Devoir à la maison n°2
CORRECTION

Exercice 1
Soit E un ensemble. On note, pour toutes parties A et B de E :

$$A\Delta B = (A\cup B)\cap \overline{(A\cap B)}$$

où $\overline{G}$ est le complémentaire de G dans E.
$A\Delta B$ est appelé la différence symétrique de A et B.

1. Déterminer $A\Delta B$ dans les deux exemples suivants :
   (a) $E=\{1,2,3,4\}$, $A=\{1,2\}$ et $B=\{1,3\}$.
   Dans ce cas : $A\cup B=\{1,2,3\}$ et $A\cap B=\{1\}$

$$\boxed{A\Delta B=\{2,3\}}$$

Remarques !
Il s'agit du cas simple le plus général, avec un élément de l'intersection, un élément qui n'appartient qu'à A, un qui n'appartient qu'à B et un qui appartient à aucun des deux.
Cela donne une excellente idée de ce qu'est $A\Delta B$.
Cela correspond à l'opération booléenne du ≪ ou exclusif ≫.

   (b) $E=\mathbb{R}$, $A=]-\infty;2]$ et $B=[1;+\infty[$.
   Dans ce cas : $A\cup B=\mathbb{R}$ et $A\cap B=[1;2]$

$$\boxed{A\Delta B=]-\infty,1[\cup]2,+\infty[}$$

2. On choisit de procéder par double inclusion. Soit $A,B\subset E$.
   Soient $x\in A\Delta B$.
   Alors $x\in A\cup B$ et $x\notin A\cap B$.
   ou bien $x\in A$, alors $x\notin B$, sinon, $x\in A\cap B$, donc $x\in A\cap\overline{B}$.
   ou bien $x\in B$, alors $x\notin A$, sinon, $x\in A\cap B$, donc $x\in \overline{A}\cap A$.
   Donc $x\in (A\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{A})$
   $A\Delta B\subset (A\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{A})$.
   Réciproquement, soit $x\in (A\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{A})$.
   ou bien $x\in A\cap\overline{B}$, alors $x\notin B$ et $x\in A$ donc $x\in A\cup B$ et $x\notin A\cap B$, donc $x\in A\Delta B$.
   ou bien $x\in \overline{A}\cap B$, alors $x\notin A$ et $x\in B$ donc $x\in A\cup B$ et $x\notin A\cap B$, donc $x\in A\Delta B$.
   $(A\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{A})\subset A\Delta B$

$$\boxed{\forall\ A,B\subset E,\qquad A\Delta B=(A\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{A})}$$

3. Soit $A,B\subset E$. On a donc, puisque $[A\cap\overline{B}]\cap[\overline{A}\cap B]=\emptyset$:

$$\mathbf{1}_{A\Delta B}=\mathbf{1}_{A\cap\overline{B}\cup\overline{A}\cap B}=\mathbf{1}_{A\cap\overline{B}}+\mathbf{1}_{\overline{A}\cap B}=\mathbf{1}_A\mathbf{1}_{\overline{B}}+\mathbf{1}_{\overline{A}}\mathbf{1}_B=\mathbf{1}_A(1-\mathbf{1}_B)+(1-\mathbf{1}_A)\mathbf{1}_B$$

$$\boxed{\forall\ A,B\subset E,\ \mathbf{1}_{A\Delta B}=\mathbf{1}_A+\mathbf{1}_B-2\cdot\mathbf{1}_A\mathbf{1}_B}$$

4. Soit $A,B,C\subset E$. Remarquons d'abord que par symétrie de l'expression obtenue à la fin de la question précédente, on en déduit d'abord que Δ est commutatif : $A\Delta B=B\Delta A$.
   On a ensuite :

$$\begin{aligned}\mathbf{1}_{(A\Delta B)\Delta C}&=\mathbf{1}_{A\Delta B}+\mathbf{1}_C-2\mathbf{1}_{A\Delta B}\mathbf{1}_C=\mathbf{1}_A+\mathbf{1}_B-2\mathbf{1}_A\mathbf{1}_B+\mathbf{1}_C-2(\mathbf{1}_A+\mathbf{1}_B-2\mathbf{1}_A\mathbf{1}_B)\mathbf{1}_C\\&=\mathbf{1}_A+\mathbf{1}_B+\mathbf{1}_C-2(\mathbf{1}_A\mathbf{1}_B+\mathbf{1}_A\mathbf{1}_C+\mathbf{1}_B\mathbf{1}_C)+4\mathbf{1}_A\mathbf{1}_B\mathbf{1}_C\end{aligned}$$

