Devoir à la maison n°4
CORRECTION

Exercice 1

On exploite le pivot de Gauss. Pour le moment, il n'y a pas de conditions sur a et b.
On note (S) le système à résoudre.
On a placé la ligne 4 en haut, pour avoir un pivot simple et ne pas propager les a et b (pas trop vite...)

$$(S) \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrrcr|l} -x & +y & & -t & = & 2 & L_1 \leftarrow L_4 \\ & 5y & +4z & -3t & = & a+4 & L_2 \leftarrow L_1 + 2L_4 \\ & & +z & -3t & = & 2 & L_3 \leftarrow L_2 + L_4 \\ & y & +bz & -t & = & 3 & L_4 \leftarrow L_3 + L_4 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrrcr|l} -x & +y & & -t & = & 2 & \\ & y & +bz & -t & = & 3 & L_2 \leftarrow L_4 \\ & & +z & -3t & = & 2 & \\ & 5y & +4z & -3t & = & a+4 & L_4 \leftarrow L_2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrcr|l} -x+y & & -t & = & 2 & \\ y & +bz & -t & = & 3 & \\ & +z & -3t & = & 2 & \\ & (4-5b)z & +2t & = & a-11 & L_4 \leftarrow L_4 - 5L_2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrcr|l} -x+y & & -t & = & 2 & \\ y & +bz & -t & = & 3 & \\ & +z & -3t & = & 2 & \\ & (14-15b)z & & = & 3a-29 & L_4 \leftarrow 3L_4 + 2L_3 \end{array}\right.$$

Donc (ce dernier système étant échelonné, on peut le commenter) :

- Si $14 - 15b = 0 \Leftrightarrow b = \frac{14}{15}$, alors
  - si $3a - 29 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq \frac{29}{3}$, la quatrième équation n'admet aucune solution, donc le système est sans solution
  - si $3a - 29 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{29}{3}$, la quatrième équation est toujours vraie, pour tout $z \in \mathbb{R}$.
    Le système est donc équivalent à (en remplaçant a et b par ces valeurs) :

$$(S) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrcrr} -x+y & & = & 2 & +t \\ y & +\frac{14}{15}z & = & 3 & +t \\ & +z & = & 2 & +3t \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrr|l} -x+y & = & 2 & +t & \\ y & = & \frac{17}{15} & -\frac{27}{15}t & L_2 \leftarrow L_2 - \frac{14}{15}L_3 \\ z & = & 2 & +3t & \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrr|l} x & = & -\frac{13}{15} & -\frac{42}{15}t & L_1 \leftarrow -L_1 + L_2 \\ y & = & \frac{17}{15} & -\frac{27}{15}t & \\ z & = & 2 & +3t & \end{array}\right.$$

    Dans ce cas on trouve $\mathcal{S} = \{\frac{1}{15}(-13, 17, 30, 0) + \lambda(-42, -27, 45, 15); \lambda \in \mathbb{R}\}$.
- Si $14 - 15b \neq 0$, alors le système est équivalent à

$$(S) \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrcr} -x+y & & -t & = & 2 \\ y & +bz & -t & = & 3 \\ & +z & -3t & = & 2 \\ & z & & = & \dfrac{3a-29}{14-15b} \end{array}\right.$$

Après calculs (...) : on trouve $\mathcal{S} = \left\{\left(\dfrac{42 - 9ab + 42b}{42 - 45b}, \dfrac{3a - 9ab + 69 - 18b}{42 - 45b}, \dfrac{3a - 29}{14 - 15b}, \dfrac{3a - 57 + 30b}{42 - 45b}\right)\right\}$

