Devoir à la maison n°3
CORRECTION

Exercice

On cherche à résoudre l'équation différentielle

$$y'' + 4y' + 4y = \Phi(x)e^{-2x} \qquad (E_\Phi)$$

1. L'équation différentielle homogène est

$$y'' + 4y' + 4y = 0 \qquad (H)$$

C'est une équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients constants.
Son équation caractéristique associée est

$$r^2 + 4r + 4 = (r+2)^2$$

Elle possède une racine double : $r = -2$ ($\Delta = 0$).

$$\boxed{\text{Donc l'ensemble des solutions de } (H) \text{ est } \{x \mapsto (Ax+B)e^{-2x}; A, B \in \mathbb{R}\}}$$

2. Pour $\Phi : x \mapsto x^2 - 2x + 1$, l'équation différentielle devient :

$$y'' + 4y' + 4y = (x^2 - 2x + 1)e^{-2x} \qquad (E_\Phi)$$

Il s'agit toujours d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants, dont le second membre est de la forme d'un polynôme de degré 2 multiplié par une exponentielle qui est une racine double de l'équation homogène.
On cherche donc une solution particulière de la même forme mais où le polynôme est de degré 4 (on peut même ne pas considérer la partie de degré 1 qui s'annulera dans (E_ϕ).
Soit $y(x) = (ax^4 + bx^3 + cx^2)e^{-2x}$. y est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \qquad y'(x) = [-2ax^4 + (4a-2b)x^3 + (3b-2c)x^2 + 2cx]e^{-2x}$$

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \qquad y''(x) = [4ax^4 + (-16a+4b)x^3 + (12a-12b+4c)x^2 + (6b-8c)x + 2c]e^{-2x}$$

y est solution de E_ϕ

$$\iff \forall\, x \in \mathbb{R} \qquad \big([4ax^4 + (-16a+4b)x^3 + (12a-12b+4c)x^2 + (6b-8c)x + 2c] + 4[-2ax^4 + (4a-2b)x^3$$

$$+ (3b-2c)x^2 + 2cx] + 4[ax^4 + bx^3 + cx^2]\big)e^{-2x} = (x^2 - 2x + 1)e^{-2x}$$

$$\iff \forall\, x \in \mathbb{R} \qquad (4a - 8a + 4a)x^4 + (-16a + 4b + 16a - 8b + 4b)x^3 + (12a - 12b + 4c + 12b - 8c + 4c)x^2 +$$

$$(6b - 8c + 8c)x + 2c = x^2 - 2x + 1$$

$$\iff \forall\, x \in \mathbb{R} \qquad 12ax^2 + 6bx + 2c = x^2 - 2x + 1$$

L'identification polynomiale est possible car le résultats est vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$y \text{ est solution de } E_\phi \iff \begin{cases} a = \frac{1}{12} \\ b = \frac{-1}{3} \\ c = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Par conséquent, l'ensemble des solutions de (E_Φ) avec $\Phi : x \mapsto x^2 - 2x + 1$ est

$$\boxed{\left\{x \mapsto (\frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + Ax + x)e^{-2x}; A, B \in \mathbb{R}\right\}}$$

3. On suppose ici que $\Phi(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.
On ne peut donc pas appliquer la même méthode : ce n'est pas un polynôme

(a) Soit y une solution de (E) sur $\mathbb{R}$.
y est solution de (E) donc nécessairement deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
$x \mapsto e^{2x}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, donc

$$\boxed{\text{par produit, } z \text{ est deux fois dérivable sur } \mathbb{R}}$$

Puis pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$z'(x) = [y'(x) + 2y(x)]e^{2x} \qquad z''(x) = [y''(x) + 4y'(x) + 4y(x)]e^{2x}$$

Mais comme y est solution de (E_Φ), on a donc

$$\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R} \quad z''(x) = \frac{1}{1+x^2}}$$

(b) Pour trouver z, il s'agit donc d'intégrer deux fois $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$. Or

$$\int^x \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t = \text{Arctan } t$$

On fait une intégration par parties avec $u(t) = \arctan t$ et $v(t) = t$, de classe $\mathcal{C}^1$:

$$\int^x \arctan t\mathrm{d}t = \int^x u(t)v'(t)\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]^x - \int^x u'(t)v(t)\mathrm{d}t = x\arctan(x) - \int^x \frac{t}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

