

Devoir surveillé n°1

Durée de l'épreuve : 3 heures
La calculatrice est interdite

La notation tiendra particulièrement compte de la **qualité de la rédaction, de la précision des raisonnements et de l'énoncé des formules utilisées**. Les réponses aux questions seront **numérotées et séparées par un trait horizontal**. Les résultats essentiels devront être **encadrés ou soulignés**.

BON COURAGE

Exercice 1

1. Calculer explicitement en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=n}^{2n} (-2)^k$. L'expression finale ne fera apparaître que des entiers, des puissances de -1 et de 2 .
2. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $T_n = \sum_{n < i \leq j \leq 2n} \frac{i}{n+j+1}$.
3. Écrire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, en utilisant la notation factorielle, $P_n = \prod_{k=1}^{2n} \frac{4k+2}{3k}$.

Exercice 2

1. Soit p un entier non nul et $f(p) = p^2 + p + 1$. Que vaut $f(p-1)$?
2. On pose $u_p = \frac{f(p)}{p(p+1)}$. Exprimer, pour $p \geq 2$, $\frac{p^3-1}{p^3+1}$ en fonction de u_p et u_{p-1} .
3. Déterminer, en fonction de l'entier n , $n \geq 2$, la valeur de $\prod_{p=2}^n \frac{p^3-1}{p^3+1}$.

Problème. Propriétés cyclotomiques

On considère $n \in \mathbb{N}^*$ et on pose $\omega = \exp(2i\frac{\pi}{n})$.

Le symbole i est réservé exclusivement dans ce problème pour désigner le nombre complexe bien connu vérifiant $i^2 = -1$.

$\mathbb{U}$ désigne l'ensemble des nombres complexes de module 1.

A. Calculs préliminaires

1. Exprimer, pour m, k et p entiers naturels, la partie réelle de $(1 + \omega^k)^m \omega^{-kp}$ à l'aide de la fonction cosinus et des paramètres m, k et p .

Pour tout $r \in \mathbb{Z}$, posons $S_r = \sum_{k=0}^{n-1} (\omega^k)^r$.

2. Résoudre l'équation d'inconnue $p \in \mathbb{Z}$, $\omega^p = 1$.
3. En déduire le calcul de S_r en fonction de $r \in \mathbb{Z}$.

B. Une première inégalité

Soient a et b deux nombres complexes.

1. Calculer, en fonction de a, b et n uniquement, $\sum_{k=0}^{n-1} (a + \omega^k b)$.

2. Montrer que $n|a| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |a + \omega^k b|$.
3. Montrer que $\sum_{k=0}^{n-1} |a + \omega^k b| = \sum_{h=0}^{n-1} |b + \omega^h a|$.
4. En déduire que $|a| + |b| \leq \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |a + \omega^k b|$.

C. Calculs de sommes trigonométriques

1. En utilisant la formule du binôme de Newton, montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\sum_{k=1}^n (\omega^k + z)^n = n(z^n + 1)$.
2. En appliquant la formule ci-dessus pour les valeurs $z = 1$ et $z = -1$, donner des expressions simples de

$$C = \sum_{k=1}^n (-1)^k \cos^n \frac{k\pi}{n} \quad S = \sum_{k=1}^n (-1)^k \sin^n \frac{k\pi}{n}$$

D. Transformation de Fourier

On considère une suite finie $A = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ d'éléments de $\mathbb{C}$.
On lui associe la suite $B = (b_0, b_1, \dots, b_{n-1})$ d'éléments de $\mathbb{C}$ vérifiant :

$$\forall r \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \quad b_r = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \omega^{rk}$$

