MPSI 3 - Fermat 22.04.22
2021-2022

Devoir à la maison n°12
CORRECTION

Exercice 687 - Déterminant de la matrice de Cauchy

1. Faisons $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, ce qui laisse le déterminant invariant :

$$C(a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3) = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \frac{1}{a_1+b_3} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \frac{1}{a_2+b_3} \\ \frac{1}{a_3+b_1} & \frac{1}{a_3+b_2} & \frac{1}{a_3+b_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \frac{1}{a_1+b_3} \\ \frac{a_1-a_2}{(a_2+b_1)(a_1+b_1)} & \frac{a_1-a_2}{(a_2+b_2)(a_1+b_2)} & \frac{a_1-a_2}{(a_2+b_3)(a_1+b_3)} \\ \frac{a_1-a_3}{(a_3+b_1)(a_1+b_1)} & \frac{a_1-a_3}{(a_3+b_2)(a_1+b_2)} & \frac{a_1-a_3}{(a_3+b_3)(a_1+b_3)} \end{vmatrix}$$

Factorisons les colonnes par $\frac{1}{a_1+b_j}$ et les lignes par $(a_1 - a_i)$

$$C(a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3) = \frac{(a_1-a_2)(a_1-a_3)}{(a_1+b_1)(a_1+b_2)(a_1+b_3)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \frac{1}{a_2+b_3} \\ \frac{1}{a_3+b_1} & \frac{1}{a_3+b_2} & \frac{1}{a_3+b_3} \end{vmatrix}$$

Puis, faisons $C_2 \leftarrow C_2 - C_1$ et $C_3 \leftarrow C_3 - C_1$.

$$C(a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3) = \frac{(a_1-a_2)(a_1-a_3)}{(a_1+b_1)(a_1+b_2)(a_1+b_3)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{b_1-b_2}{(a_2+b_2)(a_2+b_1)} & \frac{b_1-b_3}{(a_2+b_3)(a_2+b_1)} \\ \frac{1}{a_3+b_1} & \frac{b_1-b_2}{(a_3+b_2)(a_3+b_1)} & \frac{b_1-b_3}{(a_3+b_3)(a_3+b_1)} \end{vmatrix}$$

$$C(a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3) = \frac{(a_1-a_2)(a_1-a_3)(b_1-b_2)(b_1-b_3)}{(a_1+b_1)(a_1+b_2)(a_1+b_3)(a_2+b_1)(a_3+b_1)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{a_2+b_2} & \frac{1}{a_2+b_3} \\ 1 & \frac{1}{a_3+b_2} & \frac{1}{a_3+b_3} \end{vmatrix}$$

Développons par rapport à la première ligne (ou par blocs) :

$$C(a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3) = \frac{(a_1-a_2)(a_1-a_3)(b_1-b_2)(b_1-b_3)}{(a_1+b_1)(a_1+b_2)(a_1+b_3)(a_2+b_1)(a_3+b_1)} \begin{vmatrix} \frac{1}{a_2+b_2} & \frac{1}{a_2+b_3} \\ \frac{1}{a_3+b_2} & \frac{1}{a_3+b_3} \end{vmatrix}$$

De même avec $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$:

$$C(a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3) = \frac{(a_1-a_2)(a_1-a_3)(b_1-b_2)(b_1-b_3)}{(a_1+b_1)(a_1+b_2)(a_1+b_3)(a_2+b_1)(a_3+b_1)} \begin{vmatrix} \frac{1}{a_2+b_2} & \frac{1}{a_2+b_3} \\ \frac{a_2-a_3}{(a_3+b_2)(a_2+b_2)} & \frac{a_2-a_3}{(a_3+b_3)(a_2+b_3)} \end{vmatrix}$$

Et la factorisation :

$$C(a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3) = \frac{(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_2-a_3)(b_1-b_2)(b_1-b_3)}{(a_1+b_1)(a_1+b_2)(a_1+b_3)(a_2+b_1)(a_2+b_2)(a_2+b_3)(a_3+b_1)} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{a_3+b_2} & \frac{1}{a_3+b_3} \end{vmatrix}$$

Et la soustraction $C_2 \leftarrow C_2 - C_1$

$$C(a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3) = \frac{(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_2-a_3)(b_1-b_2)(b_1-b_3)}{(a_1+b_1)(a_1+b_2)(a_1+b_3)(a_2+b_1)(a_2+b_2)(a_2+b_3)(a_3+b_1)} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{a_3+b_2} & \frac{b_2-b_3}{(a_3+b_3)(a_3+b_2)} \end{vmatrix}$$

$$\boxed{C(a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3) = \frac{(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_2-a_3)(b_1-b_2)(b_1-b_3)(b_2-b_3)}{(a_1+b_1)(a_1+b_2)(a_1+b_3)(a_2+b_1)(a_2+b_2)(a_2+b_3)(a_3+b_1)(a_3+b_2)(a_3+b_3)}}$$

