Devoir à la maison n°4

La notation tiendra particuliérement compte de **la qualité de la rédaction, la précision des raisonnements et l'énoncé des formules utilisées**.

Exercice 1

Donner l'ensemble des solutions de $\mathcal{S}_{a,b}$ en fonction des valeurs des réels a et b :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 2x & +3y & +4z & -t & = & a \\ x & -y & +z & -2t & = & 0 \\ x & & +bz & & = & 1 \\ -x & +y & & -t & = & 2 \end{array}\right.$$

Exercice 2

On définit sur $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, la relation $\mathcal{R}$:

$$(a,b)\mathcal{R}(c,d) \qquad \Longleftrightarrow a \times d = b \times c$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur A.
2. Montrer qu'il existe une bijection naturelle de $\dfrac{A}{\mathcal{R}}$ sur $\mathbb{Q}$.
3. On considère $\leqslant_{\mathbb{Z}}$, la relation d'ordre classique définie sur $\mathbb{Z}$.
   On dit que
   $$(a,b) \leqslant_Q (c,d) \qquad \Longleftrightarrow a \times d \leqslant_{\mathbb{Z}} b \times c$$
   Montrer qu'on a ainsi créé une relation d'ordre totale sur $\dfrac{A}{\mathcal{R}}$.
4. Montrer que si $a, b \in \mathbb{Z}$ vérifie $a \leqslant_Z b$, alors $(a,1) \leqslant_Q (b,1)$.
   On parle d'extension de la relation d'ordre de $\mathbb{Z}$ à $\mathbb{Q}$
5. Comment définir $+_{\mathbb{Q}}$ et $\times_Q$, à partir de l'addition $+_{\mathbb{Z}}$ et $\times_{\mathbb{Z}}$?

Problème - Modèle de Verhulst (1838)

On considère une population d'individus.
On note $N(t)$ le nombre d'individus dans la population à l'instant t ($t \in [0; +\infty[$).
On note $N_0 = N(0)$ la taille de la population à l'instant initial $t = 0$. On suppose $N_0 > 0$.
Dans le modèle de Verhulst la fonction N est dérivable sur $[0; +\infty[$ et est solution de l'équation différentielle

$$y' = ry(1 - \frac{1}{K}y) \qquad (E)$$

où $r > 0$ et $K > 0$ sont deux paramètres dont on donnera un sens « physique » par la suite.

1. Une première fonction intermédiaire.
   On suppose que N est une solution de (E). On lui associe $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, $t \mapsto N(t)e^{-rt}$.
   (a) Justifier que f est dérivable sur $[0; +\infty[$.
   (b) Montrer que f est solution de l'équation différentielle (E_1) : $y' = -\frac{r}{K}N(t)y$.
   (c) En déduire qu'il existe une fonction g définie sur $[0; +\infty[$ et un réel $C > 0$ tels que :
   $$\forall\, t \geqslant 0, \qquad f(t) = Ce^{g(t)}$$
   on exprimera g et C en fonction (d'une primitive) de N et des paramètres N_0, r et K.

2. Une seconde fonction intermédiaire. Soit $h : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, $t \mapsto \dfrac{1}{N(t)}$.
   (a) Justifier que la fonction h est définie et dérivable sur $[0; +\infty[$.
   (b) Montrer que h est solution de l'équation différentielle linéaire (E_2) : $y' = -ry + \frac{r}{K}$.
   (c) Résoudre l'équation différentielle (E_2).
   (d) En déduire que la fonction N est définie pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, par

$$N(t) = \frac{N_0 e^{rt}}{1 + \frac{N_0}{K}(e^{rt} - 1)}$$

Dans la suite, on admet que la fonction N est définie sur $\mathbb{R}_+$ par $N(t) = \dfrac{N_0 e^{rt}}{1 + \frac{N_0}{K}(e^{rt} - 1)}$.
On rappelle que $N_0 > 0$.

3. Etude de la fonction N.
   (a) Déterminer $\lim_{t \to +\infty} N(t)$.
   En déduire la raison pour laquelle Verhulst appelle la constante K : « capacité du milieu ».
   (b) Étudier les variations (strictes) de N sur $[0; +\infty[$.
   On distinguera plusieurs cas en fonction des paramètres du problème

4. On suppose que $N_0 < \frac{1}{2}K$.
   (a) Montrer que N est de classe $\mathcal{C}^2$ et que pour tout $t \geqslant 0$

$$N''(t) = r^2 N(t) \times \left(1 - \frac{1}{K}N\right)\left(1 - \frac{2}{K}N\right)$$

   (b) En déduire qu'il existe un unique réel t_0 dans l'intervalle $]0; +\infty[$ tel que $N''(t_0) = 0$.
   (c) On dit qu'une fonction φ, de classe $\mathcal{C}^2$ est
   convexe sur un intervalle J, si pour tout $t \in J$, $\varphi''(t) > 0$.
   concave sur un intervalle J si pour tout $t \in J$, $\varphi''(t) < 0$.
   Etudier la convexité/concavité de N sur (les intervalles de) $\mathbb{R}$.
   (d) Verhulst considérait que « *la date à laquelle la croissance de la population commence à ralentir correspond au moment où la taille de la population atteint la moitié de sa valeur limite.* »
   En considérant t_0 et $N(t_0)$, justifier l'affirmation de Verhulst.
   (e) Tracer la courbe représentant N en fonction de t, pour $t \geqslant 0$. On prendra $K = 4 \times N_0$ et $t_0 = 3$cm. On veut voir sur la courbe :
   — la tangente en $t = 0$.
   — la tangente en $t = t_0$.
   — l'asymptote pour $t \to +\infty$

5. On suppose toujours que $0 < N_0 < \frac{K}{2}$.
   Verhulst appelait *deuxième âge [de la croissance de la population]* la période se situant entre les instants 0 et t_0, et *troisième âge* la période se situant entre les instants t_0 et $2t_0$.
   (a) Montrer que $\exp(rt_0) = \dfrac{K}{N_0} - 1$.
   (b) Donner une primitive de N sur $[0, +\infty[$.
   (c) On appelle valeur moyenne d'une fonction φ continue sur un intervalle $[a; b]$, le nombre

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(t)\mathrm{d}t$$

   Montrer que la valeur moyenne de N sur la période s'étendant sur les *deuxième* et *troisième* âges selon Verhulst (i.e. entre $t = 0$ et $t = 2t_0$) est égale à $\dfrac{K}{2}$.
   (d) On note $N_1 = N(t_0)$. Montrer que $r = \dfrac{1}{t_0} \ln \dfrac{\frac{1}{N_0} - \frac{1}{K}}{\frac{1}{N_1} - \frac{1}{K}}$.