Donc

$$\boxed{z : x \mapsto x\arctan x + \frac{1}{2}\ln(|1+x^2|) + C = x\arctan x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C}$$

(c) Les solutions sont exactement obtenus par l'addition d'une solution particulière de (E_Φ) (on peut prendre $y = ze^{-2x}$ avec $C = 0$) et les solutions de (H).
Donc l'ensemble des solutions de (E_Φ) est

$$\boxed{\left\{x \mapsto \left(x\arctan x + \tfrac{1}{2}\ln(1+x^2) + Ax + B\right)e^{-2x} ; A, B \in \mathbb{R}\right\}}$$

Problème : Étude des intégrales de Wallis

On considère la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n \mathrm{d}x$$

1. Etude classique de la suite (I_n)

(a)

$$\boxed{I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^0(t)\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}}$$

$$\boxed{I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^1(t)\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\mathrm{d}t = [-\cos t]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{n+1}\sin(x)\mathrm{d}x$.
Considérons $u : x \mapsto \sin^{n+1}(x)$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. $\forall\, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $u'(x) = (n+1)\cos x \sin^n(x)$.

Considérons $v : x \mapsto -\cos(x)$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. $\forall\, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $v'(x) = \sin(x)$.

On peut faire une intégration par partie :

$$\begin{aligned}
I_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} u(x)v'(x)\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} u'(x)v(x)\mathrm{d}x \\
&= \sin^{n+1}(0)\cos(0) - \sin^{n+1}\tfrac{\pi}{2}\cos\tfrac{\pi}{2} + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)\sin^n(x)\mathrm{d}x = \\
&= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2(x))\sin^n(x)\mathrm{d}x = (n+1)I_n - (n+1)I_{n+2}
\end{aligned}$$

On a donc $(n+1+1)I_{n+2} = (n+1)I_n$

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}, I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}I_n}$$

(c) Soit $p \in \mathbb{N}$.

En faisant $n \leftarrow 2k-2$ ($k \geqslant 1$), dans la relation précédente on a $I_{2k} = \dfrac{2k-1}{2k} I_{2k-2}$, donc $\dfrac{I_{2k}}{I_{2(k-1)}} = \dfrac{2k-1}{2k}$.

Puis en faisant le produit pour k de 1 à p (téléscopage) :

$$\frac{I_{2p}}{I_0} = \prod_{k=1}^{p} \frac{I_{2k}}{I_{2(k-1)}} = \prod_{k=1}^{p} \frac{2k-1}{2k} = \frac{\prod_{k=1}^{p}(2k-1)}{\prod_{k=1}^{p} 2k} = \frac{\prod_{h=1}^{2p} h}{\left(\prod_{k=1}^{p} 2k\right)^2} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}$$

(On aura noté : les termes impairs sur les termes pairs) En faisant $n \leftarrow 2k-1$ ($k \geqslant 1$), dans la relation précédente on a $I_{2k+1} = \dfrac{2k}{2k+1} I_{2k-1}$, donc $\dfrac{I_{2k+1}}{I_{2(k-1)+1}} = \dfrac{2k}{2k+1}$.

Puis en faisant le produit pour k de 1 à p (téléscopage) :

$$\frac{I_{2p+1}}{I_1} = \prod_{k=1}^{p} \frac{I_{2k+1}}{I_{2(k-1)+1}} = \prod_{k=1}^{p} \frac{2k}{2k+1} = \frac{\prod_{k=1}^{p} 2k}{\prod_{k=1}^{p}(2k+1)} = \frac{\left(\prod_{k=1}^{p} 2k\right)^2}{\prod_{h=1}^{2p+1} h} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$$

(On aura noté : les termes pairs sur les termes impairs) Connaissant les valeurs de I_0 et I_1 :

$$\boxed{\forall\, p \in \mathbb{N}, \quad I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\frac{\pi}{2} \qquad I_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}}$$

(d) Pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin x \in [0,1]$, donc $\sin^n(x) \geqslant 0$.

Ainsi, en multipliant l'inégalité vraie $\sin x \leqslant 1$ par $\sin^n(x) \geqslant 0$, on trouve : $\sin^{n+1}(x) \leqslant \sin^n(x)$.

