Devoir à la maison n°1
CORRECTION

Exercice 1

1. (a) $F_0 = \text{Im }(f^0) = \text{Im }(\text{id}_E)$.
Nécessairement, Im $f^0 \subset E$ car $f^0 : E \to E$.
Et réciproquement : $\forall\, x \in E$, $x = f^0(x)$, donc $x \in \text{Im } f^0$. Ainsi $E \subset \text{Im } f^0$.

$\boxed{\text{Donc par double inclusion : } F_0 = E}$

(b) Soit $x \in F_{n+1} = \text{Im }(f^{n+1})$.
Donc il existe $a \in E$ tel que $x = f^{n+1}(a) = f^n(f(a))$.
Ainsi $x \in \text{Im }(f^n)$ (en prenant $A = f(a)$, $x = f^n(A)$), donc $x \in F_n$.

$\boxed{\text{Par conséquent : } \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad F_{n+1} \subset F_n.}$

2. On suppose dans cette question qu'il existe un entier p telle que $F_{p+1} = F_p$.
(a) On va démontrer le résultat par récurrence.
Posons, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_k$: « $F_{p+k} = F_p$ ».
— $F_p = F_p$, donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
— Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}_k$ est vraie.
On sait déjà que $F_{p+k+1} \subset F_{p+k}$ (1.(b)), on va montrer l'inclusion réciproque.
Soit $x \in F_{p+k}$. Donc il existe $a \in E$ tel que $x = f^{p+k}(a) = f^k(f^p(a))$.
Or $f^p(a) \in F_p = F_{p+1}$. Donc il existe $b \in E$ tel que $f^p(a) = f^{p+1}(b)$.
Par conséquent : $x = f^k(f^{p+1}(b)) = f^{k+p+1}(b)$ et donc $x \in F_{p+k+1}$.
Donc $F_{p+k+1} = F_{p+k}$ et $F_{p+k} = F_p$, d'après $\mathcal{P}_k$.
Et donc $F_{p+k+1} = F_p$ et la proposition $\mathcal{P}_{k+1}$ est donc vérifiée.

$\boxed{\text{Ainsi, } \forall\, k \geqslant p,\ F_k = F_p.}$

(b) Soit J non vide inclus dans $\mathbb{N}$. J est non vide, il admet un élément n_0.
L'ensemble $I = J \cap [\![0, n_0]\!]$ est un ensemble fini (il possède au plus $n_0 + 1$ éléments), il admet donc un plus petit élément N vérifiant $N \leqslant n_0$ et $N \in J$.
Puis, pour tout $n \in J$, ou bien $n \geqslant n_0$ et donc $n \geqslant N$,
ou bien $n < n_0$, et donc $n \in J$ et $n \in [\![0, n_0]\!]$, donc $n \in I$ et par définition (de N) : $N \geqslant n$.

$\boxed{\text{Ainsi, } J \text{ admet un plus petit élément } N.}$

(c) L'ensemble $\{k \in \mathbb{N} \mid F_{k+1} = F_k\}$ n'est pas vide, car $p \in \{k \in \mathbb{N} \mid F_{k+1} = F_k\}$.
Par ailleurs, c'est un ensemble d'entiers naturels.

$\boxed{\text{Donc } \{k \in \mathbb{N} \mid F_{k+1} = F_k\} \text{ admet un plus petit élément.}}$

3. On suppose dans cette question que f est injective.
(a) Soient A, B deux parties de E telles que $f(A) = f(B)$.
Soit $x \in A$. Alors $f(x) \in f(A) = f(B)$. Donc il existe $x' \in B$ tel que $f(x) = f(x')$.
Or f est injective, donc $x = x'$ et donc $x \in B$. Ainsi $A \subset B$
Par symétrie, on montre de même que $B \subset A$.

$\boxed{\text{si } A \text{ et } B \text{ sont deux parties de } E \text{ telles que } f(A) = f(B), \text{ alors } A = B.}$

(b) Supposons qu'il existe p tel que $F_p = F_{p+1}$.
Nous avons déjà que f est injective. Il suffit de montrer que f est surjective.
On a vu, en question 2.(b) que $\{k \in \mathbb{N} \mid F_{k+1} = F_k\}$ admet un plus petit élément, noté h.
Donc $F_{h+1} = F_h$ et, si $h \geqslant 1$, $F_h \neq F_{h-1}$. Supposons donc que $h \geqslant 1$, et soit $x \in F_{h-1}$.

$$\exists\, a \in E \text{ tel que } x = f^{h-1}(a) \Longrightarrow f(x) = f^h(a) \Longrightarrow f(x) \in F_h = F_{h+1} \Longrightarrow \exists\, b \in E \text{ tel que } f(x) = f^{h+1}(b)$$

et par injectivité de f : $x = f^h(b)$, donc $x \in F_h$.
Donc $F_{h-1} \subset F_h$. L'inclusion réciproque $F_h \subset F_{h-1}$ est démontrée en 1.(b).
On a donc $F_{h-1} = F_h$, et une contradiction avec l'hypothèse, donc $h = 0$.
Par conséquent $E = F_0 = F_1 = \text{Im } f$, donc f est surjective.