Exercice 2

On définit sur $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, la relation $\mathcal{R}$:

$$(a,b)\mathcal{R}(c,d) \qquad \iff a \times d = b \times c$$

1. La relation est :
   — réflexive : $\forall\ (a,b) \in A$, comme $ab = ba$, on a $(a,b)\mathcal{R}(a,b)$.
   — symétrique : supposons que $(a,b)\mathcal{R}(c,d)$, alors $ad = bc$ et donc $cb = da$, donc $(c,d)\mathcal{R}(a,b)$.
   — transitive : supposons que $(a,b)\mathcal{R}(c,d)$ et $(c,d)\mathcal{R}(e,f)$.
   donc $ad = bc$ et $cf = ed$, ainsi $adf = bcf = bed$, donc $af \times d = be \times d$.
   ainsi $(af - be)d = 0$, d étant non nul, alors $af = be$ et donc $(a,b)\mathcal{R}(e,f)$.

   $\boxed{\mathcal{R} \text{ est une relation d'équivalence sur } A.}$

2. Soit $\Phi : \dfrac{A}{\mathcal{R}} \to \mathbb{Q}$, $\overline{(a,b)} \mapsto \dfrac{a}{b}$ (i.e. la classe de (a,b)).
   Cette fonction est bien définie : si (a,b) et (a',b') sont dans la même classe d'équivalence,
   c'est-à-dire $(a,b)\mathcal{R}(a',b')$ donc $ab' = a'b$ et donc $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a'}{b'}$.
   Φ est bien définie sur les classes d'équivalence, quel que soit le représentant choisi.
   Φ est bien bijective, car $\Phi^{-1} : r = \frac{p}{q} \mapsto \overline{(p,q)}$.

   $\boxed{\text{Il existe une bijection naturelle de } \dfrac{A}{\mathcal{R}} \text{ sur } \mathbb{Q}.}$

3. On considère $\leqslant_{\mathbb{Z}}$, la relation d'ordre classique définie sur $\mathbb{Z}$.
   On dit que

   $$(a,b) \leqslant_Q (c,d) \qquad \iff a \times d \leqslant_{\mathbb{Z}} b \times c$$

   La relation est
   — reflexive. Pour tout $(a,b) \in A$, $ab = ba$ donc $ab \leqslant_{\mathbb{Z}} ba$ donc $(a,b)\mathcal{R}(a,b)$.
   — antisymétrique. Supposons que $(a,b) \leqslant_Q (c,d)$ et $(c,d) \leqslant_Q (a,b)$.
   Donc $ad \leqslant_Z bc$ et $bc \leqslant_{\mathbb{Z}} ad$, donc $ad = bc$ et ainsi $(a,b)\mathcal{R}(c,d)$.
   Autrement dit : $\overline{(a,b)} = \overline{(c,d)}$.
   — transitive : Supposons que $(a,b) \leqslant_Q (c,d)$ et $(c,d) \leqslant_Q (e,f)$.
   On applique comme précédemment : $ad \leqslant_{\mathbb{Z}} bc$ et $cf \leqslant_{\mathbb{Z}} de$.
   On multiplie par $f > 0$, donc $adf \leqslant_Z bcf$ et par $b > 0$, donc $bcf \leqslant_{\mathbb{Z}} bde$.
   On a donc $adf \leqslant_{\mathbb{Z}} bde$ (par transitivité de $\leqslant_{\mathbb{Z}}$), puis en simplifiant par $d > 0$: $af \leqslant_{\mathbb{Z}} be$.
   Ainsi $(a,b) \leqslant_Q (e,f)$.

   $\boxed{\text{On a ainsi créé une relation d'ordre totale sur } \dfrac{A}{\mathcal{R}}.}$

4. Supposons que $a, b \in \mathbb{Z}$ vérifiant $a \leqslant_{\mathbb{Z}} b$,
   On a $a \times 1 \leqslant_{\mathbb{Z}} 1 \times b$, donc

   $$\boxed{(a,1) \leqslant_Q (b,1)}$$

5. On rappelle le lien entre $\mathbb{Q}$ et $\dfrac{A}{\mathcal{R}}$ avec $\frac{a}{b}$ par (a,b).
   Comme $\dfrac{a}{b} \times \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd}$,