1. (a) Calculer $(b_0, b_1, \dots, b_{n-1})$ dans le cas où $a_0 = a_1 = \dots = a_{n-1} = 1$.
(b) Calculer $(b_0, b_1, \dots, b_{n-1})$ dans le cas où $a_0 = 1$ et $a_1 = \dots = a_{n-1} = 0$.
(c) Calculer $(b_0, b_1, \dots, b_{n-1})$ dans le cas où $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, a_k = \omega^k$.
2. Montrer que, pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$,

$$a_k = \frac{1}{n} \sum_{h=0}^{n-1} b_h \omega^{-kh}$$

E. Applications de la transformation de Fourier

1. Application 1.
Soit $m \in \mathbb{N}^*$, fixé. Pour tout couple d'entiers $(p, n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $p < n$, on définit :

$$S_{p,n} = \sum_{k \in \llbracket 0, m \rrbracket \mid k \equiv p[n]} \binom{m}{k}$$

- (a) Exprimer $(1+1)^m$ et $(1-1)^m$ à l'aide de $S_{0,2}$ et $S_{1,2}$ puis en déduire les valeurs de $S_{0,2}$ et $S_{1,2}$.

Considérons $(p, n) \in \mathbb{N}^2$ tels que $p < n$.

On note, pour tout $r \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $T_{r,n} = \sum_{k=0}^{n-1} S_{k,n} \omega^{rk}$.

- (b) Montrer que, pour tout $r \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $T_{r,n} = (1 + \omega^r)^m$.
- (c) En déduire que, pour tout $p \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$,

$$S_{p,n} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (1 + \omega^k)^m \omega^{-kp}$$

puis, à l'aide de la question 1 de la partie A, donner une expression de $S_{p,n}$ comme une somme de nombres réels.

2. Application 2.

Soit $f : x \mapsto \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$, une fonction polynomiale définie sur $\mathbb{C}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$.

On suppose qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $z \in \mathbb{U}$, $|f(z)| \leq M$.

En exploitant la famille des nombres $b_r = f(\omega^r)$ pour $r \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, montrer que

$$\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \quad |a_k| \leq M$$

Exercice 1

1. Calculer explicitement en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=n}^{2n} (-2)^k$.

Il s'agit de la somme de $n+1$ termes consécutifs de la suite géométrique de raison (-2) et de premier terme 1 à partir du terme d'indice $n : (-2)^n$:

$$S_n = (-2)^n \frac{1 - (-2)^{n+1}}{1 - (-2)} = \frac{(-2)^n - (-2)^{2n+1}}{3} = \frac{(-1)^n 2^n - (-1)^{2n+1} 2^{2n+1}}{3}$$

donc $S_n = \frac{(-1)^n 2^n + 2^{2n+1}}{3}$.

2. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{n < i \leq j \leq 2n} \frac{i}{j+n+1}$.

$$\begin{aligned} \sum_{n < i \leq j \leq 2n} \frac{i}{j+n+1} &= \sum_{j=n+1}^{2n} \sum_{i=n+1}^j \frac{i}{j+n+1} \\ &= \sum_{j=n+1}^{2n} \frac{1}{j+n+1} \underbrace{\sum_{i=n+1}^j i}_{= \frac{(j+n+1)(j-(n+1)+1)}{2}} \\ &= \sum_{j=n+1}^{2n} \frac{(j+n+1)(j-n)}{2(j+n+1)} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=n+1}^{2n} (j-n) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n k \quad \text{en posant } k = j-n \\ &= \frac{n(n+1)}{4} \end{aligned}$$

Ainsi, $\sum_{n < i \leq j \leq 2n} \frac{i}{j+n+1} = \frac{n(n+1)}{4}$.