   Cette expression est symétrique en A, B et C, donc $(A\Delta B)\Delta C=(B\Delta C)\Delta A=A\Delta(B\Delta C)$, par commutativité de Δ.

$$\boxed{\Delta\text{ est associative dans }\mathcal{P}(E)\ :\ \forall\ (A,B,C)\in\mathcal{P}(E)^3,\qquad (A\Delta B)\Delta C=A\Delta(B\Delta C).}$$

Problème

A. A propos des applications homographiques

1. On suppose que $ad-bc=0$. Soient $x,y\in\mathbb{K}$ avec $x\neq y$,

$$f(x)-f(y)=\frac{(ax+b)(cy+d)-(ay+b)(cx+d)}{(cx+d)(cy+d)}=\frac{(ad-bc)(x-y)}{(cx+d)(cy+d)}=0$$

Donc,

$$\boxed{\text{si } ad-bc=0, \text{ alors } f_A \text{ est une application constante}}$$

Si $d\neq 0$, on a pour tout $x\in\mathbb{K}$, $f_A(x)=f_A(0)=\frac{b}{d}$

et si $d=0$, alors $bc=0$ et comme $c\neq 0$ (sinon $A\notin\overline{\mathbb{K}^4}$), donc $b=0$ et $f_A : x\mapsto \dfrac{ax}{cx}=\frac{a}{c}$

Ainsi

$$\boxed{\text{dans ce cas } f_A=\tfrac{b}{d}=\tfrac{a}{c}, \text{ si } d\neq 0 \text{ et/ou } c\neq 0}$$

Les deux nombres d et c ne pouvant être nul en même temps.

2. Soit $A=(a,b,c,d)$ et $A'=(a',b',c',d')$, avec $ad-bc\neq 0$.
On note $A\doteqdot A'$ si il existe $\lambda\neq 0$ tel que $a=\lambda a'$, $b=\lambda b'$, $c=\lambda c'$ et $d=\lambda d'$.
Il s'agit d'une relation d'équivalence.
Si $A\doteqdot A'$, alors

$$f_A(x)=\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{\lambda a'x+\lambda b'}{\lambda c'x+\lambda d'}=f_{A'}(x)$$

Réciproquement, si $f_A=f_{A'}$, alors

$$\forall\, x\in\mathbb{K}, \frac{ax+b}{cx+d}=\frac{a'x+b'}{c'x+d'}$$

$$\forall\, x\in\mathbb{K}, (ac'-a'c)x^2+(bc'+ad'-b'c-a'd)x+(bd'-b'd)=0$$

On peut identifier au polynôme nul, donc

$$\begin{cases} ac'-a'c &= 0\\ bc'+ad'-b'c-a'd &= 0\\ bd'-b'd &= 0\end{cases}$$

Comme au moins c ou d est non nul, on peut considérer par exemple $c\neq 0$, puis $\lambda=\frac{c'}{c}$.
Si c'est $d\neq 0$, on prend $\lambda=\frac{d'}{d}\ldots$
On a donc

$$\begin{cases} c' &= \lambda c\\ a' &= \frac{c'}{c}a=\lambda a\\ bc'+ad'-b'c-a'd &= \lambda bc+ad'-b'c-\lambda ad=(\lambda b-b')c-(\lambda d-d')a=0\\ bd'-b'd &= 0\end{cases}$$

$$\begin{cases} a' &= \lambda a\\ c' &= \lambda c\\ (\lambda b-b')c &= (\lambda d-d')a\\ bd'-b'd &= 0\end{cases}$$

Les deux dernières équations donnent (impliquent) : $d'=\lambda d+\frac{c}{a}(b'-\lambda b)$ puis

$$0=bd'-b'd=\lambda bd+\frac{bc}{a}(b'-\lambda b)-b'd=\frac{\lambda abd+bcb'-\lambda b^2c-b'ad}{a}$$