Puis par croissance de l'intégration ($0 < \frac{\pi}{2}$) : $I_{n+1} \leqslant I_n$.

Donc la suite (I_n) est décroissante :

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n : I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n.}$$

(e) Nous avons vu à la question précédente que $I_n > 0$, on peut donc diviser l'inégalité précédente par I_n, cela ne change pas l'ordre :

$$\frac{n+1}{n+2} = \frac{I_{n+2}}{I_n} \leqslant \frac{I_{n+1}}{I_n} \leqslant 1$$

d'après la réponse à la question 1.(b).

Enfin, comme $(\frac{n+1}{n+2})$ converge vers 1, on peut appliquer le théorème d'encadrement :

$$\boxed{\frac{I_{n+1}}{I_n} \text{ admet une limite quand } n \text{ tend vers } +\infty. \text{ Cette limite vaut } 1.}$$

En particulier pour $n \leftarrow 2p$:

$$\frac{I_{2p+1}}{I_{2p}} = \frac{2^{4p}(p!)^4}{(2p+1)((2p)!)^2} \times \frac{2}{\pi} \to 1$$

En multipliant par $\frac{2p+1}{2p}\pi$ qui tend vers π, on trouve :

$$\boxed{\lim_{p \to +\infty} \frac{2^{4p}(p!)^4}{(2p)!^2 p} = \pi}$$

2. Une autre méthode (pour n pair)

(a) Considérons $\varphi_1 : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $x \mapsto \frac{\pi}{2} - x$ est une fonction affine bijective.

Posons alors $t = \varphi_1(x)$, on a $\mathrm{d}t = -\mathrm{d}x$ et

$$I_n = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \left(\sin(\frac{\pi}{2} - t)\right)^n (-\mathrm{d}t) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\mathrm{d}t$$

Considérons $\varphi_2 : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, $u \mapsto \pi - u$ est une fonction affine bijective.
Posons alors $u = \varphi_2(t)$, on a $\mathrm{d}u = -\mathrm{d}t$ et

$$I_n = \int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(\pi - u)(-\mathrm{d}u) = (-1)^n \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^n(u)\mathrm{d}u$$

$$\boxed{\forall\ n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n \mathrm{d}t = (-1)^n \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\cos u)^n \mathrm{d}u}$$

(b) Soit $p \in \mathbb{N}$.

$$\left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2}\right)^{2p} = \sum_{k=0}^{2p} \binom{2p}{k} e^{kit} e^{(2p-k)(-it)} = \sum_{k=0}^{2p} \binom{2p}{k} e^{2(k-p)it}$$

Donc, par linéarité de l'intégrale :

$$\int_0^{\pi} \left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2}\right)^{2p} \mathrm{d}t = \frac{1}{2^{2p}} \sum_{k=0}^{2} \binom{2p}{k} \int_0^{\pi} e^{2(k-p)it} \mathrm{d}t$$

Pour $k \neq p$, une primitive de $t \mapsto e^{2(k-p)it}$ est $\dfrac{1}{2i(k-p)} e^{2(k-p)it}$, donc

$$\int_0^{\pi} e^{2(k-p)it} \mathrm{d}t = \frac{1}{2i(k-p)} \left[e^{2i\pi(k-p)} - e^0\right] = \frac{1}{2i(k-p)}(1-1) = 0$$

Pour $k = p$, une primitive de $t \mapsto e^{2(k-p)it} = 1$ est $t \mapsto t$.

$$t \mapsto e^{2(k-p)it} = \pi$$

Ainsi

$$\boxed{\int_0^{\pi} \left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2}\right)^{2p} \mathrm{d}t = \frac{1}{2^{2p}} \binom{2p}{p} \pi}$$

(c) Si $n = 2p$ est pair, on a alors :

$$2I_n = 2I_{2p} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t\mathrm{d}t + (-1)^{2p} \int \frac{\pi}{2}^{\pi} \cos^n t\mathrm{d}t = \int_0^{\pi} \cos^{2p}(t)\mathrm{d}t$$

d'après la relation de Chasles. Or $\frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \cos t$, donc d'après la question précédente :

$$\boxed{I_n = \frac{1}{2} \frac{1}{2^{2p}} \binom{2p}{p} \pi = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \frac{\pi}{2}}$$

