Devoir à la maison n°2

La notation tiendra particuliérement compte de **la qualité de la rédaction, la <u>précision</u> des raisonnements et l'énoncé des <u>formules utilisées</u>**.

Exercice

Soit E un ensemble. On note, pour toutes parties A et B de E : $A\Delta B = (A \cup B) \cap \overline{(A \cap B)}$

où $\overline{G}$ est le complémentaire de G dans E. $A\Delta B$ est appelé la différence symétrique de A et B.

1. Déterminer $A\Delta B$ dans les deux exemples précédents :
   (a) $E = \{1,2,3,4\}$, $A = \{1,2\}$ et $B = \{1,3\}$.
   (b) $E = \mathbb{R}$, $A =]-\infty; 2]$ et $B = [1; +\infty[$.
2. Etablir : $\forall\ A, B \subset E$, $A\Delta B = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})$
3. Montrer que pour tout $A, B \subset E$, $\mathbf{1}_{A\Delta B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - 2 \cdot \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B$
4. En déduire que Δ est associative dans $\mathcal{P}(E)$:

$$\forall\ (A, B, C) \in \mathcal{P}(E)^3, \qquad (A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$$

Problème

Dans ce problème, nous étions quelques propriétés des homographies $z \mapsto \dfrac{az+b}{cz+d}$

A. A propos des applications homographiques

On note $\overline{\mathbb{R}^4} = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \mid (c,d) \neq (0,0)\}$. Pour tout $A \in \overline{\mathbb{R}^4}$, on considère :

$$f_A : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{ax+b}{cx+d} \end{array} \quad (\text{pour } c \neq 0) \qquad f_A : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{ax+b}{d} \end{array} \quad (\text{pour } c = 0)$$

On dit que le 4-uplet $A = (a,b,c,d)$ est normalisé si $ad - bc = 1$.
On note $E = \{f_A, A \in \overline{\mathbb{K}^4}\}$ et $E^* = \{f_A, A \in \overline{\mathbb{K}^4}$ et $ad - bc \neq 0\}$

1. Montrer que si $ad - bc = 0$, alors f_A est une application constante. On donnera sa valeur.

On considère maintenant des homographie de E^*.

2. A quelle condition (nécessaire et suffisante) sur $A = (a,b,c,d)$ et $A' = (a',b',c',d')$ a-t-on $f_A = f_{A'}$
3. On considère maintenant des homographie de E^*.
4. Montrer que pour tout $f \in E^*$, il existe exactement deux quadruplets $A, A' \in \mathbb{K}^4$, normalisés tel que $f = f_A = f_{A'}$.
5. Soient $A = (a,b,c,d)$ et $A' = (a',b',c',d') \in \overline{\mathbb{R}^4}$. Montrer que

$$f_{A'} \circ f_A = f_{A''}$$

   avec $A'' = (a'a + b'c, a'b + b'd, c'a + d'c, c'b + d'd)$.
   On verifiera que $A'' \in \overline{\mathbb{R}^4}$
6. On considère $A = (a,b,c,d) \in E^*$, puis $\overline{A} = (d, -b, -c, a)$. Que vaut $f_A \circ f_{\overline{A}}$ et $f_{\overline{A}} \circ f_A$?
7. En déduire que toute homographie f de E^* est inversible. Comment s'exprime f^{-1} ?

B. Suite récurrente définie à partir d'une homographie

Dans cette partie, on considère une homographie f_A de E^*.
On définit alors la suite (u_n) par récurrence (si possible) :

$$u_0 \in \mathbb{C} \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{au_n + b}{cu_n + d}$$

si il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $cu_n + d = 0$, alors on dit que la suite est mal définie.
On note p_A, l'application polynomiale : $p_A : x \mapsto cx^2 + (d-a)x - b$