Et donc, en factorisant le numérateur :

$$0=\frac{(\lambda b-b')(ad-bc)}{a}$$

Et comme on a $ad-bc\neq 0$, alors nécessairement $b'=\lambda b$.
Et enfin, comme $bd'=b'd$, on a donc $b(d'-\lambda d)=0$ et donc $b=0$, ou $d'=\lambda d$.
Or si $b=0$, on a $b'=0$ et donc l'équation $(\lambda b-b')c-(\lambda d-d')a=0$
donne également $d'=\lambda d$ $(a\neq 0)$.
Donc dans tous les cas : $b'=\lambda b$ et $d'=\lambda d$.
Par conséquent, si $f_A=f_{A'}$ alors $A\doteqdot A'$. On a donc démontré l'équivalence :

$$\boxed{\text{si } ad-bc\neq 0, \text{ alors : } f_A=f_{A'} \text{ si et seulement si } A\doteqdot A'}$$

3. Erreur
4. Soit $f \in E^*$, il existe donc $A_1 = (a_1, b_1, c_1, d_1) \in \overline{\mathbb{K}^4}$, tel que $a_1d_1 - b_1c_1 \neq 0$ et $f = f_{A_1}$. Faisons un raisonnement sous la forme analyse-synthèse.
   — Si il existe $A = (a, b, c, d)$ normalisé tel que $f_A = f$, alors d'après 3, $A \doteqdot A_1$.
   Et donc il existe $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 0$ tel que $a = \lambda a_1$, $b = \lambda b_1$, $c = \lambda c_1$ et $d = \lambda d_1$.
   Par conséquent, $1 = ad - bc = \lambda^2(a_1d_1 - b_1c_1)$ et donc comme $a_1d_1 - b_1c_1 \neq 0$, et donc il existe deux nombres λ et $-\lambda$ racines de $\dfrac{1}{a_1d_1 - b_1c_1}$ (qui peut être complexe).
   — réciproquement si $\mu = a_1d_1 - b_1c_1 \neq 0$, et λ une racine de $\frac{1}{\mu}$ et enfin $A = \lambda A_1 = (a, b, c, d)$.
   On a donc $A \doteqdot A_1$, donc $f_A = f_{A_1} = f$ et $ad - bc = \lambda^2(a_1d_1 - b_Ac_1) = \frac{1}{\mu}(a_1d_1 - b_1c_1) = 1$.
   Par analyse-synthèse,

$$\boxed{\text{pour tout } f \in E^*, \text{ il existe exactement deux quadruplet } A \in \overline{\mathbb{K}^4}, \text{ normalisé tel que } f = f_A}.$$

5. Soient $A = (a, b, c, d)$ et $A' = (a', b', c', d') \in \mathbb{K}^4$.

$$\forall\, x \in \mathbb{K}, \qquad f_{A'} \circ f_A(x) = \frac{a'\dfrac{ax+b}{cx+d} + b'}{c'\dfrac{ax+b}{cx+d} + d'} = \frac{a'ax + a'b + b'cx + b'd}{c'ax + c'b + d'cx + d'd}$$

$$\forall\, x \in \mathbb{K}, \qquad f_{A'} \circ f_A(x) = \frac{(a'a + b'c)x + (a'b + b'd)}{(c'a + d'c)x + (c'b + d'd)}$$

On a donc bien (il s'agit juste d'une vérification $f_{A''}$ est bien égale à $f_{A'} \circ f_A$).

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Pour } A = (a, b, c, d) \text{ et } A' = (a', b', c', d') \in \mathbb{K}^4 \text{ et } A'' = (a'a + b'c, a'b + b'd, c'a + d'c, c'b + d'd),\\ \text{on a } f_{A'} \circ f_A = f_{A''}\end{array}}$$

Notons que $A'' \in \overline{\mathbb{K}^4}$, sinon $c'a + d'c = 0$ et $c'b + d'd = 0$

6. On considère $A = (a, b, c, d) \in E^*$, puis $\overline{A} = (d, -b, -c, a)$.
   D'après la question précédente, en notant $A'' = (ad + b(-c), a(-b) + ba, cd + d(-c), c(-b) + da) = (ad - bc, 0, 0, ad - bc)$, on a

$$\forall\, x \in \mathbb{K}, \qquad f_A \circ f_{\overline{A}}(x) = f_{A''}(x) = \frac{(ad - bc)x}{ad - bc} = x$$

car $ad - bc \neq 0$. Donc $f_A \circ f_{\overline{A}} = \text{id}$.
Et de même : $f_{\overline{A}} \circ f_A = f_{A'''}$ avec $A''' = (da + (-b)c, db + (-b)d, (-c)a + ac, (-c)b + ad) = (ad - bc, 0, 0, ad - bc) = A''$ Donc

$$\boxed{f_A \circ f_{\overline{A}} = f_{\overline{A}} \circ f_A = \text{id}}$$

7. D'après les questions précédentes,

$$\boxed{\text{pour toute } f \text{ de } E^*, \text{ il existe } A = (a, b, c, d) \text{ telle que } f = f_A \text{ et } f \text{ est inversible avec } f^{-1} = f_{d,-b,-c,a}}$$