3. L'application $\psi : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to [0, 1]$, $\theta \mapsto \sin\theta$ est bijective, de classe $\mathcal{C}^1$.
On fait le changement de variable $x = \psi_n(\theta)$, donc $\mathrm{d}x = \cos\theta\mathrm{d}\theta$ ou encore $\mathrm{d}\theta = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.

$$\int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n\theta(1 - \sin^2\theta)\mathrm{d}\theta = I_n - I_{n+2} = \left(1 - \frac{n+1}{n+2}\right) I_n = \frac{1}{n+2} I_n$$

$$\boxed{\int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \dfrac{\pi}{4p+4} & \text{si } n = 2p \\ \dfrac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!(2p+3)} & \text{si } n = 2p+1 \end{cases}}$$

Problème - Intégrales abéliennes

1. On appelle intégrale abélienne de première espèce, les intégrales du type :

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) \mathrm{d}x$$

où R est une fraction rationnelle (et $n \in \mathbb{N}$).

On considère $\varphi : x \mapsto \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$. On suppose que $ad - bc \neq 0$.

On note $I = \{x \in \mathbb{R} \mid cx + d \neq 0 \text{ et } \frac{ax+b}{cx+d} > 0\}$

(a) $\frac{ax+b}{cx+d} > 0$ si et seulement si $ax + b$ et $cx + d$ ont strictement le même signe.
Plusieurs options (on supposera que $ad - bc \neq 0$ donc on a pas $(ax + b) = \lambda(cx + d)$) :
— Ou bien $-\frac{b}{a} < -\frac{d}{c}$
— si $a \times c > 0$. Alors $\frac{ax+b}{cx+d} > 0 \Longleftrightarrow x \in]-\infty, -\frac{b}{a}[\cup]-\frac{d}{c}, +\infty[$.
— si $a \times c < 0$. Alors $\frac{ax+b}{cx+d} > 0 \Longleftrightarrow x \in]-\frac{b}{a}, -\frac{d}{c}[$.
— Ou bien $-\frac{b}{a} > -\frac{d}{c}$
— si $a \times c > 0$. Alors $\frac{ax+b}{cx+d} > 0 \Longleftrightarrow x \in]-\infty, -\frac{d}{c}[\cup]-\frac{b}{a}, +\infty[$.
— si $a \times c < 0$. Alors $\frac{ax+b}{cx+d} > 0 \Longleftrightarrow x \in]-\frac{d}{c}, -\frac{b}{a}[$.

$\boxed{I \text{ est intervalle, ou la réunion de deux intervalles.}}$

(b) Soit $I' = [\alpha, \beta]$, un intervalle inclus dans I. La fonction φ est continue sur I'.
Par ailleurs, elle est dérivable de dérivée

$$\varphi' : x \mapsto \underbrace{\frac{1}{n}\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1-n}{n}}}_{>0} \times \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$$

donc φ est strictement monotone (selon le signe de $ad - bc$) sur I'.

$\boxed{\begin{array}{c}\text{Et donc } \varphi \text{ établit une bijection de } I' \text{ sur l'intervalle } J' = [\varphi(\alpha), \varphi(\beta)] \text{ (si } ad-bc>0) \\ \text{ou sur l'intervalle } J' = [\varphi(\beta), \varphi(\alpha)] \text{ (si } ad-bc<0).\end{array}}$

(c) On note $\gamma = \varphi(\alpha)$ et $\delta = \varphi(\beta)$.
La fonction φ étant :
— continue,
— strictement monotone de l'intervalle $I' = [\alpha, \beta]$ dans l'intervalle $J = [\gamma, \delta]$ ou $[\delta, \gamma]$,
— de classe $\mathcal{C}^1$ sur I'
elle établit une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ ($\mathcal{C}^1$-difféomorphisme), on peut alors faire le changement de variable :

$$t = \varphi(x) \Longleftrightarrow t^n = \frac{ax+b}{cx+d} \Longleftrightarrow \frac{dt^n - b}{-ct^n + a} = x$$