   $\boxed{\text{on définit la multiplication } (a,b) \times_{\mathbb{Q}} (c,d) \text{ par } (a \times_{\mathbb{Z}} c, b \times_{\mathbb{Z}} d).}$

   Comme $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad+bc}{bd}$,

   $\boxed{\text{on définit l'addition } (a,b) +_{\mathbb{Q}} (c,d) \text{ par } (a \times_{\mathbb{Z}} d +_{\mathbb{Z}} b \times_{\mathbb{Z}} c, b \times_{\mathbb{Z}} d).}$

Problème - Modèle de Verhulst (1838)

$$y' = ry(1 - \frac{1}{K}y) \qquad (E)$$

où r et K sont deux paramètres dont on donnera un sens « physique » par la suite.

1. Une première fonction intermédiaire.

   (a) N est dérivable par hypothèse (solution d'une EDL1). $t \mapsto e^{-rt}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, donc dérivable.
   Par multiplication,
   $$\boxed{f \text{ est dérivable sur } [0; +\infty[.}$$

   (b) On a alors, pour tout $t \geqslant 0$,
   $$f'(t) = N'(t)e^{-rt} - rN(t)e^{-rt} = rN(t) \times (1 - \frac{1}{K}N(t)) \times e^{-rt} - rN(t) \times e^{-rt} = -\frac{r}{K}N(t) \times N(t)e^{-rt}$$
   $$\boxed{\text{Donc } f \text{ est solution de l'équation différentielle } (E_1) : y' = -\frac{r}{K}N(t)y.}$$

   (c) Notons $\hat{N}$, une primitive de N sur $\mathbb{R}$ (N est continue sur $\mathbb{R}$).
   f est solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1, nécessairement :
   $$\exists\, K \in \mathbb{R} \qquad f : t \mapsto K \exp\left(-\int_{.}^{t} -\frac{r}{K}N(u)\mathrm{d}u\right) = K\exp\left(-\frac{r}{K}\hat{N}(t)\right)$$
   Par ailleurs, $f(0) = N(0)e^0 = N_0 = K\exp\left(-\frac{r}{K}\hat{N}(0)\right)$, donc $K = N_0 \exp\left(\frac{r}{K}\hat{N}(0)\right)$ Donc
   $$\boxed{\forall\, t \geqslant 0 \qquad f(t) = N_0 e^{-\frac{r}{K}(\hat{N}(t) - \hat{N}(0))}}$$

2. Une seconde fonction intermédiaire. Soit $h : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, $t \mapsto \dfrac{1}{N(t)}$.

   (a) D'après la partie précédente, pour tout $t \geqslant 0$,
   $$N(t) = f(t)e^{rt} = N_0 e^{rt - \frac{r}{K}(\hat{N}(t) - \hat{N}(0))} > 0$$
   Donc h est bien définie sur $\mathbb{R}_+$, elle est dérivable comme inverse d'une fonction dérivable jamais nulle.
   $$\boxed{h \text{ est définie et dérivable sur } [0; +\infty[.}$$

   (b) On a alors, pour tout $t \geqslant 0$
   $$h'(t) = -\frac{N'(t)}{N(t)} = r\left(1 - \frac{1}{K}N\right) = r - \frac{r}{K}h(t)$$
   $$\boxed{h \text{ est solution de l'équation différentielle linéaire } (E_2) : y' = -ry + \frac{r}{K} \ (E_2).}$$

   (c) Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du premier ordre.
   On résout l'équation homogène : $y' = -ry$.
   On a alors une solution $y_0 : t \mapsto e^{-rt}$ car r est constant.
   Concernant une solution particulière, on peut appliquer une méthode de type variation de la constante, ou trouver une solution particulière, par exemple constante $y : t \mapsto \dfrac{1}{K}$
   $$\boxed{\text{Donc } \mathcal{S} = \{t \mapsto Ce^{-rt} + \tfrac{1}{K}; C \in \mathbb{R}\}}$$