Mais il n'y a pas unicité d'écriture, en particulier tout $A' \doteqdot (d, -b, -c, a)$ vérifie $f^{-1} = f_{A'}$

B. Suite récurrente définie à partir d'une homographie

1. On suppose que $p_A = c(x - \alpha)(x - \beta)$, avec $\alpha \neq \beta$
   (a) Si $\alpha = \frac{a}{c}$, comme $c\alpha^2 - a\alpha + d\alpha - b = 0$, on aurait donc $0 = c\alpha^2 - a\alpha$ et $c\alpha^2 - a\alpha = b - d\alpha$.
   Par conséquent $b - d\frac{a}{c} = 0$ et donc $ad - bc = 0$, ce qui est impossible.
   Le raisonnement est identique pour β. Donc

$$\boxed{\alpha \text{ et } \beta \text{ sont différents de } \tfrac{c}{a}.}$$

   (b) Notons l'équivalence :

$$ax + bcx + d = x \iff ax + b = cx^2 + dx \iff p_A(x) = 0 \iff x = \alpha \text{ ou } x = \beta$$

   On suppose que $u_0 = \alpha$ (resp. $u_0 = \beta$).
   Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n$: « $u_n = \alpha$ »(resp. « $u_n = \beta$ »)
   — $\mathcal{P}_0$ est vraie.

— Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie, donc $u_n = \alpha$ (resp. $u_n = \beta$).

$$u_{n+1} = f_A(u_n) = f_A(\alpha) = \alpha$$

d'après la remarque initiale.
(De même si $u_n = \beta$, alors $u_{n+1} = f(u_n) = f(\beta) = \beta$).
Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

$$\boxed{\text{si } u_0 = \alpha, \text{ alors pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n = \alpha \text{ et si } u_0 = \beta, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n = \beta}$$

(c) On suppose donc que $u_0 \notin \{\alpha, \beta\}$.
On fait un raisonnement par l'absurde, si il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = \alpha$.
Alors $\dfrac{au_{n-1} + b}{cu_{n-1} + d} = \alpha$, donc (d'après la formule d'inversion) : $u_{n-1} = \dfrac{d\alpha - b}{-c\alpha + a}$.
Or $p_A(\alpha) = c\alpha^2 + d\alpha - a\alpha - b = 0$, donc $d\alpha - b = \alpha(a - c\alpha)$ et ainsi $u_{n-1} = \alpha$.
On notera que grâce à la première question, on sait que $a + c\alpha \neq 0$.
Notons $n_0 = \min\{n \in \mathbb{N} \mid u_n = \alpha\}$.
On sait que n_0 existe bien car par hypothèse $\{n \in \mathbb{N} \mid u_n = \alpha\} \neq \emptyset$.
Et alors $u_{n_0} = \alpha$ alors que $u_{n_0 - 1} \neq \alpha$. Cela est impossible.

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \neq \alpha.}$$

(d) On considère alors $v_n = \dfrac{u_n - \beta}{u_n - \alpha}$ et $q = \dfrac{c\alpha + d}{c\beta + d}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\dfrac{u_{n+1} - \beta}{u_{n+1} - \alpha}}{\dfrac{u_n - \beta}{u_n - \alpha}} = \frac{\big(f(u_n) - f(\beta)\big)\big(u_n - \alpha\big)}{\big(f(u_n) - f(\alpha)\big)\big(u_n - \beta\big)}$$