Notons $\psi : J\prime \to I'$, $t \mapsto \dfrac{dt^n - b}{a - ct^n}$, il s'agit de l'application réciproque de $\varphi_{I'}$.
Elle est également de classe $\mathcal{C}^1$ et $\forall\ t \in J$:

$$\psi'(t) = \frac{ndt^{n-1}(a - ct^n) - (-nct^{n-1})(dt^n - b)}{(a - ct^n)^2} = \frac{nt^{n-1}(ad - bc)}{(c - at^n)^2}$$

$\boxed{\text{En posant } t = \varphi(x), \text{ on a } \displaystyle\int_\alpha^\beta R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) \mathrm{d}x = \int_\gamma^\delta R\left(\frac{dt^n - b}{a - ct^n}, t\right) \frac{n(ad-bc)t^{n-1}}{at^n - c)^2} \mathrm{d}t}$

(d) Il s'agit du calcul de l'intégrale de $\frac{1}{x+y}$ qui est bien une fraction rationnelle avec $y(x) = \sqrt{x-1}$.
On pose donc $t = \sqrt{x-1} \Leftrightarrow t^2 + 1 = x$.
En effet, l'application $\varphi : t \mapsto \sqrt{t-1}$ est bijective sur $[1, 2]$ à valeurs dans $[0, 1]$ (par croissance de φ), elle est dérivable sur $[1, 2]$ de dérivée $\varphi' : t \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{t-1}}$.

Cela donne le calcul

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{1}{x+\sqrt{x-1}}\mathrm{d}x &= \int_0^1 \frac{1}{t^2+1+t}(2t\mathrm{d}t) = \int_0^1 \frac{2t+1}{t^2+t+1}\mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{1}{t^2+t+1}\mathrm{d}t \\ &= \left[\ln|t^2+t+1|\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{(t+\frac{1}{2})^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\mathrm{d}t = \ln 3 - \left[\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right]_0^1 \\ &= \ln 3 - \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\arctan\sqrt{3} - \arctan\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \ln 3 - \frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right) = \ln 3 - \frac{\sqrt{3}}{9}\pi\end{aligned}$$

$$\boxed{\int_1^2 \frac{1}{x+\sqrt{x-1}}\mathrm{d}x = \ln 3 - \frac{\sqrt{3}}{9}\pi}$$

(e) On cherche une primitive de $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$, définie sur $\mathbb{R}_+$.

On considère donc $F : x \mapsto \displaystyle\int_.^x \frac{1}{\sqrt{t}+\sqrt[3]{t}}\mathrm{d}t$, définie sur $\mathbb{R}_+$.

On pose $u = \sqrt[6]{t} \Longleftrightarrow u^6 = t$, on a alors $\dfrac{1}{\sqrt{t}+\sqrt[3]{t}} = \dfrac{1}{u^3+u^2}$, fraction rationnelle en u.

On peut faire ce changement car $t \mapsto \sqrt[6]{t}$ est bijective de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$ (non dérivable en 0).

On a alors

$$F(x) = \int_.^{\sqrt[6]{x}} \frac{6u^5}{u^3+u^2}\mathrm{d}u = 6\int_.^{\sqrt[6]{x}} \frac{u^3}{u+1}\mathrm{d}u$$

Faisons la division euclidienne : $u^3 = (u+1)(u^2-u+1) - 1$

$$F(x) = 6\int_.^{\sqrt[6]{x}} (u^2-u+1)\mathrm{d}u - 6\int_.^{\sqrt[6]{x}} \frac{1}{u+1}\mathrm{d}u = 6\left[\frac{1}{3}\sqrt[2]{x} - \frac{1}{2}\sqrt[3]{x} + \sqrt[6]{x} - \ln(\underbrace{\sqrt[6]{x}+1}_{>0})\right] + C$$

$$\boxed{\exists\, C \in \mathbb{R} \text{ tq} \quad F(x) = 2\sqrt[2]{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln(\sqrt[6]{x}+1) + C}$$

2. On appelle intégrale abélienne de première espèce, les intégrales du type :

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)\mathrm{d}x$$

où R est une fraction rationnelle.

