# Devoir surveillé n°4
BEST OF

---

Règles à suivre :
- Encadrer les solutions.
- Tirer des traits entre chaque question.
- Laisser « respirer »vos textes.
- La graphie doit laisser apparaitre les étapes de la démonstrations.
- Ne commencer jamais un long calcul (ni long raisonnement) en bas d'une page.

---

## Exercice

*On rappelle qu'un nombre premier est un entier $p \geq 2$ dont les seuls diviseurs positifs sont $1$ et $p$. Soit $p$ un nombre premier et $n$ un entier naturel divisible par $p$. Soit $(G, .)$ un groupe de cardinal $n$ (pas forcément commutatif). On cherche à montrer qu'il existe dans $G$ un élément $x \neq e_G$ tel que $x^p = e_G$.*

.1. Dans cette question $G = \mathbb{U}_6 = \{z \in \mathbb{C}^* \mid z^6 = 1\}$. Redémontrer que $(G, \times)$ est un groupe et donner un élément $x$ de $G$ différent de $e_G$ tel que $x^3 = e_G$.

*Soit $\sigma \in \mathcal{F}(G^p, G^p)$ définie par $\forall\,(x_1, \dots, x_p) \in G^p$, $\sigma(x_1, \dots, x_p) = (x_2, x_3, \dots, x_p, x_1)$.*

.2. Montrer que $\sigma$ est bijective et donner sa réciproque. On peut donc définir pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$\sigma^k = \begin{cases} \sigma \circ \sigma \circ \ldots \circ \sigma \quad (k\,\text{fois}) & \text{si } k > 0 \\ Id_{G^p} & sik = 0 \\ \sigma^{-1} \circ \sigma^{-1} \circ \ldots \circ \sigma^{-1} \quad (|k|\,\text{fois}) & \text{si } k < 0 \end{cases}$$

On retrouve les règles de calculs sur les puissances : $\forall\,(k, k') \in \mathbb{Z}^2$, $\sigma^k \circ \sigma^{k'} = \sigma^{k+k'}$, $(\sigma^k)^{k'} = \sigma^{kk'}$.

*On pose $E = \Big\{(x_1, \dots, x_p) \in G^p / x_1 x_2 \dots x_p = e_G\Big\}$ et on définit sur $E$ une relation $\mathcal{R}$ par $\forall\,(X, Y) \in E^2$,*

$$X \mathcal{R} Y \iff \exists\, k \in \mathbb{Z} \,:\, Y = \sigma^k(X)$$

.3. Montrer que si $X \in E$, $\sigma(X) \in E$. On montrerait de même que si $X \in E$, $\sigma^{-1}(X) \in E$ et donc par des récurrences élémentaires que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, si $X \in E$, $\sigma^k(X) \in E$.

.4. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $E$ et que pour tout $X \in E$, la classe d'équivalence de $X$, notée $\dot{X}$, est égale à $\Big\{\sigma^k(X), k \in \mathbb{Z}\Big\}$.

.5. Soit $X = (x_1, \dots, x_p) \in E$.

(a) Montrer que $H = \{k \in \mathbb{Z} \;/\; \sigma^k(X) = X\}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$ qui contient $p$.

(b) En considérant $n_0 = \min\{k > 0 \,:\, \sigma^k(X) = X\}$, montrer que $H = n_0\mathbb{Z}$ (*Ind : Pour l'inclusion directe, on pourra faire une division euclidienne).*

(c) En déduire que $H = \mathbb{Z}$ ou $H = p\mathbb{Z}$.

(d) Montrer que si $H = \mathbb{Z}$, $\dot{X} = \{X\}$, $x_1 = x_2 = \ldots = x_p$ et $x_1^p = e_G$ puis donner un exemple simple d'un tel élément X.

(e) Montrer que si $H = p\mathbb{Z}$, $\text{card}\dot{X} = p$.

.6. Montrer que l'application $\phi$ de $E$ dans $G^{p-1}$ définie par $\phi(x_1, \dots, x_p) = (x_1, x_2, \dots, x_{p-1})$ est bijective.

