 Pour le 10.01.2023

Devoir à la maison n°5

La notation tiendra particuliérement compte de **la qualité de la rédaction, la précision des raisonnements et l'énoncé des formules utilisées**.

Exercice 1. Valeur prise par une fonction au voisinage de $+\infty$

On fixe dans tout l'exercice une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ quelconque. On considère l'ensemble :

$$X_f = \{y \in \mathbb{R} \mid \forall\, A \in \mathbb{R}, \exists\, x \geqslant A, f(x) = y\}$$

1. Soit $T > 0$ fixé. On suppose que f est T-périodique.
   Montrer que $X_f = f([0, T[)$.
2. On suppose maintenant que f est une fonction injective.
   Montrer que l'ensemble X_f est vide.
3. On suppose que $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
   Montrer que, là encore, l'ensemble X_f est vide.
4. On suppose que la fonction f admet en $+\infty$ une limite réelle ℓ.
   (a) Montrer que $X_f \subset \{\ell\}$.
   (b) Montrer par des exemples (avec les justifications nécessaires) que l'inclusion réciproque peut être vraie ou fausse.
5. On suppose que la fonction f est continue.
   Montrer que X_f est un intervalle de $\mathbb{R}$
   (on commencera par rappeler la définition d'un intervalle).

Exercice 2

On cherche dans cet exercice à démontrer le théorème des valeurs intermédiaires (T.V.I.) avec le lemme de Cousin.

1. Rappeler le théorème des valeurs intermédiaites pour f continue sur l'intervalle I.
2. On suppose donc que f est continue sur I et que $f(a) \times f(b) \leqslant 0$ (où $a, b \in I$).
   (a) Rappeler la définition de la continuité de f en $t \in [a, b]$.
   (b) En déduire, que pour tout $t \in [a, b]$ tel que $f(t) \neq 0$, il existe $\delta(t) > 0$ tel que $\forall\, u \in [t - \delta(t), t + \delta(t)]$,
   $$f(u) \leqslant \frac{1}{2} f(t) \text{ (si } f(t) < 0) \qquad f(u) \geqslant \frac{1}{2} f(t) \text{ (si } f(t) > 0)$$
   (c) On suppose pour les trois questions suivantes que le TVI est faux.
   En déduire une jauge $\delta > 0$ tel que
   $$\forall\, t \in [a, b], \forall\, u[t - \delta(t), t + \delta(t)], \qquad f(u) \times f(t) > 0$$
   (d) En appliquant le lemme de Cousin, à partir de cette jauge, montrer que $f(a)f(b) > 0$.
   (e) Conclure.

Problème. Etude d'une fonction

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad \forall\, x \neq 0, f(x) = \frac{1}{x^2} \times \exp(-\frac{1}{x})$$

1. Représentation de la fonction f.
   (a) Etudier la continuité à gauche et à droite, la dérivabilité à gauche et à droite de f en 0.
   (b) Etudier les limites et variations de f (à résumer dans un tableau) ; préciser les branches infinies.
   (c) Tracer la courbe représentative $\mathcal{C}$ de cette fonction dans un repère orthonormal (unité : 2 cm).
   On donne : $e^{-2} \approx 0,135$; $e^{-1} \approx 0,36$ et $e \approx 2,72$.
2. Dérivées successives de la fonction f et polynômes associés.
   (a) Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$.
   (b) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n à coefficients réels tel que :
   $$\forall\, x \in]0, +\infty[, f(n)(x) = \frac{P_n(x)}{x^{2n+2}} \times e^{-\frac{1}{x}}$$
   . Démontrer de plus que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_{n+1} = X^2 P'_n + [1 - 2(n+1)X]P_n$.
   (c) Calculer P_n pour $n \in [0, 4]$.
   (d) Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le degré, le coefficient dominant et le terme constant de P_n.
   (e) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, étudier la limite à droite en 0 de $f^{(n)}$.
   En déduire que la fonction $f_{|[0,+\infty[}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
3. Nouvelles relations entre les polynômes P_n.
   On considère la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to x^2 f(x)$.
   (a) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g^{(n+1)} = f^{(n)}$.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En utilisant la formule de Leibniz pour calculer $g^{(n+1)}$, démontrer que :
   $$\forall\, x \in]0, +\infty[, P_{n+1}(x) = [1 - 2(n+1)x]P_n(x) - n(n+1)x^2 P_{n-1}(x)$$
   (c) En déduire que : $\forall\, x \in]0, +\infty[$, $P'_n(x) = -n(n+1)P_{n-1}(x)$.
4. Etude des racines du polynôme P_n On notera $p_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction polynômiale associée au polynôme P_n.
   (a) A l'aide de la relation établie à la question 3 - c), montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x > 0$, $p_n(x) \neq 0$ ou $p_{n-1}(x) \neq 0$
   (b) En déduire que, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]0, +\infty[$, si la fonction p_n s'annule en x, alors $p'_n(x) \neq 0$.
   En déduire que la fonction p_n change de signe au point x.
   (c) Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction polynomiale p_n a au plus un nombre fini de points d'annulation sur $]0, +\infty[$.
   Notons k ce nombre et plaçons-nous dans le cas où $k \geqslant 2$; notons $x_1 < ... < x_k$ ces points d'annulation.
      i. Déterminer le signe de p_n sur les intervalles $[0, x_1[$, $]x_1, x_2[$, . . . , $]x_{k-1}, x_k[$.
      ii. Montrer que $p'_n(x_i)$ est du signe de $(-1)^i$.
      iii. Etudier le signe de p_{n+1} en chacun des x_i.
      iv. Etudier la limite de p_{n+1} en $+\infty$
      v. Supposons ici $k = n$. Que peut-on en déduire sur les points d'annulation de la fonction p_{n+1} ?
   (d) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme P_n possède au moins n racines dans $]0, +\infty[$.
   Peut-on être plus précis ?