3. Écrire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, en utilisant la notation factorielle, $P_n = \prod_{k=1}^{2n} \frac{4k+2}{3k}$.

$$P_n = \prod_{k=1}^{2n} \left(\frac{2}{3} \frac{2k+1}{k} \right) = \frac{2^{2n}}{3^{2n}} \prod_{k=1}^{2n} \frac{2k+1}{k} = \frac{2^{2n}}{3^{2n}} \frac{\prod_{k=1}^{2n} (2k+1)}{(2n)!}$$

or

$$\prod_{k=1}^{2n} (2k+1) = \frac{\prod_{k=1}^{2n} (2k+1) \prod_{k=1}^{2n} (2k)}{\prod_{k=1}^{2n} (2k)} = \frac{\prod_{k=1}^{2n} [2k(2k+1)]}{2^{2n} \prod_{k=1}^{2n} k} = \frac{(4n+1)!}{2^{2n} (2n)!}$$

donc $P_n = \frac{(4n+1)!}{3^{2n} (2n)!^2}$.

Exercice 2

1. Soit p un entier non nul et $f(p) = p^2 + p + 1$. Que vaut $f(p-1)$?

$$f(p-1) = (p-1)^2 + (p-1) + 1 = p^2 - 2p + 1 + p = p^2 - p + 1 \text{ donc } \boxed{f(p-1) = p^2 - p + 1.}$$

2. On pose $u_p = \frac{f(p)}{p(p+1)}$. Exprimer, pour $p \geq 2$, $\frac{p^3-1}{p^3+1}$ en fonction de u_p et u_{p-1} .

Soit $p \geq 2$.

$$\frac{p^3-1}{p^3+1} = \frac{(p-1)(p^2+p+1)}{(p+1)(p^2-p+1)} = \frac{(p^2+p+1)}{p(p+1)} \times \frac{p(p-1)}{(p^2-p+1)} = \frac{f(p)}{p(p+1)} \frac{(p-1)((p-1)+1)}{f(p-1)} = \frac{u_p}{u_{p-1}}$$

Ainsi, pour $p \geq 2$, $\frac{p^3-1}{p^3+1} = \frac{u_p}{u_{p-1}}$.

3. Déterminer, en fonction de l'entier n , $n \geq 2$, la valeur de $\prod_{p=2}^n \frac{p^3-1}{p^3+1}$.

Soit $n \geq 2$.

$$\prod_{p=2}^n \frac{p^3-1}{p^3+1} = \prod_{p=2}^n \frac{u_p}{u_{p-1}} = \frac{\prod_{p=2}^n u_p}{\prod_{p=2}^n u_{p-1}} = \frac{\prod_{p=2}^n u_p}{\prod_{j=1}^{n-1} u_j} = \frac{u_n \prod_{p=2}^{n-1} u_p}{u_1 \prod_{j=2}^{n-1} u_j} = \frac{u_n}{u_1} = \frac{\frac{f(n)}{n \times (n+1)}}{\frac{f(1)}{1 \times 2}} = \frac{2f(n)}{n(n+1)f(1)}$$

Ainsi, pour $p \geq 2$, $\prod_{p=2}^n \frac{p^3-1}{p^3+1} = \frac{2(n^2+n+1)}{3n(n+1)}$.

Problème. Propriétés cyclotomiques

On considère $n \in \mathbb{N}^*$ et on pose $\omega = \exp(2i\frac{\pi}{n})$.

Le symbole i est réservé exclusivement dans ce problème pour désigner le nombre complexe bien connu vérifiant $i^2 = -1$.

$\mathbb{U}$ désigne l'ensemble des nombres complexes de module 1.

A. Calculs préliminaires

1. Exprimer, pour m , k et p entiers naturels, la partie réelle de $(1 + \omega^k)^m \omega^{-kp}$ à l'aide de la fonction cosinus et des paramètres m , k et p .