$\boxed{\text{s'il existe un entier } p \text{ tel que } F_{p+1} = F_p, \text{ alors } f \text{ est bijective.}}$

4. Si l'ensemble E n'est pas infini, on risque d'avoir quelques soucis...
Prenons par exemple $E = \mathbb{R}+$ et $f : x \mapsto x+1$.
f est clairement injective ($f(x) = f(x') \Longrightarrow x+1 = x'+1 \Longrightarrow x = x'$).
On montre par récurrence (à faire, pour avoir vraiment tous les points mais sinon, on n'a déjà beaucoup de points...) que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n = f^n(E) = [n, +\infty[$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Par exemple, avec } f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, x \mapsto x+1, \\ \text{la suite } (F_n) = ([n, +\infty[) \text{ est strictement croissante pour l'inclusion}\end{array}}$$

Exercice 2

Soit $\theta \in [0, 2\pi[$ Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Puisque $e^{ik\theta} = (e^{i\theta})^k$, il s'agit de calculer la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $e^{i\theta}$.
• Si $e^{i\theta} = 1 \Longleftrightarrow \theta = 0$ (car $\theta \in [0, 2\pi[$), on a
$$S_n(0) = n+1$$
• Si $e^{i\theta} \neq 1$, on a
$$S_n(\theta) = 1 \times \frac{1 - (e^{i\theta})^{n+1}}{1 - e^{i\theta}}$$
Or, en factorisant par l'angle moitié numérateur et dénominateur :
$$\begin{aligned} 1 - e^{i\theta} &= (e^{i0} - e^{i\theta}) = e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}) = -2i \sin\frac{\theta}{2} e^{i\frac{\theta}{2}} \\ 1 - e^{i(n+1)\theta} &= (e^{i0} - e^{i(n+1)\theta}) = e^{i\frac{n+1}{2}\theta}(e^{-i\frac{n+1}{2}\theta} - e^{i\frac{n+1}{2}\theta}) = -2i \sin(\frac{n+1}{2}\theta) e^{i\frac{n+1}{2}\theta} \end{aligned}$$
Donc
$$\boxed{S_n(\theta) = \begin{cases} \dfrac{\sin\frac{n+1}{2}\theta}{\sin\frac{1}{2}\theta} e^{i\frac{n}{2}\theta} & \text{si } \theta \neq 0 \\ n+1 & \text{sinon} \end{cases}}$$

2. • Si $\theta = 0$, alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta) = 0$
• Si $\theta \neq 0$. En prenant les parties réelles et imaginaires, on trouve :
$$\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) = \mathrm{Re}\left(\frac{\sin\frac{n+1}{2}\theta}{\sin\frac{1}{2}\theta} e^{i\frac{n}{2}\theta}\right) = \frac{\sin\frac{n+1}{2}\theta}{\sin\frac{1}{2}\theta} \mathrm{Re}\left(e^{i\frac{n}{2}\theta}\right)$$
Et de même pour sin :
$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) = \frac{\sin\frac{n+1}{2}\theta \times \cos\frac{n}{2}\theta}{\sin\frac{1}{2}\theta} \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta) = \frac{\sin\frac{n+1}{2}\theta \times \sin\frac{n}{2}\theta}{\sin\frac{1}{2}\theta}}$$

3. $k = \displaystyle\sum_{h=1}^{k} 1$ (addition de constante), donc
$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} k e^{ik\theta} &= \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{h=1}^{k} 1 e^{ik\theta}\right) = \sum_{1 \leqslant h \leqslant k \leqslant n} e^{ik\theta} = \sum_{h=1}^{n}\left(\sum_{k=h}^{n} e^{ik\theta}\right) \\ &= \sum_{h=1}^{n} e^{ih\theta}\frac{1 - e^{i(n-h+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} = \sum_{h=1}^{n} \frac{e^{ih\theta} - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} = \frac{1}{1 - e^{i\theta}}\left(\sum_{h=1}^{n} e^{ih\theta} - \sum_{h=1}^{n} e^{i(n+1)\theta}\right) \\ &= \frac{e^{-i\frac{\theta}{2}}}{-2i\sin\frac{\theta}{2}} \times \left(e^{i\theta}\frac{1 - e^{in\theta}}{1 - e^{i\theta}} - n e^{i(n+1)\theta}\right) = \frac{1}{-4\sin^2\frac{\theta}{2}} e^{i\frac{n}{2}\theta} \times (-2i)\sin\frac{n}{2}\theta - n\frac{e^{i\frac{2n+1}{2}\theta}}{-2i\sin\frac{\theta}{2}} \\ &= \frac{\sin\frac{n}{2}\theta}{2\sin^2\frac{\theta}{2}} i e^{i\frac{n}{2}\theta} - in\frac{e^{i\frac{2n+1}{2}\theta}}{2\sin\frac{\theta}{2}} \end{aligned}$$
En prenant les parties réelles et imaginaires, on trouve :
$$\sum_{k=0}^{n} k\cos(k\theta) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} k e^{ik\theta}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{\sin\frac{n}{2}\theta}{2\sin^2\frac{\theta}{2}} i e^{i\frac{n}{2}\theta} - in\frac{e^{i\frac{2n+1}{2}\theta}}{2\sin\frac{\theta}{2}}\right)$$
$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} k\cos(k\theta) = \frac{n\sin\frac{2n+1}{2}\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}} - \frac{\sin^2\frac{n}{2}\theta}{2\sin^2\frac{\theta}{2}} \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^{n} k\sin(k\theta) = \frac{\cos\frac{n}{2}\theta\sin\frac{n}{2}\theta}{2\sin^2\frac{\theta}{2}} - \frac{n\cos\frac{2n+1}{2}\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}}}$$