Or,

$$\frac{\big(u_n - \alpha\big)}{\big(f(u_n) - f(\alpha)\big)} = \frac{u_n - \alpha}{\dfrac{au_n + b}{cu_n + d} - \dfrac{a\alpha + b}{c\alpha + d}} = \frac{(u_n - \alpha)(cu_n + d)(c\alpha + d)}{(au_n + b)(c\alpha + d) - (cu_n + d)(a\alpha + b)}$$

$$= \frac{(u_n - \alpha)(cu_n + d)(c\alpha + d)}{(bc - ad)\alpha + (ad - bc)u_n} = \frac{(cu_n + d)(c\alpha + d)}{ad - bc}$$

On a de même avec β (par symétrie) :

$$\frac{\big(u_n - \beta\big)}{\big(f(u_n) - f(\beta)\big)} = \frac{(cu_n + d)(c\beta + d)}{ad - bc}$$

Puis en retournant à la première fraction,

$$\boxed{\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{(cu_n + d)(c\alpha + d)}{ad - bc} \times \frac{ad - bc}{(cu_n + d)(c\beta + d)} = \frac{c\alpha + d}{c\beta + d} = q}$$

(e) La suite (v_n) est donc géométrique de raison q, on a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = q^n v_0$.
Puis comme $v_n = \dfrac{u_n - \beta}{u_n - \alpha}$, on a donc $u_n = \dfrac{-\alpha v_n + \beta}{-v_n + 1} = \dfrac{\alpha q^n v_0 - \beta}{q^n v_0 - 1}$
Finalement, on a une expression explicite (pas facile) :

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N} \qquad u_n = \frac{\alpha q^n \frac{u_0 - \beta}{u_0 - \alpha} - \beta}{q^n \frac{u_0 - \beta}{u_0 - \alpha} - 1} \text{ avec } q = \frac{c\alpha + d}{c\beta + d}}$$

(f) On rappelle que $q = \dfrac{c\alpha + d}{c\beta + d}$.
— si $|q| < 1$, alors $(u_n) \to \beta$
— si $|q| > 1$ alors $(u_n) \to \alpha$ (terme dominant en facteur)
— si $|q| = 1$, alors $q = -1$ (en effet $q = 1$ est impossible sinon on aurait $\alpha = \beta$) et la suite ne peut pas converger.

Bilan :

$$\boxed{(u_n) \longrightarrow \begin{cases} \beta & \text{si } |c\alpha + d| < |c\beta + d| \\ \alpha & \text{si } |c\alpha + d| > |c\beta + d| \\ \text{diverge} & \text{si } c(\alpha + \beta) + 2d = 0 \end{cases}}$$

2. On suppose que $p_A = c(x-\alpha)^2$
   (a) Il s'agit exactement de la même démonstration qu'en 1.(b).
   (b) Là encore, si $u_n = \alpha$, alors $u_{n-1} = \alpha$.
   Par argument de type descente infinie, ou par l'absurde en considérant $n_0 = \min\{n \in \mathbb{N} \mid u_n = \alpha\}$, on trouve une contradiction.
   Il ne peut exister de $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = \alpha$.
   (c) Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1}-\alpha} - \frac{1}{u_n - \alpha} = \frac{u_n - u_{n+1}}{\big(f(u_n) - f(\alpha)\big)\big(u_n - \alpha\big)} = \frac{\dfrac{cu_n^2 + (d-a)u_n - b}{cu_n + d}}{\big(f(u_n) - f(\alpha)\big)\big(u_n - \alpha\big)}$$

   Le même calcul qu'en 1.(d) donne

$$\frac{1}{\big(f(u_n) - f(\alpha)\big)\big(u_n - \alpha\big)} = \frac{(cu_n + d)(c\alpha + d)}{(ad-bc)(u_n - \alpha)^2}$$

   Donc

$$v_{n+1} - v_n = \frac{p_A(u_n) \times (cu_n + d)(c\alpha + d)}{(cu_n + d)(ad - bc)(u_n - \alpha)^2} = \frac{c(c\alpha + d)}{(ad - bc)}$$