1. On suppose que $p_A = c(x-\alpha)(x-\beta)$, avec $\alpha \neq \beta$
   (a) Montrer que α et β sont différents de $\frac{a}{c}$.
   (b) Montrer que si $u_0 = \alpha$, ou $u_0 = \beta$, alors (u_n) n'est pas mal définie et est en fait une suite constante.
   (c) On suppose donc que $u_0 \notin \{\alpha, \beta\}$. Montrer alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq \alpha$.
   (d) On considère alors $v_n = \dfrac{u_n - \beta}{u_n - \alpha}$ et $q = \dfrac{c\alpha + d}{c\beta + d}$.
   On supposera que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $cu_n + d \neq 0$.
   (sinon, on arrête l'étude de la suite à l'étape $n_0 - 1$ tel que $cu_{n_0} + d = 0$).
   Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = qv_n$
   (e) En déduire que (u_n) est bien définie et une expression explicite de u_n en fonction de n (et α, β et q).
   (f) Selon la valeur de q, quelle est la limite de (u_n) ?
2. On suppose que $p_A = c(x-\alpha)^2$
   (a) Montrer que si $u_0 = \alpha$, alors (u_n) est bien définie et est en fait une suite constante.
   (b) On suppose donc que $u_0 \notin \{\alpha\}$. Montrer alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq \alpha$.
   (c) On considère alors $v_n = \dfrac{1}{u_n - \alpha}$ et $r = c\dfrac{c\alpha + d}{ad - bc}$.
   On supposera que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $cu_n + d \neq 0$.
   (sinon, on arrête l'étude de la suite à l'étape $n_0 - 1$ tel que $cu_{n_0} + d = 0$).
   Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = v_n + r$
   (d) En déduire que (u_n) est bien définie et une expression explicite de u_n en fonction de n (et α, β et r).
   (e) Quelle est la limite de (u_n) ?

B. Etude des homographies, comme fonctions de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$

On cherche dans cette partie à approcher les fonctions numériques par des homographies.
On considère dans toute cette partie :
— $A = (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $\underline{ad - bc = 1}$.
— on suppose que $\underline{c > 0}$!

1. Faire une étude complète de la fonction f_A (ensemble de définition, variations, limites et asymptotes).
   Pour la représentation graphique, on prendra $c = \frac{1}{2} = -a$ et $b = d = -1$.
2. Approximation en 0. On considère une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
   On note $\varphi : x \mapsto (cx+d)f(x) - (ax+b)$, on suppose toujours $ad - bc \neq 0$.
   (a) Quelle relation nécessaire et suffisante $(\mathcal{R}_1)$ faut-il supposer sur a, b, c, d (en fonction de f) pour que $\varphi(0) = 0$
   (b) Quelle relation nécessaire et suffisante $(\mathcal{R}_2)$ faut-il supposer sur a, b, c, d (en fonction de f) pour que $\varphi'(0) = 0$
   (c) Quelle relation nécessaire et suffisante $(\mathcal{R}_3)$ faut-il supposer sur a, b, c, d (en fonction de f) pour que $\varphi''(0) = 0$
   (d) Montrer que si $f'(0) = 0$, alors pour que $(\mathcal{R}_1)$ et $(\mathcal{R}_2)$ soient vérifiées, on doit avoir $ad - bc = 0$.
   (e) On suppose que $f'(0) > 0$. Exprimer la solutions (a, b, c, d) de $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3)$ vérifiant $ad - bc = 1$ et $c > 0$.
   (f) Soit $X > 0$. On suppose qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour $x \in]-X, X[$, $|\varphi^{(3)}(x)| \leqslant M$.
   On suppose également que $\frac{-d}{c} \notin]-X, X[$.
   Montrer que pour tout $x \in]-X, X[$, $f_A(x) - \frac{M}{6}\frac{x^3}{cx+d} \leqslant f(x) \leqslant f_A(x) + \frac{M}{6}\frac{x^3}{cx+d}$
3. Application :
   (a) Trouver $A = (a, b, c, d)$ normalisé tel que f_A approche au mieux la fonction exp en 0.
   On admet que dans ce cas et pour $X = 1$, on trouve pour tout $x \in]-1, 1[$, $|\varphi^{(3)}(x)| \leqslant e$.
   (b) En déduire que $|4\ln 2 - e| \leqslant \frac{e}{6}\left(-\frac{16}{3} + 8\ln 2\right)$.
   (On remarquera que $\frac{e}{6}\left(-\frac{16}{3} + 8\ln 2\right) \approx 0,095$.)
4. Approximation en x_0.
   En faisant le changement de variable $y = x - x_0$, montrer que l'on peut exploiter la méthode précédente (question 3) pour obtenir une approximation de f en x_0 par une fonction homographique.