$$\begin{aligned} (1 + \omega^k)^m \omega^{-kp} &= (1 + e^{i\frac{2k\pi}{n}})^m e^{-i\frac{2kp\pi}{n}} \\ &= \left[e^{i\frac{k\pi}{n}} (e^{-i\frac{k\pi}{n}} + e^{i\frac{k\pi}{n}}) \right]^m e^{-i\frac{2kp\pi}{n}} \\ &= e^{i\frac{km\pi}{n}} \left(2 \cos \frac{k\pi}{n} \right)^m e^{-i\frac{2kp\pi}{n}} \\ &= e^{i\frac{k(m-2p)\pi}{n}} \times 2^m \cos^m \frac{k\pi}{n} \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} ((1 + \omega^k)^m \omega^{-kp}) &= \operatorname{Re} \left(e^{i\frac{k(m-2p)\pi}{n}} \times 2^m \cos^m \frac{k\pi}{n} \right) \\ &= 2^m \cos^m \frac{k\pi}{n} \operatorname{Re} \left(e^{i\frac{k(m-2p)\pi}{n}} \right) \quad \text{car } \operatorname{Re} (\lambda z) = \lambda \operatorname{Re} (z) \text{ lorsque } \lambda \in \mathbb{R} \\ &= 2^m \cos^m \frac{k\pi}{n} \cos \frac{k(m-2p)\pi}{n} \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $(m, k, p) \in \mathbb{Z}^3$, $\operatorname{Re}((1 + \omega^k)^m \omega^{-kp}) = 2^m \cos^m \frac{k\pi}{n} \cos \frac{k(m-2p)\pi}{n}$.

Pour tout $r \in \mathbb{Z}$, posons $S_r = \sum_{k=0}^{n-1} (\omega^k)^r$.

2. Résoudre l'équation d'inconnue $p \in \mathbb{Z}$, $\omega^p = 1$.

Soit $p \in \mathbb{Z}$.

$$\omega^p = 1 \iff e^{\frac{2ip\pi}{n}} = e^{i0} \iff \frac{2p\pi}{n} \equiv 0 [2\pi] \iff p \equiv 0 [n] \iff n \mid p.$$

L'ensemble des solutions de l'équation $\omega^p = 1$ d'inconnue $p \in \mathbb{Z}$ est $n\mathbb{Z} = \{nk \mid k \in \mathbb{Z}\}$

3. En déduire le calcul de S_r en fonction de $r \in \mathbb{Z}$.

Soit $r \in \mathbb{Z}$ fixé.

$$S_r = \sum_{k=0}^{n-1} (\omega^k)^r = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kr} = \sum_{k=0}^{n-1} (\omega^r)^k$$

est la somme des n premiers termes de la suite géométrique de raison ω^r et de premier terme 1.

- Si $r \in n\mathbb{Z}$, d'après la question précédente, $\omega^r = 1$ donc $S_r = \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n$.
- Sinon, $r \notin n\mathbb{Z}$ donc, d'après la question précédente, $\omega^r \neq 1$ si bien que

$$S_r = 1 \times \frac{1 - (\omega^r)^n}{1 - \omega^r} = \frac{1 - \omega^{nr}}{1 - \omega^r} = 0 \quad \text{car } nr \in n\mathbb{Z} \text{ donc } \omega^{nr} = 1.$$

Ainsi, pour tout $r \in \mathbb{Z}$, $S_r = n$ si $r \in n\mathbb{Z}$ et $S_r = 0$ sinon.

B. Une première inégalité

Soient a et b deux nombres complexes.

1. Calculer, en fonction de a , b et n uniquement, $\sum_{k=0}^{n-1} (a + \omega^k b)$.

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^{n-1} (a + \omega^k b) &= a \sum_{k=0}^{n-1} 1 + b \sum_{k=0}^{n-1} \omega^k \quad \text{par linéarité de la somme} \\
 &= a \times S_0 + b \times S_1 \\
 &= a \times n + b \times 0 \quad \text{en utilisant l'expression de } S_r \text{ en fonction de } r \in \mathbb{Z} \\
 &= na
 \end{aligned}$$

Ainsi, $\sum_{k=0}^{n-1} (a + \omega^k b) = na$.