   (d) h est une solution donc $h \in \mathcal{S}$, et il existe C tel que $h : t \mapsto Ce^{-rt} + \frac{1}{K}$.
   Or
   $$h(0) = \frac{1}{N(0)} = \frac{1}{N_0} = Ce^0 + \frac{1}{K} \Rightarrow C = \frac{1}{N_0} - \frac{1}{K}$$
   Donc, pour tout $t \geqslant 0$,
   $$h(t) = \frac{1}{N_0}e^{-rt} + \frac{1}{K}(1 - e^{-rt})$$

Alors, pour tout $t \geqslant 0$,

$$N(t) = \frac{1}{h(t)} = \frac{1}{\frac{1}{N_0}e^{-rt} + \frac{1}{K}(1-e^{-rt})} \times \frac{N_0 e^{rt}}{N_0 e^{rt}} = \frac{N_0 e^{rt}}{1 + \frac{N_0}{K}(e^{rt}-1)}$$

$$\boxed{N : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ t \mapsto \frac{N_0 e^{rt}}{1 + \frac{N_0}{K}(e^{rt}-1)}}$$

3. Etude de la fonction N.

(a) Pour tout $t \geqslant 0$, en multipliant numérateur et dénominateur par $e^{-rt} > 0$:

$$N(t) = \frac{N_0}{e^{-rt}(1-\frac{N_0}{K}) + \frac{N_0}{K}} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{N_0}{\frac{N_0}{K}} = K$$

$$\boxed{\lim_{t\to+\infty} N(t) = K}$$

Comme K est la limite de N, quelle que soit la condition initiale ($N_0 > K$ ou $N_0 < K$), il s'agit de la capacité d'accueil du nombre de personnes N dans le milieu considéré.

$$\boxed{\text{Verhulst appelle la constante } K : \text{« capacité du milieu ».}}$$

(b) $t \mapsto e^{-rt}$ est décroissante sur $[0, +\infty[$) valeur dans $]0, 1]$.

— Si $\frac{N_0}{K} > 1$, alors $t \mapsto e^{-rt}(1-\frac{N_0}{K}$ est strictement croissante (multiplication par un nombre négatif).
L'ajout d'une constante, ne change rien.
La composition par $t \mapsto \frac{1}{t}$ rend la fonction strictement décroissante.
Dans ce cas : N est décroissante.

— Si $\frac{N_0}{K} < 1$, alors $t \mapsto e^{-rt}(1-\frac{N_0}{K}$ est strictement décroissante (multiplication par un nombre positif).
L'ajout d'une constante, ne change rien.
La composition par $t \mapsto \frac{1}{t}$ rend la fonction strictement croissante.
Dans ce cas : N est croissante.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Si } \frac{N_0}{K} < 1,\ N \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+\\ \text{si } \frac{N_0}{K} > 1,\ N \text{ est strictement décroissante sur } \mathbb{R}_+\\ \text{et si } \frac{N_0}{K} = 1,\ N \text{ est constante égale à } K\end{array}}$$

4. On suppose que $N_0 < \frac{1}{2}K$ (et donc $\frac{N_0}{K} < 1$).

(a) Comme N est dérivable et que $N' = rN\left(1-\frac{N}{K}\right)$, alors N' est également dérivable.
Donc N' est continue, donc N est de classe $\mathcal{C}^1$.
Ainsi N' est de classe $\mathcal{C}^1$ et donc

$$\boxed{N \text{ est de classe } \mathcal{C}^2.}$$

Et pour tout $t \geqslant 0$, (en dérivant l'équation différentielle) :

$$\begin{aligned} N''(t) &= rN'(t) - \frac{r}{K}2N(t)N'(t) \\ &= r^2N(t)\left(1-\frac{N}{K}\right) - 2\frac{r^2}{K}N^2(t)\left(1-\frac{N}{K}\right) \\ &= r^2N(t)\left(1-\frac{N}{K}\right)\left(1-2\frac{N}{K}\right)\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall\, t \geqslant 0, \qquad N''(t) = r^2N(t) \times \left(1 - \frac{1}{K}N\right)\left(1-\frac{2}{K}N\right)}$$

