6. Fonctions d'une variable réelle

Dérivation

N° 111
Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$f_1(x)=\sqrt{x^2+1},\quad f_2(x)=(x^3+1)^{1/3},\quad f_3(x)=\frac{3x\ln x+1}{2x\ln x+3},$$

$$f_4(x)=\frac{x^3+1}{(x^2+1)^2},\quad f_5(x)=\sin\Big(\ln\big(\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}+3}\big)\Big).$$

Pour f_4 on comparera deux méthodes, l'une consistant à considérer la fonction comme un quotient et l'autre comme un produit.

$$f_1'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}},\quad f_2'(x)=\frac{x^2}{(x^3+1)^{2/3}},\quad f_3'(x)=\frac{7(\ln x+1)}{(2x\ln x+3)^2},\quad f_4'(x)=-\frac{x(x^3-3x+4)}{(x^2+1)^3},$$

$$f_5'(x)=\frac{4e^{2x}}{(e^{2x}+3)(e^{2x}+1)}\cos\Big(\ln\big(\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}+3}\big)\Big)$$

N° 112
1. Dériver la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{x+1}{(x+3)(x+4)}$.
2. Soient f_i des fonctions strictement positives sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, dérivables sur I et f la fonction définie par $f=\prod_{i=1}^{n} f_i^{\alpha_i}$. Montrer que

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\frac{f_i'(x)}{f_i(x)}$$

Utiliser cette formule pour retrouver la dérivée de la première question.

Inégalités

N° 113
Montrer les inégalités suivantes :
1. $\forall x\in]0,\frac{\pi}{2}[,\ 2x<\sin 2x+\tan x$.
2. $\forall x\in]0,\frac{\pi}{2}[,\ \tan x>x+\frac{x^3}{3}$.
3. $\forall x\in]0,+\infty[,\ e^{x/(x+1)}<1+x<e^x$.
4. $\forall n\in\mathbb{N}^*,\forall x\in\mathbb{R}_+^*, e^x>1+\frac{x^n}{n!}$.
5. (*) $\forall x\in\mathbb{R},\cos(\sin x)>\sin(\cos x)$.
6. (*) $\forall(a,b)\in]0,\frac{\pi}{2}[^2,\ a<b\Rightarrow \dfrac{a}{b}<\dfrac{\sin a}{\sin b}<\dfrac{\pi}{2}\dfrac{a}{b}$.

N° 114
Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}_+$,

$$(1+x)^{\frac14}\geqslant 1+\frac{x}{4}-\frac{3x^2}{32}$$

Bijection

N° 115
1. Montrer que $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=x^3+5$ est une bijection et déterminer f^{-1}. Vérifier la formule de dérivation de f^{-1}.
2. Montrer que $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=e^x+2$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R})$ et déterminer f^{-1}. Vérifier la formule de dérivation de f^{-1}.
3. Soit $f(x)=\dfrac{2x+5}{4x-3}$. Montrer que f est une bijection de D_f sur $f(D_f)$ et déterminer f^{-1}. Vérifier la formule de dérivation de f^{-1}.
4. On définit sur $]-1,1[$ la fonction f par $f(x)=\dfrac{x}{1-x^2}$. Montrer que f est une bijection de $]-1,1[$ sur $\mathbb{R}$ et déterminer f^{-1}. Vérifier la formule de dérivation de f^{-1}.

Etude globale

N° 116
Etudier les fonctions suivantes :
1. $f(x)=\sqrt{\dfrac{\ln x}{x}}$ avec étude de la demi-tangente en 1.
2. $f(x)=\ln(e^x+2e^{-x})$ avec étude des branches infinies.

N° 117
Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to0+}x^{\sqrt{x}-x}\quad;\quad\lim_{x\to1}x^{\frac{1}{1-x}}\quad;\quad\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}}\quad;$$

$$\lim_{x\to1}\frac{(\arctan x)^2-\frac{\pi^2}{16}}{\sqrt{x}-1}\quad;\quad\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{\log_a(x+1)}.$$

$1, 1/e, 0, \pi/2, (\ln a)^2$

N° 118
Etudier la fonction définie par $f(x)=2\arctan(\mathrm{th}(x))-\arctan(\mathrm{sh}(2x))$.

Fonctions à valeurs complexes

N° 119
Soit $f(x)=(1-i)e^{\arcsin x-i\arccos x}$.
Donner le domaine de définition de f. Justifier que f est dérivable sur $]-1,1[$ et calculer sa dérivée.
$f'(x)=\dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}e^{\arcsin x-i\arccos x}$.

Equation fonctionnelle

N° 120
Déterminer toutes les fonctions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ croissantes et périodiques.

N° 121
Soit $f:I\to\mathbb{C}$ dérivable sur l'intervalle I. Justifier que $\bar{f}:x\mapsto\overline{f(x)}$ est dérivable sur I et calculer sa dérivée. Montrer que si f ne s'annule pas, $|f|:x\mapsto|f(x)|$ est dérivable sur I et calculer sa dérivée.

N° 122
Soit $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ dérivable telle que $f(0)=0$ et $\forall x\in\mathbb{R}_+, f'(x)\leq f(x)$.
Montrer que f est la fonction nulle.
Faire un dessin pour représenter la situation, puis étudier $h(x)=f(x)e^{-x}$.

N° 123
Déterminer toutes les fonctions dérivables $f:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$ qui vérifient $\forall(x,y)\in(\mathbb{R}_+^*)^2, f(xy)=f(x)+f(y)$.

Problèmes

N° 124
Montrer que $x^x(1-x)^{1-x}\geqslant\dfrac12$ pour $x\in]0,1[$.

N° 125
Montrer que sh est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Donner une expression de sh^{-1}, notée habituellement argsh.
Retrouver le résultat connu concernant argsh'.

Mêmes questions concernant ch et þ (on commencera par exprimer les bons intervalles).

N° 126

Soit $f : I \to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{1}{\cos x}$.

1. Déterminer l'intervalle $I \subset \mathbb{R}_+$ contenant 0 le plus grand possible pour que f soit correctement définie.
2. Dresser le tableau de variation de f sur I et donner l'allure approximative de son graphe.
3. Montrer que $f : I \to J$ est bijective (où J est un intervalle que l'on précisera).
4. Déterminer la dérivée de f^{-1}.
5. Tracer f et f^{-1} sur un même graphe.