2. Montrer que $n|a| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |a + \omega^k b|$.

En prenant le module sur l'égalité de la question précédente,

$$\underbrace{|na|}_{= |n| \times |a|} = \left| \sum_{k=0}^{n-1} (a + \omega^k b) \right| \underbrace{\leq}_{\text{inég. triang.}} \sum_{k=0}^{n-1} |a + \omega^k b|$$

Ainsi, $n|a| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |a + \omega^k b|$.

3. Montrer que $\sum_{k=0}^{n-1} |a + \omega^k b| = \sum_{h=0}^{n-1} |b + \omega^h a|$.

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^{n-1} |a + \omega^k b| &= \sum_{k=0}^{n-1} |\omega^k (\omega^{-k} a + b)| \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} |\omega^k (\omega^{n-k} a + b)| \quad \text{car } \omega^n = 1 \text{ donc } \omega^{n-k} = \omega^n \omega^{-k} = \omega^{-k} \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{|\omega^k|}_{= |\omega|^k = 1^k = 1} \times |\omega^{n-k} a + b| \quad \text{car } \omega = e^{i \frac{2\pi}{n}} \\
 &= \sum_{j=1}^n |\omega^j a + b| \quad \text{en posant } j = n - k \\
 &= \sum_{j=1}^{n-1} |\omega^j a + b| + \underbrace{|\omega^n a + b|}_{= |a + b| = |\omega^0 a + b|} \\
 &= \sum_{j=0}^{n-1} |\omega^j a + b|
 \end{aligned}$$

Ainsi, $\sum_{k=0}^{n-1} |a + \omega^k b| = \sum_{h=0}^{n-1} |b + \omega^h a|$.

4. En déduire que $|a| + |b| \leq \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |a + \omega^k b|$.

Reprenons d'une part le résultat de la question 1 :

$$n|a| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |a + \omega^k b| \tag{1}$$

et appliquons-le pour $a \leftarrow b$ et $b \leftarrow a$ (ce qui est autorisé car la seule contrainte est que a et b soient deux nombres complexes) afin d'obtenir

$$n|b| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |b + \omega^k a| \quad \underbrace{\quad}_{\text{quest. 3}} \quad \sum_{k=0}^{n-1} |a + \omega^k b| \tag{2}$$

puis sommons (??) et (??) ce qui donne

$$n(|a| + |b|) \leq 2 \sum_{k=0}^{n-1} |a + \omega^k b|$$

Ainsi, $|a| + |b| \leq \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |a + \omega^k b|$.

C. Calculs de sommes trigonométriques

1. En utilisant la formule du binôme de Newton, montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\sum_{k=1}^n (\omega^k + z)^n = n(z^n + 1)$.

Soit $z \in \mathbb{C}$ fixé quelconque.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n (\omega^k + z)^n &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} z^{n-j} (\omega^k)^j \\
&= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} z^{n-j} \left(\sum_{k=1}^n (\omega^k)^j \right) \quad \text{en permutant les symboles car les indices sont indépendants l'un de l'autre} \\
&= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} z^{n-j} \left(\sum_{k=1}^{n-1} (\omega^k)^j + (\omega^n)^j \right) \quad \text{or } \omega^n = 1 = \omega^0 \text{ donc } (\omega^n)^j = (\omega^0)^j \\
&= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} z^{n-j} \left(\sum_{k=0}^{n-1} (\omega^k)^j \right) \\
&= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} z^{n-j} S_j \quad \text{en utilisant la notation de la partie B} \\
&= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} z^{n-j} \times \begin{cases} n & \text{si } j \equiv 0[n] \\ 0 & \text{si } j \not\equiv 0[n] \end{cases} \quad (\text{d'après le résultat de la partie B}) \\
&= \binom{n}{0} z^{n-0} n + \binom{n}{n} z^{n-n} n \quad \text{car, pour } j \in \llbracket 0, n \rrbracket, j \equiv 0[n] \iff j \in \{0, n\} \\
&= n(z^n + 1)
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\sum_{k=1}^n (\omega^k + z)^n = n(z^n + 1)$