(b) Puisque $K > \frac{K}{2} > N_0$, nous savons que N est continue et strictement croissante de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $[N_0, K[$,
Donc N réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $[N_0, K[$.
Puis, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$N(t) > 0\,;\ 1 - \frac{N}{K} > 0\,;\ 1 - \frac{2N}{K} = 0 \Leftrightarrow N = \frac{K}{2}$$

Donc on a l'équivalence : $\quad N''(t) = 0 \Longleftrightarrow N(t_0) = \dfrac{K}{2}$.
Or N réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $[N_0, K]$ et par hypothèse $N_0 < \frac{K}{2}$, donc $\frac{K}{2} \in [N_0, K[$.

$$\boxed{\text{Donc il existe un unique réel } t_0 \text{ dans l'intervalle }]0; +\infty[\text{ tel que } N''(t_0) = 0 \text{ (et } N(t_0) = \tfrac{K}{2}).}$$

(c) On a alors,

$$N''(t) > 0 \Longleftrightarrow 1 - \frac{2N(t)}{K} > 0 \Longleftrightarrow N(t) < \frac{K}{2} = N(t_0) \Longleftrightarrow t < t_0$$

car N est strictement croissante.
Et de même

$$N''(t) < 0 \Longleftrightarrow t > t_0$$

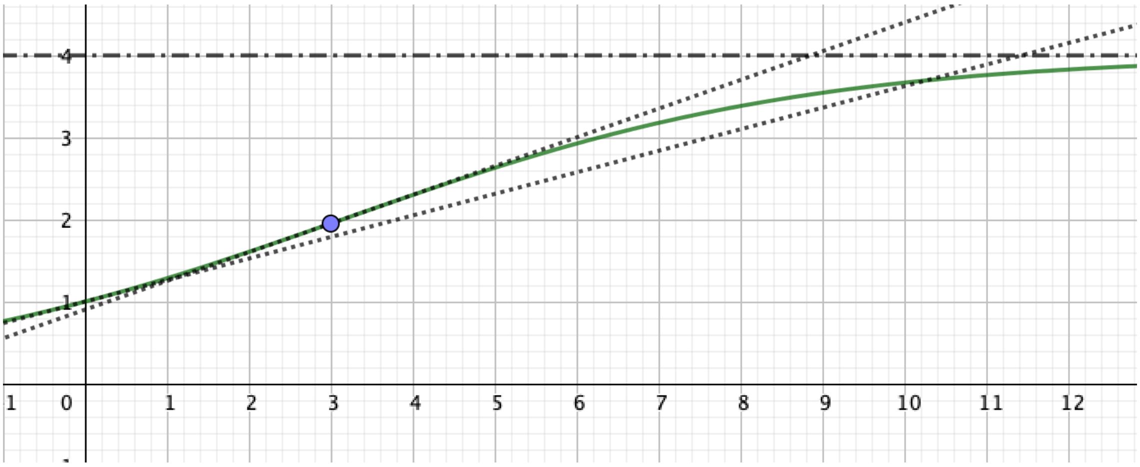
$$\boxed{\text{Donc } N \text{ est convexe sur } [0, t_0[\text{ et concave sur }]t_0, +\infty[.}$$

(d) La croissance ralentit signifie que la dérivée, toujours positive (croissance) décroit, donc que sa propre dérivée (soit la dérivée seconde de la fonction initiale) est négative.

$$\boxed{\text{Donc la croissance ralentit signifie que } N'' = 0. \text{ C'est bien en } t_0 \text{ que cela se produit.}}$$

On parle mathématiquement de point d'inflexion, on dit que la courbe « tourne sa concavité » : elle passe de convexe à concave ou inversement.

(e) On a la représentation graphique suivante :



On notera la forme convexe avant le point et concave ensuite.

