-1}}^{x_k} f_n(t)\mathrm{d}t \right|$$

On notera que souvent $\{t_k \mid N(t_k) = n\} = \emptyset$, puisqu'on a initialement une somme finie.
Or d'après le lemme d'Henstock et d'après la définition de la jauge δ_n associée à $\frac{\epsilon}{2^n}$:

$$\left| \sum_{k=1}^{p} \left((x_k - x_{k-1}) f_{N(t_k)}(t_k) - \int_{x_{k-1}}^{x_k} f_{N(t_k)}(t)\mathrm{d}t \right) \right| \leqslant \sum_{n=n_0}^{+\infty} \frac{\epsilon}{2^n} = \frac{\epsilon}{2^{n_0}(1 - \frac{1}{2})} \leqslant 2\epsilon$$

— Pour le troisième morceau :
Pour tout k, $N(t_k) \geqslant n_0$, donc $f_{n_0}(t) \leqslant f_{N(t_k)}(t) \leqslant f(t)$,

$$I - I_{n_0} = I - \int_a^b f_{n_0}(t)\mathrm{d}t = I - \sum_{k=1}^{p} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f_{n_0}(t)\mathrm{d}t \geqslant I - \sum_{k=1}^{p} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f_{N(t_k)}(t)\mathrm{d}t \geqslant 0$$

Donc

$$\Big| \sum_{k=1}^{p} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f_{N(t_k)}(t)\mathrm{d}t - I \Big| \leqslant I - I_{n_0} \leqslant \epsilon$$

Donc pour tout subdivision δ-fine, $|S(f, \sigma_p) - I| \leqslant [(b - a) + 2 + 1]\epsilon$.
Ceci est vrai pour tout $\epsilon > 0$

$$\boxed{\text{Ainsi } f \text{ est intégrable sur } [a, b] \text{ et que } \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = I}$$

2. Sur l'intervalle $[a,+\infty[$.

(a) Soit $b>0$.

Remarques !

Sur $[a,b]$, $(f_{n|[a,b]})_n$ vérifie les conditions du théorème précédent...
Enfin, presque, on a un soucis pour la majoration de l'intégrale sur $[a,b]$, il nous faudrait enlever un terme dont on soit sûr qu'il est positive.
Comme f_n est croissante, on va considérer, non pas f_n directement, mais $f_n - f_0$ dont on est certain de la positivité.

On note donc $g_n : [a,b] \to \mathbb{R}_+, t \mapsto f_n(t) - f_0(t)$. Alors

- $\forall\, x \in [a,b], \forall\, n \in \mathbb{N},\ g_n(x) = f_n(x) - f_0(x) \leqslant f_{n+1}(x) - f_0(x) = g_{n+1}(x)$,
  par croissance de f_n sur $[a,+\infty[$ donc sur $[a,b]$.
  La suite (g_n) est croissante.
- $\forall\, x \in [a,b] \subset [a,+\infty[,\ \big(g_n(x)\big)_n = \big(f_n(x) - f_0(x)\big)_n \to f(x) - f_0(x)$
  Donc (g_n) est convergente vers une fonction $f - f_0 (\geqslant 0)$ sur $[a,b]$.
- Par relation de Chasles (avec reste) :

$$\int_a^b g_n(t)\mathrm{d}t = \int_a^b (f_n - f_0) = \underbrace{\int_a^{+\infty} (f_n - f_0)(t)\mathrm{d}t}_{\leqslant M} - \underbrace{\int_a^{+\infty} (f_n - f_0)(t)\mathrm{d}t}_{\geqslant 0} \leqslant M$$

Donc la suite $\left(\int_a^b g_n(t)\mathrm{d}t\right)$ est majorée par une constante M.

On peut appliquer le résultat des questions précédentes :

$$\boxed{\text{On peut donc appliquer le théorème de convergence monotone à } ((f_n - f_0)_{|[a,b]})_n.}$$

(b) On peut alors affirmer que, pour tout $b>0$, $f - f_0 = \lim(f_n - f_0)$ est intégrable sur $[a,b[$ et que $\displaystyle\int_a^b f(t) - f_0(t)\mathrm{d}t = \lim_n \int_a^b (f_n - f_0)(t)\mathrm{d}t$.

Notons, $I_b = \displaystyle\lim_n \int_a^b (f_n - f_0)(t)\mathrm{d}t$. Pour $b' > b$,

$$I_{b'} - I_b = \lim_n \int_a^{b'} (f_n - f_0)(t)\mathrm{d}t - \lim_n \int_a^b (f_n - f_0)(t)\mathrm{d}t = \int_b^{b'} \underbrace{(f_n - f_0)(t)}_{\geqslant 0}\mathrm{d}t \geqslant 0$$

par positivité de l'intégrale. Donc $(I_b)_{b\in\mathbb{R}}$ est une famille croissante.

Elle est par ailleurs bornée par M d'après la question précédente.

Donc (I_b) admet une limite pour $b \to \infty$. On la note I.

Enfin, d'après la définition de l'intégrale sur $[a,+\infty[$ (convergence pour $b\to\infty$) :

$f_n - f_0$ est KH-intégrable sur $[a,+\infty[$, et $\displaystyle\int_a^{+\infty} (f - f_0)(t)\mathrm{d}t = \lim_{b\to+\infty} I_b$.

En additionnant, la fonction f_0 étant intégrable sur $[a,+\infty[$: f est intégrable.

et pour tout $b > a$, $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = I_b + \int_a^b f_0 \underset{b\to+\infty}{\longrightarrow} \lim I_b + \int_a^{+\infty} f_0(t)\mathrm{d}t$.