2. En appliquant la formule ci-dessus pour les valeurs $z = 1$ et $z = -1$, donner des expressions simples de

$$C = \sum_{k=1}^n (-1)^k \cos^n \frac{k\pi}{n} \qquad S = \sum_{k=1}^n (-1)^k \sin^n \frac{k\pi}{n}$$

- Appliquons la relation précédente pour $z \leftarrow 1$:

$$\begin{aligned}
n(1^n + 1) &= \sum_{k=1}^n (e^{i \frac{2k\pi}{n}} + 1)^n \\
&= \sum_{k=1}^n [e^{i \frac{k\pi}{n}} (e^{i \frac{k\pi}{n}} + e^{-i \frac{k\pi}{n}})]^n \\
&= \sum_{k=1}^n e^{ik\pi} (2 \cos \frac{k\pi}{n})^n \\
&= 2^n \sum_{k=1}^n (-1)^k \cos^n \left(\frac{k\pi}{n} \right)
\end{aligned}$$

d'où $\sum_{k=1}^n (-1)^k \cos^n \left(\frac{k\pi}{n} \right) = \frac{n}{2^{n-1}}$.

- Appliquons la relation précédente pour $z \leftarrow -1$:

$$\begin{aligned}
n((-1)^n + 1) &= \sum_{k=1}^n (e^{i \frac{2k\pi}{n}} - 1)^n \\
&= \sum_{k=1}^n [e^{i \frac{k\pi}{n}} (e^{i \frac{k\pi}{n}} - e^{-i \frac{k\pi}{n}})]^n \\
&= \sum_{k=1}^n e^{ik\pi} (2i \sin \frac{k\pi}{n})^n \\
&= 2^n i^n \sum_{k=1}^n (-1)^k \sin^n \left(\frac{k\pi}{n} \right)
\end{aligned}$$

d'où $\sum_{k=1}^n (-1)^k \sin^n \left(\frac{k\pi}{n} \right) = \frac{n((-1)^n + 1)}{i^n 2^n}$.

En particulier,

$$\begin{aligned} \star \text{ si } n \equiv 1 \pmod{2}, \quad \sum_{k=1}^n (-1)^k \sin^n \left(\frac{k\pi}{n} \right) &= 0, \\ \star \text{ si } n \equiv 0 \pmod{2}, \quad \sum_{k=1}^n (-1)^k \sin^n \left(\frac{k\pi}{n} \right) &= \frac{(-1)^{\frac{n}{2}} n}{2^{n-1}} \quad (\text{car } i^n = (i^2)^{\frac{n}{2}} = (-1)^{\frac{n}{2}}). \end{aligned}$$

D. Transformation de Fourier

On considère une suite finie $A = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ d'éléments de $\mathbb{C}$.
On lui associe la suite $B = (b_0, b_1, \dots, b_{n-1})$ d'éléments de $\mathbb{C}$ vérifiant :

$$\forall r \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \quad b_r = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \omega^{rk}$$

1. (a) Calculer $(b_0, b_1, \dots, b_{n-1})$ dans le cas où $a_0 = a_1 = \dots = a_{n-1} = 1$.

Soit $r \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, le calcul de b_r est exactement le même que celui de S_r .
On a donc

Ainsi, pour tout $r \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $b_r = 0$ et $b_0 = n$.

- (b) Calculer $(b_0, b_1, \dots, b_{n-1})$ dans le cas où $a_0 = 1$ et $a_1 = \dots = a_{n-1} = 0$.

Le calcul est immédiat car il ne reste qu'un terme non nul dans la somme.

Ainsi, pour tout $r \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $b_r = \omega^0 = 1$.

- (c) Calculer $(b_0, b_1, \dots, b_{n-1})$ dans le cas où $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $a_k = \omega^k$.

Soit $r \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$,

$$b_r = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^k \omega^{rk} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\omega^{(r+1)} \right)^k = S_{r+1}$$

On a donc

Ainsi, pour tout $r \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket$, $b_r = 0$ et $b_{n-1} = S_n = n$.