5. On suppose de plus que $0 < N_0 < \frac{K}{2}$.
VERHULST appelait *deuxième âge [de la croissance de la population]* la période se situant entre les instants 0 et t_0, et *troisième âge* la période se situant entre les instants t_0 et $2t_0$.

(a) On sait que $N(t) = \dfrac{N_0}{e^{-rt}(1 - \frac{N_0}{K}) + \frac{N_0}{K}}$.
Or en t_0, $N(t_0) = \dfrac{K}{2}$, cela donne l'équation :

$$\frac{N_0}{e^{-rt_0}(1 - \frac{N_0}{K}) + \frac{N_0}{K}} = \frac{K}{2} \Longleftrightarrow \frac{1}{e^{-rt_0}(\frac{K}{N_0} - 1) + 1} = \frac{1}{2} \Longleftrightarrow e^{-rt_0}(\frac{K}{N_0} - 1) = 1$$

$$\boxed{\exp(rt_0) = \frac{K}{N_0} - 1}$$

(b) On a vu

$$N : t \mapsto \frac{N_0 e^{rt}}{1 + \frac{N_0}{K}(e^{rt} - 1)} = \frac{K}{r} \frac{r\frac{N_0}{K}e^{rt}}{1 + \frac{N_0}{K}(e^{rt} - 1)} = \frac{K}{r}\frac{u'(t)}{u(t)}$$

avec $u : t \mapsto 1 + \frac{N_0}{K}(e^{rt} - 1)$.
Donc une primitive de N est $\hat{N} : t \mapsto \frac{K}{r} \ln\left|1 + \frac{N_0}{K}(e^{rt} - 1)\right|$.
On a vu que $N > 0$ sur $\mathbb{R}$, donc comme son numérateur l'est également, son dénominateur est positif.

$$\boxed{\text{Une primitive de } N \text{ sur } [0, +\infty[\text{ est } \hat{N} : t \mapsto \frac{K}{r} \ln\left(1 + \frac{N_0}{K}(e^{rt} - 1)\right).}$$

(c) On a alors

$$\begin{aligned}\int_0^{2t_0} N(t)\mathrm{d}t &= \hat{N}(2t_0) - \hat{N}(0) = \frac{K}{r}\ln\left(1 + \frac{N_0}{K}(e^{2rt_0} - 1)\right) - 0 = \frac{K}{r}\ln\left(1 + \frac{N_0}{K}\left((e^{rt_0})^2 - 1\right)\right) \\ &= \frac{K}{r}\ln\left(1 + \frac{N_0}{K}\left(\left(\frac{K}{N_0} - 1\right)^2 - 1\right)\right) = \frac{K}{r}\ln\left(1 + \frac{N_0}{K}\left(\frac{K^2}{N_0^2} - 2\frac{K}{N_0}\right)\right) \\ &= \frac{K}{r}\ln\left(\frac{K}{N_0} - 1\right) = \frac{K}{r}\ln(e^{rt_0}) = Kt_0\end{aligned}$$

Pour avoir la valeur moyenne, on divise par $2t_0$, et donc

$$\boxed{\text{la valeur moyenne de } N \text{ entre } t = 0 \text{ et } t = 2t_0 \text{ vaut } \frac{K}{2}.}$$

(d) On a vu que $N_1 = N(t_0) = \dfrac{K}{2}$.
Donc

$$\frac{\frac{1}{N_0} - \frac{1}{K}}{\frac{1}{N_1} - \frac{1}{K}} = \frac{\frac{1}{N_0} - \frac{1}{K}}{\frac{2}{K} - \frac{1}{K}} = \frac{K}{N_0} - 1 = e^{rt_0}$$

Donc en composant par ln et en divisant par t_0 :

$$\boxed{r = \frac{1}{t_0}\ln\frac{\frac{1}{N_0} - \frac{1}{K}}{\frac{1}{N_1} - \frac{1}{K}}}$$