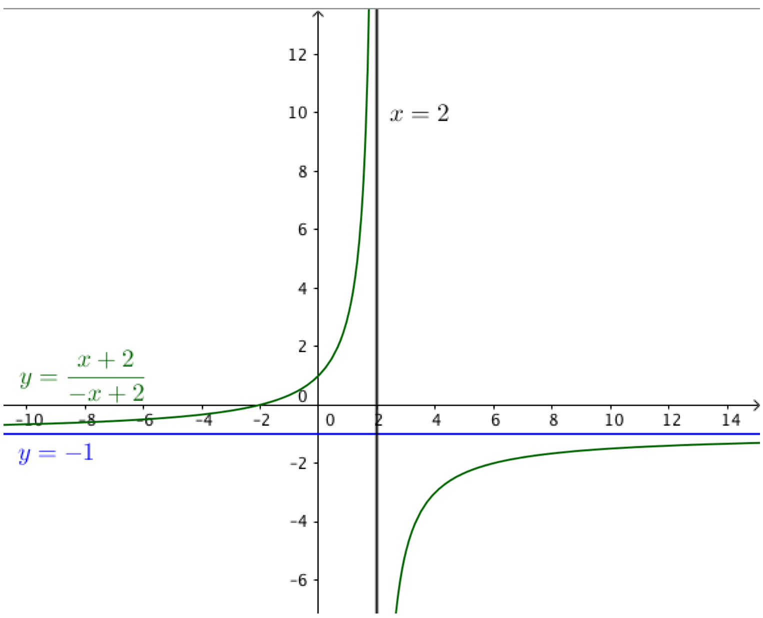
   car $p_A(x) = c(x-\alpha)^2$.
   Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = v_n + r$ avec $r = \dfrac{c(c\alpha + d)}{ad - bc}$
   (d) La suite (v_n) est arithmétique de raison r.
   Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 + nr$ et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $u_n = \alpha + \dfrac{1}{v_0 + nr} = \alpha + \dfrac{u_0 - \alpha}{1 + nr(u_0 - \alpha)}$
   (e) On a alors $\lim(u_n) = \alpha$, car $r \neq 0$ sinon $\alpha = -\frac{d}{c} = \frac{-b}{a}$ et $ad = bc$.

C. Etude des homographies, comme fonctions de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$

1. La fonction f_A est définie sur $\mathcal{D}_A = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$.
   Sur cet ensemble, elle est dérivable et pour tout $x \in \mathcal{D}_A$:

$$f_A'(x) = \frac{ad - bc}{(cx+d)^2} = \frac{1}{(cx+d)^2} \geqslant 0$$

   Donc f_A est strictement croissant et continue sur $]-\infty, -\frac{d}{c}[$
   donc établit une bijection de $]-\infty, -\frac{d}{c}[$ vers $]\lim_{-\infty} f_A, \lim_{(-\frac{d}{a})^-} f_A[=]-\frac{a}{c}, +\infty[$,
   et établit une seconde bijection de $]-\frac{d}{c}, +\infty[$ vers $]\lim_{(-\frac{d}{a})^+} f_A, \lim_{+\infty} f_A, [=]-\infty, -\frac{a}{c}[$,
   La courbe admet donc une asymptote horizontale d'équation $y = -\frac{a}{c}$ et une asymptote verticale d'équation $x = -\frac{d}{a}$. Il reste à tracer la courbe :



2. On suppose que $\frac{-d}{c} \notin [0,1]$.
On commence par une division euclidienne : $ax+b = \frac{a}{c}(cx+d)+(b-\frac{ad}{c})$ ($c \neq 0$). Par linéarité :

$$\int_0^1 f_A(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{ax+b}{cx+d}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{a}{c}\mathrm{d}x + \frac{bc-ad}{c}\int_0^1 \frac{1}{cx+d}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{a}{c}[x]_0^1 + \frac{1}{c^2}[\ln|cx+d|]_0^1$$

Donc

$$\boxed{\int_0^1 f_A(x)\mathrm{d}x = \frac{ac + \ln|\frac{c+d}{d}|}{c^2}}$$

On notera que comme $\frac{-d}{c} \notin [0,1]$, $x \mapsto cx+d$ est de signe constant sur $[0,1]$
et donc le signe de $c1+d = c+d$ et celui de $c0+d = d$ est le même et donc $|\frac{c+d}{d}| = \frac{c+d}{d}$

3. Approximation en 0. On considère une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
On note $\varphi : x \mapsto (cx+d)f(x) - (ax+b)$.
   (a) On raisonne par équivalence pour chacune des trois questions qui suivent.

   $$\varphi(x) = 0 \Longleftrightarrow df(0) - b = 0$$

   $$\boxed{\text{La relation } (\mathcal{R}_1) \text{ cherchée est } df(0) - b = 0}$$