2. Montrer que, pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$,

$$a_k = \frac{1}{n} \sum_{h=0}^{n-1} b_h \omega^{-kh}$$

Soit $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$,

$$\begin{aligned} \sum_{h=0}^{n-1} b_h \omega^{-kh} &= \sum_{h=0}^{n-1} \sum_{r=0}^{n-1} a_r \omega^{hr} \omega^{-kh} = \sum_{r=0}^{n-1} a_r \sum_{h=0}^{n-1} (\omega^h)^{r-k} \\ &= \sum_{r=0}^{n-1} a_r S_{r-k} = n a_k \end{aligned}$$

car pour $r \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $r-k \in \llbracket -k, n-1-k \rrbracket$, ensemble dont le seul entier divisible par n est 0, ainsi dans la somme précédente, le seul terme non nul est obtenu pour $r-k=0$ c'est-à-dire $r=k$.

Ainsi, pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $a_k = \frac{1}{n} \sum_{h=0}^{n-1} b_h \omega^{-kh}$.

E. Applications de la transformation de Fourier

1. Application 1.

Soit $m \in \mathbb{N}$, fixé. Pour tout couple d'entiers $(p, n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $p < n$, on définit :

$$S_{p,n} = \sum_{k \in \llbracket 0, m \rrbracket \mid k \equiv p \pmod{n}} \binom{m}{k}$$

- (a) Exprimer $(1+1)^m$ et $(1-1)^m$ à l'aide de $S_{0,2}$ et $S_{1,2}$ puis en déduire les valeurs de $S_{0,2}$ et $S_{1,2}$.

D'après la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned}
 2^m = (1+1)^m &= \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} 1^k 1^{n-k} = \sum_{k \in \llbracket 0, m \rrbracket \mid k \text{ pair}} \binom{m}{k} + \sum_{k \in \llbracket 0, m \rrbracket \mid k \text{ impair}} \binom{m}{k} \\
 &= \sum_{k \in \llbracket 0, m \rrbracket \mid k \equiv 0[2]} \binom{m}{k} + \sum_{k \in \llbracket 0, m \rrbracket \mid k \equiv 1[2]} \binom{m}{k} = S_{0,2} + S_{1,2} \\
 0 = 0^m = (-1+1)^m &= \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (-1)^k 1^{n-k} = \sum_{k \in \llbracket 0, m \rrbracket \mid k \text{ pair}} \binom{m}{k} + \sum_{k \in \llbracket 0, m \rrbracket \mid k \text{ impair}} \binom{m}{k} (-1) \\
 &= \sum_{k \in \llbracket 0, m \rrbracket \mid k \equiv 0[2]} \binom{m}{k} - \sum_{k \in \llbracket 0, m \rrbracket \mid k \equiv 1[2]} \binom{m}{k} = S_{0,2} - S_{1,2}
 \end{aligned}$$

En faisant la demi-somme et la demi-différence :

$$\boxed{S_{0,2} = \frac{1}{2}(2^m + 0) = 2^{m-1} \quad S_{1,2} = \frac{1}{2}(2^m - 0) = 2^{m-1}}$$

Considérons $(p, n) \in \mathbb{N}^2$ tels que $p < n$.

On note, pour tout $r \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $T_{r,n} = \sum_{k=0}^{n-1} S_{k,n} \omega^{rk}$.

- (b) Montrer que, pour tout $r \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $T_{r,n} = (1 + \omega^r)^m$.

Soit $r \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

$$T_{r,n} = \sum_{p=0}^{n-1} S_{p,n} \omega^{rp} = \sum_{p=0}^{n-1} \left(\sum_{k \in \llbracket 0, m \rrbracket \mid k \equiv p[n]} \binom{m}{k} \omega^{kp} \right)$$

Pour $k \equiv p[n]$, il existe $h \in \mathbb{Z}$ tel que $k = p + nh$ et donc $\omega^{kp} = \omega^{rk - nh r} = \omega^{rk} (\omega^n)^{-rh} = \omega^{rk}$ car $\omega^n = 1$.