.7. Montrer que si $s$ (resp $q$) est le nombre de classes d'équivalence à 1 élément (resp $p$), $s + pq = n^{p-1}$.

.8. Montrer que $s \geq 2$ et conclure.

## Problème

*Dans tout le problème, on manipule des suites réelles indexées par $\mathbb{N}$. On les notera $(u_n)$ au lieu de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour simplifier.*

**Partie I**

.1. Soit $(u_n)$ une suite définie par $u_0 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = K\sqrt{u_n}$ où $K$ est une constante $> 0$.

(a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n$ est bien défini et $u_n > 0$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \ln u_n$.

(b) Déterminer la relation de récurrence vérifiée par la suite $(v_n)$.

(c) En déduire l'expression explicite de $v_n$ en fonction de $n$ puis celle de $u_n$.

(d) Quelle est la limite de $(u_n)$ ?

.2. On veut étudier le comportement de la suite $(u_n)$ définie par $u_0 \in [\frac{1}{16}, 16]$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{n+1}{2n+1}\sqrt{u_n}$.

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n$ est bien défini et $\frac{1}{16} \leq u_n \leq 16$.

(b) Si $(u_n)$ converge vers un réel $\ell$, quelle est sa limite ?

(c) Soit $\epsilon \in ]0,1[$. Justifier qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $\frac{1}{2}\sqrt{u_n} \leq u_{n+1} \leq \frac{1+\epsilon}{2}\sqrt{u_n}$.

(d) Montrer que pour tout $n \geq N$, si $k = \frac{1+\epsilon}{2}$,

$$\frac{1}{4}\Big(4u_N\Big)^{\frac{2^N}{2^n}} \leq u_n \leq k^2\Big(\frac{u_N}{k^2}\Big)^{\frac{2^N}{2^n}}$$

(e) En déduire qu'il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N'$, $\frac{1}{4} - \epsilon \leq u_n \leq k^2 + \frac{\epsilon^2}{4} \leq \frac{1}{4} + \epsilon$. Qu'en déduit-on ?

**Partie II**

Dans toute cette partie, $(u_n)$ désigne une suite réelle bornée. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$E_n = \big\{u_k,\ k \geq n\big\} \qquad \hat{u}_n = \sup E_n = \sup\big\{u_k,\ k \geq n\big\} \qquad \check{u}_n = \inf E_n = \inf\big\{u_k,\ k \geq n\big\}$$

.1. (a) Soient $A$ et $B$ deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$ telles que $A\imath B$. Comparer, en justifiant, $\sup A$ et $\sup B$ puis $\inf A$ et $\inf B$.

(b) Montrer que $\big(\hat{u}_n\big)$ et $\big(\check{u}_n\big)$ sont monotones puis comparer pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\hat{u}_n$, $u_n$ et $\check{u}_n$.

(c) En déduire que $\big(\hat{u}_n\big)$ et $\big(\check{u}_n\big)$ convergent.

*Pour $(u_n)$ suite réelle bornée, on appelle limite supérieure (resp. inférieure) de la suite $(u_n)$ et on note $\limsup(u_n)$ (resp. $\liminf(u_n)$) les réels*

$$\limsup(u_n) = \lim \hat{u}_n = \lim\Big(\sup\{u_k,\ k \geq n\}\Big) \qquad \liminf(u_n) = \lim \check{u}_n = \lim\Big(\inf\{u_k,\ k \geq n\}\Big)$$

.2. On suppose dans cette question que $(u_n)$ est $T$-périodique ($T \in \mathbb{N}^*$). Calculer $\limsup(u_n)$ et $\liminf(u_n)$ en fonction de $E = \{u_0, u_1 \ldots, u_{T-1}\}$.

.3. Soit $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites bornées telles qu'à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$. Montrer que $\limsup(u_n) \leq \limsup(v_n)$.

.4. Soit $(u_n)$ une suite réelle bornée.