   (b) De même, φ est dérivable $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

   $$\varphi'(x) = cf(x) + (cx+d)f'(x) - a$$

   $$\boxed{\text{La relation } (\mathcal{R}_2) \text{ cherchée : } cf(0) + df'(0) - a = 0}$$

   (c) De même, φ' est dérivable $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

   $$\varphi''(x) = 2cf'(x) + (cx+d)f''(x)$$

   $$\boxed{\text{La relation } (\mathcal{R}_3) \text{ cherchée : } 2cf'(0) + df''(0) = 0}$$

   (d) Si $f'(0) = 0$, alors on a $cf(0) = a$ et avec $(\mathcal{R}_1)$: $df(0) = b$.

   $$\boxed{\text{On a donc } ad - bc = cf(0)d - df(0)c = 0}$$

   (e) On suppose que $f'(0) \neq 0$. On va exprimer les variables a, b, c en fonction de d. Puis trouver une condition sur d.
   — Avec $(\mathcal{R}_1)$, $b = f(0) \times d$
   — Avec $(\mathcal{R}_3)$, $c = \frac{-f''(0)}{2f'(0)} \times d$ (car $f'(0) \neq 0$).
   — Avec $(\mathcal{R}_2)$, $a = cf(0) + df'(0) = \frac{-f''(0)f(0)+2(f'(0))^2}{2f'(0)} \times d$
   — Enfin, puisque A est normalisé : $ad - bc = 1$, donc

   $$1 = \left(\frac{-f''(0)f(0) + 2(f'(0))^2}{2f'(0)} - \frac{-f''(0)f(0)}{2f'(0)}\right) d^2 = f'(0)d^2$$

   (On voit que si $f'(0) = 0$, on a un problème...)
   On a donc $d = \pm \frac{1}{\sqrt{f'(0)}}$ (par hypothèse, $f'(0) > 0$) et puis :

   $$(a,b,c,d) = \pm \left(\frac{-f''(0)f(0) + 2(f'(0))^2}{2\left(\sqrt{f'(0)}\right)^3}; \frac{f(0)}{\sqrt{f'(0)}}; \frac{-f''(0)}{2\left(\sqrt{f'(0)}\right)^3}; \frac{1}{\sqrt{f'(0)}} \right)$$

   Il n'y alors qu'une solution telle que $c > 0$:

$$\boxed{(a,b,c,d) = \epsilon \times \left(\frac{-f''(0)f(0) + 2(f'(0))^2}{2\left(\sqrt{f'(0)}\right)^3}; \frac{f(0)}{\sqrt{f'(0)}}; \frac{-f''(0)}{2\left(\sqrt{f'(0)}\right)^3}; \frac{1}{\sqrt{f'(0)}} \right) \quad \text{avec } \epsilon = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad f''(0) < 0 \\ -1 & \text{si} \quad f''(0) > 0 \end{cases}}$$

(f) Soit $X>0$. On suppose qu'il existe $M\in\mathbb{R}$ tel que pour $x\in]-X,X[$, $|\varphi^{(3)}(x)|\leqslant M$.
On intègre les inégalités, il faut faire attention à l'ordre des bornes. Si $x>0$

$$\begin{aligned}
-M\leqslant\varphi^{(3)}(x)\leqslant M \quad &\Longrightarrow \quad -M\int_0^x \mathrm{d}t\leqslant\int_0^x\varphi^{(3)}(t)\mathrm{d}t\leqslant M\int_0^x\mathrm{d}t\\
&\Longrightarrow \quad -Mx\leqslant\varphi^{(2)}(x)\mathrm{d}t\leqslant Mx \qquad \text{car } \varphi''(0)=0\\
&\Longrightarrow \quad -M\int_0^x t\mathrm{d}t\leqslant\int_0^x\varphi^{(2)}(t)\mathrm{d}t\leqslant M\int_0^x t\mathrm{d}t\\
&\Longrightarrow \quad -M\frac{x^2}{2}\leqslant\varphi'(x)\mathrm{d}t\leqslant M\frac{x^2}{2} \qquad \text{car } \varphi'(0)=0\\
&\Longrightarrow \quad -M\int_0^x\frac{t^2}{2}\mathrm{d}t\leqslant\int_0^x\varphi'(t)\mathrm{d}t\leqslant M\int_0^x\frac{t^2}{2}\mathrm{d}t\\
&\Longrightarrow \quad -M\frac{x^3}{6}\leqslant\varphi(x)\mathrm{d}t\leqslant M\frac{x^3}{6} \qquad \text{car } \varphi(0)=0\\
&\Longrightarrow \quad (ax+b)-M\frac{x^3}{6}\leqslant(cx+d)f(x)\mathrm{d}t\leqslant(ax+b)+M\frac{x^3}{6} \qquad \text{car } \varphi(0)=0
\end{aligned}$$