Donc

$$T_{r,n} = \sum_{p=0}^{n-1} \left(\sum_{k \in \llbracket 0, m \rrbracket \mid k \equiv p[n]} \binom{m}{k} \omega^{kr} \right)$$

Notons $E_p = \{k \in \llbracket 0, m \rrbracket \mid k \equiv p[n]\}$, alors on a $E_0 \cup E_1 \cup \dots \cup E_{n-1} = \llbracket 0, m \rrbracket$, la réunion étant disjointe, on a donc la sommation par paquets :

$$\sum_{p=0}^{n-1} \sum_{k \in E_p} a_k = \sum_{k \in \llbracket 0, m \rrbracket} a_k$$

Ainsi

$$T_{r,n} = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \omega^{kr} = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (\omega^r)^k = (1 + \omega^r)^m$$

d'après le binôme de Newton.

$$\boxed{\text{Pour tout } r \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, T_{r,n} = (1 + \omega^r)^m.}$$

- (c) En déduire que, pour tout $p \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$,

$$S_{p,n} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (1 + \omega^k)^m \omega^{-kp}$$

puis, à l'aide de la question 1 de la partie A, donner une expression de $S_{p,n}$ comme une somme de nombres réels.

On applique la formule d'inversion trouvée à la partie précédente, pour

$$\mathcal{A} = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \leftarrow (S_{0,n}, S_{1,n} \dots S_{n-1,n}),$$

on a alors $\mathcal{B} = (T_{0,n}, T_{1,n} \dots T_{n-1,n})$.

Et par transformation inverse (question D.2.) :

$$\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \quad S_{k,n} = \frac{1}{n} \sum_{h=0}^{n-1} T_{h,n} \omega^{-kh} = \frac{1}{n} \sum_{h=0}^{n-1} (1 + \omega^h)^m \omega^{-kh}$$

C'est-à-dire :

$$\text{Pour tout } p \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, S_{p,n} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (1 + \omega^k)^m \omega^{-kp}$$

Par définition (construction), le nombre $S_{p,n}$ est un nombre réel, il est donc égal à sa partie réelle.

Donc (par linéarité) :

$$\begin{aligned} S_{p,n} &= \operatorname{Re}(S_{p,n}) = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (1 + \omega^k)^m \omega^{-kp} \right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{Re}((1 + \omega^k)^m \omega^{-kp}) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} 2^m \cos^m \frac{k\pi}{n} \cos \frac{k(m-2p)\pi}{n} \end{aligned}$$

$$S_{p,n} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} 2^m \cos^m \frac{k\pi}{n} \cos \frac{k(m-2p)\pi}{n}$$

2. Application 2.

Soit $f : x \mapsto \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$, une fonction polynomiale définie sur $\mathbb{C}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$.

On suppose qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $z \in \mathbb{U}$, $|f(z)| \leq M$.

En exploitant la famille des nombres $b_r = f(\omega^r)$ pour $r \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, montrer que

$$\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \quad |a_k| \leq M$$

Soit $r \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $b_r = f(\omega^r) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \omega^{rk}$.

Donc d'après la partie précédente, on a pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $a_k = \frac{1}{n} \sum_{h=0}^{n-1} b_h \omega^{-hk}$.

Fixons $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Par inégalité triangulaire :

$$|a_k| \leq \frac{1}{n} \sum_{h=0}^{n-1} |b_h| |\omega|^{-hk} \leq \frac{1}{n} \sum_{h=0}^{n-1} |f(\omega^h)| \times 1 \leq \frac{1}{n} \sum_{h=0}^{n-1} M = M$$

Ainsi

$$\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \quad |a_k| \leq M$$