2. Le dénominateur de F est un produit de monôme $X+b_i$, donc n'a aucune racine double.
Donc F admet $b_1, b_2 \ldots b_p$, comme p pôles simples.
Le degré du numérateur de F est strictement plus petit que celui du numérateur donc, la décomposition en éléments simples de F est de la forme $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} \frac{\alpha_k}{X+b_k}$.
Avec $\alpha_k = ((X+b_k)\times F)(-b_k) = \dfrac{\displaystyle\prod_{j=1}^{p-1}(-b_k-a_j)}{\displaystyle\prod_{h\neq k}(b_h-b_k)} = \dfrac{\displaystyle\prod_{j=1}^{p-1}(a_j+b_k)}{\displaystyle\prod_{h\neq k}(b_k-b_h)}$.
(Attention le produit n'est pas sur les mêmes termes, mais chacun est composé de $p-1$ termes.)

3. Dans le calcul de D, la dernière colonne est composée d'une série de 0 ($F(a_k)=0$, si $k<p$), sauf le dernier terme.
En faisant un développement par rapport à cette dernière colonne, on trouve :
$$D = (-1)^{p+p}\times F(a_p)\times C(a_1,a_2\ldots a_{p-1},b_1,\ldots b_{p-1})$$
Par ailleurs, si l'on reprend la décomposition en éléments simples de F :
$F = \displaystyle\sum_{k=1}^{p}\frac{\alpha_k}{X+b_k}$ donc $F(a_i) = \displaystyle\sum_{k=1}^{p}\frac{\alpha_k}{a_i+b_k}$, avec α_k indépendant de i.
Ainsi, l'opération élémentaire : $C_p \leftarrow C_p - \displaystyle\sum_{k=1}^{p-1}\alpha_k C_k$ conduit à la colonne dont l'élément en ligne i vaut
$$F(a_i) - \sum_{k=1}^{p-1}\frac{\alpha_k}{a_i+b_k} = \frac{\alpha_p}{a_i+b_p} = \alpha_p\frac{1}{a_i+b_p}$$
On retrouve alors, par linéarité avec la p-eme colonne $D = \alpha_p\times C(a_1,\ldots a_p,b_1,\ldots b_p)$. Par double calcul :
$$\boxed{C(a_1,\ldots a_p,b_1,\ldots b_p) = D = \frac{F(a_p)}{\alpha_p}\times C(a_1,a_2\ldots a_{p-1},b_1,\ldots b_{p-1})}$$

4. On peut faire une récurrence, ou un télescopage sous forme de produit. Mais on va d'abord commencer par appeler F_r, la fraction rationnelle $\dfrac{\prod_{j=1}^{r-1}(X-a_j)}{\prod_{j=1}^{r}(X+b_j)}$.
On a pour tout $r\in\mathbb{N}_p$
$$\frac{C(a_1,\ldots a_r,b_1,\ldots b_r)}{C(a_1,a_2\ldots a_{r-1},b_1,\ldots b_{r-1})} = \frac{F_r(a_r)}{\alpha_r}$$
$$\frac{C(a_1,\ldots a_p,b_1,\ldots b_p)}{C(a_1,b_1)} = \prod_{r=2}^{p}\frac{C(a_1,\ldots a_r,b_1,\ldots b_r)}{C(a_1,a_2\ldots a_{r-1},b_1,\ldots b_{r-1})} = \prod_{r=2}^{p}\frac{F_r(a_r)}{\alpha_r}$$
$$C(a_1,\ldots a_p,b_1,\ldots b_p) = \frac{1}{a_1+b_1}\prod_{r=2}^{p}\frac{F_r(a_r)}{\alpha_r} = \frac{1}{a_1+b_1}\prod_{r=2}^{p}\frac{\prod_{j=1}^{r-1}(a_r-a_j)\prod_{h<r}(b_r-b_h)}{(a_r+b_r)\prod_{j=1}^{r-1}(a_r+b_j)(a_j+b_r)}$$
$$\boxed{C(a_1,\ldots a_p,b_1,\ldots b_p) = \frac{\displaystyle\prod_{j<r}(a_r-a_j)(b_r-b_j)}{\displaystyle\prod_{j,r}(a_r+b_j)}}$$

