

Devoir à la maison n°1

La notation tiendra particulièrement compte de la **qualité de la rédaction**, la précision des raisonnements et l'énoncé des formules utilisées.

Exercice 1

Soient E un ensemble non vide et $f : E \rightarrow E$, une application.

On « rappelle » que $f^0 = \text{id}_E$ et pour n entier naturel non nul, $f^n = f \circ f^{n-1} = f^{n-1} \circ f$.

Pour tout entier naturel n , on note $F_n = \text{Im}(f^n)$.

1. (a) Quel est l'ensemble F_0 ?
(b) Montrer que la suite $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante pour l'inclusion, i.e. : $\forall n \in \mathbb{N}, F_{n+1} \subset F_n$.
2. On suppose dans cette question qu'il existe un entier p telle que $F_{p+1} = F_p$.
(a) Montrer que $\forall k \geq p, F_k = F_p$.
(b) Montrer que tout sous-ensemble J de $\mathbb{N}$, non vide admet un plus petit élément.
(c) En déduire que $\{k \in \mathbb{N} \mid F_{k+1} = F_k\}$ admet un plus petit élément.
3. On suppose dans cette question que f est injective.
(a) Montrer que si A et B sont deux parties de E telles que $f(A) = f(B)$, alors $A = B$.
(b) En déduire que, s'il existe un entier p tel que $F_{p+1} = F_p$, alors f est bijective.
4. Donner un exemple où l'application f est injective et où la suite $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante pour l'inclusion.

Exercice 2

Soit $\theta \in [0, 2\pi[$ Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Evaluer $\sum_{k=0}^n e^{ik\theta}$.
2. En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^n \cos(k\theta)$ et $\sum_{k=0}^n \sin(k\theta)$
3. Montrer que $\sum_{k=1}^n k e^{ik\theta} = \sum_{h=1}^n \sum_{k=h}^n e^{ik\theta}$.
En déduire $\sum_{k=0}^n k \cos(k\theta)$ et $\sum_{k=0}^n k \sin(k\theta)$