On en déduit le théorème de convergence monotone (Beppo Levi) sur tout intervalle de type $[a,+\infty[$.

$$\boxed{f = \lim f_n \text{ est intégrable sur } [a,+\infty[\text{ et } \int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \int_a^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t}$$

B. Relation de récurrence

Soit $\alpha > 1$.

1. Fonction Zéta de Riemann.
   La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^x}$ converge si et seulement si $x > 1$.

$$\boxed{\text{Donc } \mathcal{D}_\zeta =]-1,+\infty[\text{ avec } \zeta : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}}$$

2. Soit $a > 0$. Fonction Gamma d'Euler.
   (a) Par comparaison classique, $\lim_{x \to +\infty} x^{a+2}e^{-x} = 0$.
   Donc il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \geqslant M$, $x^{a+2}e^{-x} \leqslant 1$.

   $$\boxed{\text{Il existe } M \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall\, x \geqslant M,\ x^a e^{-x} \leqslant \frac{1}{x^2}.}$$

   (b) Soit $\epsilon > 0$.
   Pour tout $x \geqslant b = \max(M, \frac{1}{\epsilon})$ et $c > b$,

   $$0 \leqslant \int_b^c x^a e^{-x}\mathrm{d}x \leqslant \int_b^c \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = \left[\frac{-1}{x}\right]_b^c = \frac{1}{b} - \frac{1}{c} \leqslant \frac{1}{b} \leqslant \epsilon$$

   $$\boxed{\text{Pour tout } \epsilon > 0, \text{ il existe } b > 0 \text{ tel que } \forall\, c > b,\ \left|\int_b^c x^\alpha e^{-x}\mathrm{d}x\right| \leqslant \epsilon}$$

   (c) Soit $b > 0$,

   Remarques !
   On a besoin d'un candidat I. Comme $x \mapsto x^a e^{-x} \geqslant 0$, on doit pouvoir proposer une limite I

   L'application $x \mapsto x^a e^{-x}$ est positive sur $\mathbb{R}_+$, donc sa primitive $F : x \mapsto \int_0^x t^a e^{-t}\mathrm{d}t$ est croissante.
   Soit $\epsilon = 1$, il existe b_1 tel que $\forall\, c > b_1$, $\left|\int_{b_1}^c x^a e^{-x}\mathrm{d}x\right| < 1$.
   Donc pour tout $c \geqslant b_1$,

   $$|F(c)| = \left|F(b_1) + \int_{b_1}^c x^a e^{-x}\mathrm{d}x\right| \leqslant |F(b_1)| + 1$$

   Ainsi F est majorée à partir d'un certain rang. Comme elle est croissante, elle est majorée.
   Par conséquent F admet une limite en $+\infty$

   $$\boxed{x \mapsto x^a e^{-x} \text{ est KH-intégrable sur } [0, +\infty[.}$$

On note, pour tout $a > 0$, $\Gamma(a+1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^a e^{-x}\mathrm{d}x$.

3. Etude de $\displaystyle\int_0^{+\infty} u_n(x)\mathrm{d}x$.
   (a) Soit $b > 0$.

   $$\boxed{u_n \text{ est continue donc KH-intégrable sur } [0, b].}$$

   Puis, on réalise un changement de variable $u = nx$ ($x \mapsto nx$ est $\mathcal{C}^1$-bijectif) :

   $$\boxed{\int_0^b u_n(x)\mathrm{d}x = \int_0^{nb} \frac{1}{n^\alpha} u^\alpha e^{-u}\frac{\mathrm{d}u}{n} = \frac{1}{n^{\alpha+1}} \times \int_0^{nb} x^\alpha e^{-x}\mathrm{d}x}$$

   Ici $N(\alpha, n) = \frac{1}{n^{\alpha+1}}$
   (b) Comme f est KH-intégrable sur $[0, +\infty[$, il en est donc de même de u_n et mieux :

   $$\boxed{\int_0^{+\infty} u_n(x)\mathrm{d}x = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{n^{\alpha+1}}}$$

4. Application du lemme de Beppo-Levi.
   (a) Soit $x \in \mathbb{R}$ (fixé), $U_{n+1}(x) - U_n(x) = u_{n+1}(x) = x^\alpha e^{-(n+1)x} > 0$.

   $$\boxed{\text{Donc la suite } (U_n) \text{ est croissante.}}$$

   (b) Soit $x \in \mathbb{R}$ (fixé toujours).
   La suite $(u_n(x))_n$ est géométrique : $u_{n+1}(x) = e^{-x}u_n(x)$, de raison $e^{-x}(< 1$, pour $x > 0)$.

   $$\boxed{\text{Ainsi } \sum u_n(x) \text{ est convergente et } \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = x^\alpha \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} = \frac{x^\alpha}{e^x - 1}.}$$

(c) On peut alors appliquer le théorème de Beppo-Levi sur l'intervalle (**doublement** ouvert) $]0,+\infty[$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{e^x-1}\mathrm{d}x = \int_{]0,+\infty[} \lim_{n\to+\infty} U_n(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \int_{]0,+\infty[} \sum_{k=1}^{n} u_k(x)\mathrm{d}x$$

Comme la somme est finie (à droite), on peut intervertir :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{e^x-1}\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_{]0,+\infty[} u_k(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{k^{\alpha+1}}$$

$$\boxed{\forall\ n \in \mathbb{N}, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{e^x-1}\mathrm{d}x = \Gamma(\alpha+1)\zeta(\alpha+1)}$$