Et donc, puisque $cx+d\neq 0$, car $-\frac{d}{c}\notin]-0,X[$:
pour tout $x\in[0,X]$: $f_A(x)-\frac{M}{6}\frac{x^3}{cx+d}\leqslant f(x)\leqslant f_A(x)+\frac{M}{6}\frac{x^3}{cx+d}$.
Dans le cas où $x<0$, le raisonnement est le même sauf qu'on intégrera de x à 0, pour garder la croissance des bornes. La démarche est la même, et on obtient en fin de calcul :

$$-M\frac{-x^3}{6}\leqslant-\varphi(x)\mathrm{d}t\leqslant M\frac{-x^3}{6}$$

il suffit de multiplier par (-1) pour trouver le résultat attendu.

$$\boxed{\text{Ainsi pour tout } x\in]-X,X[,\ f_A(x)-\frac{M}{6}\frac{x^3}{cx+d}\leqslant f(x)\leqslant f_A(x)+\frac{M}{6}\frac{x^3}{cx+d}}$$

4. Application :
(a) Pour la fonction exponentielle, en 0, il faut considérer $f=f'=f''=\exp$,
on considère donc : $(a,b,c,d)=(-\frac{1}{2};-1;\frac{1}{2};-1)$ et on choisit la fonction déjà rencontrée en B.1. :

$$\boxed{f_A:x\mapsto\frac{-\frac{1}{2}x-1}{\frac{1}{2}x-1}=\frac{x+2}{-x+2}}$$

On admet que dans ce cas et pour $X=1$, on trouve pour tout $x\in]-1,1[$, $|\varphi^{(3)}(x)|\leqslant e$.
(b) On a donc d'après la partie précédente :

$$\forall\ x\in]-1,1[\qquad -\frac{e}{6}\frac{x^3}{-x+2}\leqslant e^x-\frac{x+2}{-x+2}\leqslant\frac{e}{6}\frac{x^3}{-x+2}$$

Pour obtenir un logarithme, on peut intégrer entre 0 et 1 ces inégalités et exploiter la réponse à la question 2 ($-\frac{d}{c}=2\notin]0,1[$).
Or d'après la question 2

$$\int_0^1 e^x-\frac{x+2}{-x+2}=(e^1-1)-\frac{\frac{1}{2}\times(-\frac{1}{2})+\ln\dfrac{-\frac{1}{2}+1}{1}}{(-\frac{1}{2})^2}=(e^1-1)-(-1+4\ln\frac{1}{2})=e-4\ln 2$$

Alors que

$$\int_0^1\frac{e}{6}\frac{x^3}{-x+2}\mathrm{d}x=\frac{e}{6}\int_0^1\left(-x^2-2x-4+\frac{8}{-x+2}\right)\mathrm{d}x=\frac{e}{6}\left[\frac{-x^3}{3}-x^2-4x-8\ln(|2-x|)\right]_0^1$$

$$\int_0^1\frac{e}{6}\frac{x^3}{-x+2}\mathrm{d}x=\frac{e}{6}\left(-\frac{16}{3}+8\ln 2\right)$$

Or d'après l'énoncé, $\frac{e}{6}\left(-\frac{16}{3}+8\ln 2\right)\approx 0,095$, on a donc

$$\boxed{|4\ln 2-e|\leqslant\frac{e}{6}\left(-\frac{16}{3}+8\ln 2\right)\approx 0,095}$$

Le calcul donne $4\ln 2=2,772\ldots$

5. Approximation en x_0.
   On cherche à trouver f_A homographique approchant f en x_0.
   Or
$$\boxed{\text{en considérant } \psi : h \mapsto (c(x_0+h)+d) \times f(x_0+h) - (a(x_0+h)+b),}$$
   on trouve une fonction ψ à étudier comme dans le cas 3, pour sa variable proche de 0.
   C'est la méthode employée pour les développements limités ailleurs qu'en 0