5. Dans la cas de la matrice de Hilbert, $a_i=i$ et $b_j=j-1$ (par exemple).
On applique directement la formule, et comme
$$\prod_{i<j}(a_j-a_i) = \prod_{i<j}(j-i) = (n-1)!\times(n-2)!\times\ldots 1! = \prod_{k=1}^{n-1}k! = \prod_{i<j}(b_j-b_i)$$
$$\prod_{i,j}(a_i+b_j) = \prod_{i,j}(i+j-1) = \prod_{i=1}^{n}\left(\prod_{j=1}^{n}(i+j-1)\right) = \prod_{i=1}^{n}\frac{(i+n-1)!}{(i-1)!} = \frac{\displaystyle\prod_{k=n}^{2n-1}k!}{\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}k!}$$

$$\boxed{\det\left(\frac{1}{i+j-1}\right) = \frac{\left(\prod_{k=0}^{n-1} k!\right)^3}{\prod_{k=n}^{2n-1} k!} = \frac{\left(\prod_{k=0}^{n-1} k!\right)^4}{\prod_{k=1}^{2n-1} k!}}$$

Exercice 690 -Théorème de Cayley-Hamilton

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On définit pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\chi(t) = \det(tI_n - M)$$

appelé la fonction caractéristique de M. Dans tout le problème, on suppose que $M = (a_{i,j})$.

1. $\mu_1 = (-1)^1 \sum_{I \subset \binom{\mathbb{N}_n}{n-1}} \det M^{I \wedge I}$.

   Dans ce cas I est un sous-ensemble de $\mathbb{N}_n$ de cardinal $(n-1)$,
   il s'agit donc des n ensembles $I_k = \mathbb{N}_n \backslash \{k\}$, donc $M^{I_k \wedge I_k} = a_{k,k}$.
   Par conséquent : $\mu_1 = -\sum_{k=1}^{n} a_{k,k} = -\mathrm{tr}(M)$

   Et $\mu_n = (-1)^n \sum_{I \subset \binom{\mathbb{N}_n}{n-n}} \det M^{I \wedge I} = (-1)^n \det M^{\emptyset \wedge \emptyset} = (-1)^n \det M$

$$\boxed{\mu_1 = -\mathrm{tr}(M) \text{ et } \mu_n = (-1)^n \det M.}$$

2. Comme $I_n = (\delta_{i,j})$, on peut écrire (formule du déterminant) : $\chi_M(t) = \sum_{\sigma \in S_n} \left(\epsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} (\delta_{\sigma(i),i} t - a_{\sigma(i),i})\right)$.

   Il s'agit donc d'une somme de produits de n monômes (de degré 1 ou 0) en t. C'est donc bien un polynôme.
   Par ailleurs ce polynôme est au plus de degré n.
   En effet, chacun des monômes est de degré 1, au plus
   et on a exactement un produit de n monômes de degré 1 pour $\sigma = \mathrm{id}$.
   Soit $k \in [\![0, n]\!]$, cherchons maintenant quelle est la valeur du coefficients devant t^k (noté $[\chi_M]_k$).
   Dans le développement précédent, pour que t^k, il s'agit de prendre :
   — k fois t dans le développement donc cela apparait pour toute permutation σ qui laisse fixe au moins k valeurs de $[\![1, n]\!]$.
   Par exemple on peut considérer $\sigma(i_1) = i_1 \ldots \sigma(i_k) = i_k$.

   — A chaque ensemble $\{i_1, \ldots i_k\}$ fixé par σ, on trouve alors associé à $t^k = t\delta i_1, i_1 \times \ldots t\delta_{i_k,i_k}$, le nombre

$$\epsilon(\sigma) \prod_{j \notin \{i_1, i_2, \ldots i_k\}} (-a_{\sigma(j),j}) = (-1)^{n-k} \epsilon(\sigma) \prod_{j \notin \{i_1, i_2, \ldots i_k\}} a_{\sigma(j),j}$$

   Notons alors $I = \{i_1, i_2, \ldots i_k\}$ et considérons alors σ' la permutation de $\mathbb{N}_n \backslash I$
   telle que $\forall\ j \notin I$, $\sigma'(j) = \sigma(j)$,
   alors les transpositions qui décomposent σ décomposent aussi σ' et donc $\epsilon(\sigma) = \epsilon(\sigma')$
   On a donc associé à $t^k = t\delta i_1, i_1 \times \ldots t\delta_{i_k,i_k}$, le nombre

$$(-1)^{n-k} \epsilon(\sigma') \prod_{j \notin I} a_{\sigma'(j),j} = (-1)^{n-k} \det(A^{I \wedge I})$$

