7. Calcul de primitives

Calcul direct de primitives ou d'intégrales

N° 127

Calculer $\int_{-1}^3 (3x^2 - 2x + 1) dx$, $\int_4^5 \left(\frac{2}{\sqrt{x}} - x \right) dx$, $\int_0^{\pi/3} \left(\frac{1}{\cos x} \right)^2 dx$
et $\int_0^1 \sqrt{x^2 - 6x + 9} dx$.

N° 128

Calculer $\int_0^{\pi/2} \sin^2(x) \cos x dx$ et $\int_{-1}^2 |x - 1| dx$.

N° 129

Déterminer les primitives (en précisant les domaines de définition) des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \frac{\arctan^3 x}{1+x^2} ; f_2(t) = \frac{\ln t}{t} ; f_3(x) = \frac{1}{1+e^x} ;$$

$$f_4(x) = \frac{x}{1+x^4} ; f_5(x) = \sin^2 x \cos^7 x ; f_6(x) = \sin^2 x \cos^4 x$$

N° 130

Déterminer les primitives sur $\mathbb{R}$ de $t \mapsto \frac{1}{t-i}$ et plus généralement

de $t \mapsto \frac{1}{t-a}$ où $a \in \mathbb{C}$.

N° 131

Déterminer $\int \cos t \operatorname{ch} t dt$.

Intégration par parties

N° 132

Calculer les intégrales ou les primitives qui suivent :

$$\int (x^2 + 1)e^{2x} dx \quad \int (x^2 + 1) \cos(2x) dx \quad \int_0^1 \ln(1+x^2) dx$$

$$\int t^2 \arctan(t) dt \quad \int_0^{1/2} \arcsin(x) dx$$

N° 133

On pose $I_{(n,p)} = \int_{-1}^1 (x-1)^n (x+1)^p dx$, $(n, p) \in \mathbb{N}^2$.

1. Etablir que $\forall n \geq 1, \forall p \in \mathbb{N}, I_{(n,p)} = \frac{-n}{p+1} I_{(n-1,p+1)}$.
2. Calculer, en fonction de n et p , $I_{(n,p)}$ et préciser la valeur de $I_{(p,p)}$.

N° 134

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et P un polynôme de degré n , comment calculer

$$\int_0^1 P(t) e^{at+b} dt ?$$

Application : calculer $\int_0^1 (x^3 - 2x) e^{1-x} dx$.

N° 135

En exploitant des intégrations par parties, calculer les primitives

F_k de $f_k : x \mapsto \ln^k(x)$ pour $k \in \llbracket 1, 5 \rrbracket$.

Plus généralement, quelle primitive pour f_n ?

Changement de variable

N° 136

Calculer $\int_{-1}^1 \sqrt{3x^2 - 2x + 3} (3x - 1) dx$, $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin x + 1} \cos x dx$

et $\int_{-1}^2 \sqrt{x+2} x^2 dx$

N° 137

A l'aide d'un changement de variables déterminer les intégrales et les primitives qui suivent :

$$\int \frac{1}{2e^x + e^{-x}} dx, \quad \int \frac{1}{e^x + e^{-x} + 1} dx, \quad \int_1^3 \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx, \quad \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan(x)}{1 + \sin(2x)} dx,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2 + \cos x} dx, \quad \int_0^{2\pi} \frac{1}{2 + \cos x} dx$$

N° 138

Démontrer que

$$\int_0^{\pi/4} \ln \cos x dx = \int_0^{\pi/4} \ln \left(\cos \left(\frac{\pi}{4} - x \right) \right) dx.$$

En déduire la valeur de

$$\int_0^{\pi/4} \ln(1 + \tan x) dx \text{ puis celles de } \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx, \quad \int_0^1 \frac{\arctan(x)}{1+x} dx.$$

N° 139

Calculer l'intégrale $\int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{1}{x} \cos \frac{x}{1+x^2} \ln x dx$.

Par le changement de variable $t = \frac{1}{x}$, on trouve $I = -I$ donc $I = 0$

N° 140

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue. On pose $g(x) = \int_a^b f(x+t) \cos t dt$. Montrer que g est de classe C^1