(a) Montrer que si $\limsup(u_n) = \liminf(u_n)$, $(u_n)$ converge.

(b) Inversement, on suppose que $(u_n)$ converge vers un réel $\ell$. Montrer que $(\hat{u}_n)$ converge aussi vers $\ell$. Il en est évidemment de même pour $(\check{u}_n)$.

.5. En raisonnant par l'absurde, montrer que si $L = \limsup u_n$,
— pour tout $\lambda < L$, l'ensemble des entiers $p$ tels que $u_p \geq \lambda$ est infini,
— pour tout $\lambda > L$, l'ensemble des entiers $p$ tels que $u_p \geq \lambda$ est fini.

.6. Soit $(u_{\phi(n)})$ une suite extraite de $(u_n)$ qui converge vers un réel $x$. Montrer que $x \leq \limsup(u_n)$.

.7. Inversement, montrer qu'il existe une suite extraite $(u_{\phi(n)})$ qui converge vers $L = \limsup u_n$. On pourra construire avec Q5 une extractrice $\phi$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $L - \frac{1}{2^n} \leq u_{\phi(n)} \leq L + \frac{1}{2^n}$.

.8. Que déduit-on des 2 questions précédentes ? Transposer les résultats des questions 5,6 et 7 avec $\liminf$ (on ne demande pas de les justifier).

.9. Soit $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites à valeurs positives ou nulles bornées.

(a) Montrer que $\limsup(u_n v_n) \leq \limsup(u_n)\limsup(v_n)$.

(b) Montrer qu'il y a égalité si $(u_n)$ converge. On pourra considérer une suite extraite de $(v_n)$ qui converge vers $\limsup(v_n)$.

(c) Donner un contre-exemple à l'égalité dans le cas général.

(d) Quel résultat peut-on écrire avec des limites inférieures ? On ne demande pas de justifier.

**Partie III**

.1. On considère à nouveau la suite de la question I.2. En utilisant les outils de la partie II, redémontrer que $(u_n)$ converge en prouvant que $\limsup u_n = \liminf u_n = \frac{1}{4}$.

.2. Soit $(u_n)$ une suite strictement positive telle que pour tout $(n, r, s) \in \mathbb{N}^3$, $n \leq r + s \Longrightarrow a_n \leq a_r a_s$.

(a) Montrer que pour tout $(n, r) \in \mathbb{N}^2$, tout $s \geq 2$, si $n \leq rs$, $a_n \leq a_r^s$.

(b) En déduire que pour tout entier $r \geq 1$, tout entier $n \geq r$, $a_n^{\frac{1}{n}} \leq a_r^{\frac{\lfloor \frac{n}{r} \rfloor + 1}{n}}$.

(c) Montrer que $(u_n) = (a_n^{\frac{1}{n}})$ est bornée puis que pour tout $r \geq 1$, $\limsup(u_n) \leq u_r$.

(d) Conclure que $(u_n)$ converge.

**Vu dans des copies...**

*≪ Montrons que $\tau$ est injective.*

*Soit $\tau(u) \in E$. $(\tau u)_n = u_{n+1}$. Donc $u_n = u_{n+1}$. Donc $\tau$ injective.*

*Soit $u_{n+1} \in E$.*

*$\exists\ u_n \in E$. D'après l'application $\tau$, on a $\tau(u_n) = u_{n+1}$. Donc $\tau$ est surjective.*

*Cependant, avec une suite constante notée $(b_n)$, $\tau(b_n) = b_{n+1} = b_{n+2} = \dots$.*

*Ainsi, il n'existe pas une unique suite pour laquelle $\tau(u_n) = u_{n+1}$.*

*Donc $\tau$ n'est pas bijective. ≫*

**Vu dans des copies...**

*≪ Les suites définies étant indexées par $\mathbb{N}$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}$ admet au moins un antécédant par $\tau$ qui est $u_n$. $\tau$ est donc surjective.*

*Comme 2 termes de même indice ont le même terme précédent, on en déduit $\tau$ injective. $\tau$ bijective. ≫*