   Insistons : il y a autant de I que de $\{i_1, \ldots i_k\}$.
   Globalement, on a donc comme coefficient devant t^k :

$$\sum_{I \subset \binom{N_n}{k}} (-1)^{n-k} \det(A^{I \wedge I}) = \mu_k$$

   On peut conclure que

$$\boxed{\chi_M(t) = t^n + \mu_1 t^{n-1} + \mu_2 t^{n-2} + \cdots + \mu_{n-1} t + \mu_n}$$

   On notera que $\mu_0 = 1$ (déterminant de la matrice vide...)

3. Par définition : $L(t) = {}^t\operatorname{com}(tI_n - M)$.
Pour construire la comatrice, on fait un calcul de déterminant pour chacun des coefficients de cette matrice.
Donc pour tout $i, j \in \mathbb{N}_n$, $\operatorname{Coef}_{i,j}(L(t))$ est un polynôme en t.
Il est obtenu en supprimant une ligne et une colonne de $tI_n - M$,
donc toujours au moins un t dans le calcul du déterminant.
Ainsi le polynôme obtenu est de degré $\deg(\chi_M) - 1 = n - 1$.
Au lieu d'écrire la matrice en coefficient polynomiale $A = (P_{i,j}(t))_{i,j}$,
on écrit la matrice A sous la forme $A = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} A_k t^k$, avec $A_k = ([P_{i,j}]_k)_{i,j}$,
c'est-à-dire $A_k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ comme matrice des coordonnées de t^k dans $P_{i,j}$,
Et on peut affirmer :

$$\boxed{L(t) = {}^t\operatorname{com}(tI_n - M) \text{ est une fonction polynomiale en } t, \text{ de degré } n-1 \text{ et à coefficients dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).}$$

4. Soit $t \in \mathbb{K}$.
Un résultat du cours énonce que pour tout A, ${}^t\operatorname{com}(A) \times A = \det(A) I_n$, donc pour $A = tI_n - M$:

$$\boxed{\forall\, t \in \mathbb{K}, \qquad L(t) \times (tI_n - M) = \det(tI_n - M) I_n = \chi_M(t) \times I_n}$$

5. On cherche à démontrer la relation de Cayley-Hamilton : $\chi_M(M) = 0$

Remarques !
Il ne suffit pas de dire on prend M à la place de t et « pouf » $\det(tI_n - M) = \det(M - M) = 0\dots$
En effet, ici nous avons une relation numérique et non matricielle.
Il faut donc faire le calcul coefficient par coefficient...

Et par ailleurs, en conservant la notation $L(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} A_k t^k$ avec $A_k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a

$$L(t)(tI_n - M) = \sum_{k=0}^{n} A_k t^k (tI_n - M) = \sum_{k=0}^{n} A_k t^{k+1} - A_k M t^k = A_{n-1} t^n + \sum_{h=1}^{n-1} (A_{h-1} - A_h M) t^h - A_0 M$$

$$= \chi_M(t) I_n = t^n I_n + \sum_{h=0}^{n-1} \mu_{n-h} I_n t^h$$

L'égalité de deux polynômes permet d'affirmer une égalité des coefficients.
Donc (si besoin, en prenant $A_{-1} = O_n$) :

$$A_{n-1} = I_n \qquad \text{et } \forall\, h \in [\![0, n-1]\!], (A_{h-1} - A_h M) = \mu_{n-h} I_n$$

Reste alors à calculer χ_M. En notant $M^0 = I_n$, on a :

$$\chi_M(M) = M^n + \sum_{k=1}^{n} \mu_k M^{n-k} = M^n + \sum_{h=0}^{n-1} \mu_{n-h} M^h = M^n + \sum_{h=0}^{n-1} (A_{h-1} - A_h M) M^h$$

$$= M^n + \sum_{h=0}^{n-1} A_{h-1} M^h - \sum_{h=0}^{n-1} A_h M^{h+1} = M^n + A_{-1} I_n - A_{n-1} M^n$$

par télescopage.
Or $A_{-1} = 0$ et $A_{n-1} = I_n$.

$$\boxed{\text{On trouve donc la relation de Cayley-Hamilton : } \chi_M(M) = 0}$$

Remarques !
Cela assure que pour toute matrice A de taille n, il existe (au moins) un polynôme de degré n qui annule A.
Cela n'était pas évident a priori car $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui est un espace de dimension n^2.