(a) On exploite la forme canonique :

$$(ax^2+bx+c) = a(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}) = a\big((x+\frac{b}{2a})^2+\frac{4ca-b^2}{4a^2}\big) = a(y^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2})$$

Selon le signe de a et de $\frac{ca-b^2}{a^2}$, on a les cas suivant

$\sqrt{ax^2+bx+c}$	$a<0$	$a>0$
$\frac{4ca-b^2}{4a^2}<0$	$\sqrt{a}\sqrt{A^2-y^2}$ avec $A=\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$	$\sqrt{a}\sqrt{y^2-A^2}$ avec $A=\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
$\frac{4ca-b^2}{4a^2}\geqslant 0$	Impossible (tout est négatif)	$\sqrt{a}\sqrt{y^2+A^2}$ avec $A=\dfrac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$

(Le cas $a=0$ n'est pas intéressant).

En admettant la possibilité théorique de faire les changements de variable suivant, on posera :

$$y = A\mathrm{sh}u \text{ ou } y = A\tan u \quad , \quad y = A\mathrm{ch}u \text{ ou } y = \frac{A}{\cos u} \quad , \quad y = A\sin u$$

respectivement.

(b) On remarque que : $-t^2-4t = -\big((t+2)^2-4\big) = (4-(t+2)^2)$. Ici $a=-1<0$ et $A=\sqrt{4}=2$.
On pose donc $(y=)t+2 = 2\sin u \Longleftrightarrow t = 2\sin u - 2$,
on a donc $4-(t+2)^2 = 4(1-\sin^2 u) = 4\cos^2 u$ et $\mathrm{d}t = 2\cos u\mathrm{d}u$.
Enfin : $u \mapsto 2\sin u - 2$ est bijective de $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ sur $[-4,0]$

$$\int_{-4}^0 \sqrt{-t^2-4t}\mathrm{d}t = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2|\cos u|2\cos u\mathrm{d}u = 4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u\mathrm{d}u$$

$$\int_{-4}^{0}\sqrt{-t^2-4t}\mathrm{d}t = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos(2u)+1)\mathrm{d}u = [\sin(2u)+2u]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\boxed{\int_{-4}^{0}\sqrt{-t^2-4t}\mathrm{d}t = 2\pi}$$

(c) On remarque que $t^2+t-6=(t+\frac{1}{2})^2-\frac{25}{4}$. Ici $a=1>0$ et $A=\frac{5}{2}$.
Méthode 1. On pose donc $(y=)t+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}\mathrm{ch}u \iff t=\frac{1}{2}(5\mathrm{ch}u-1)$

on a donc $t\sqrt{t^2+t-6}=\frac{1}{2}(5\mathrm{ch}u-1)\frac{5}{2}\sqrt{\mathrm{ch}^2u-1}=\frac{5}{4}(5\mathrm{ch}u-1)|\mathrm{sh}u|$ et $\mathrm{d}t=\dfrac{5}{2}\mathrm{sh}u\mathrm{d}u$

Enfin : $u\mapsto\frac{1}{2}(5\mathrm{ch}u-1)$ est bijective de $\mathbb{R}_+$ sur $[2,+\infty]$.

Il existe donc $0<a<b$ tel que $\frac{1}{2}(5\mathrm{ch}u-1)$ est bijective de $[a,b]$ sur $[3,4]$ où $\mathrm{sh}(u)>0$.

En fait : $a=\mathrm{argch}\frac{7}{5}$ et $b=\mathrm{argch}\frac{9}{5}$ On a alors

$$\int_3^4\frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t^2+t-6}}=\int_a^b\frac{2\mathrm{d}u}{5\mathrm{ch}u-1}=\int_a^b\frac{4\mathrm{d}u}{5e^u+5e^{-u}-2}=\int_a^b\frac{4e^u\mathrm{d}u}{5e^{2u}-2e^u+5}$$

On fait ensuite le changement de variable $v=e^u$, on peut le faire car exp est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$, et de classe $\mathcal{C}^1$.
On a alors $\mathrm{d}v=e^u\mathrm{d}u$.

$$\int_3^4\frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t^2+t-6}}=\int_{e^a}^{e^b}\frac{4\mathrm{d}v}{5v^2-2v+5}=\frac{4}{5}\int_{e^a}^{e^b}\frac{\mathrm{d}v}{(v-\frac{1}{5})^2+\frac{24}{25}}$$

$$=\frac{4}{5}\frac{5}{\sqrt{24}}\left[\arctan(\frac{5}{\sqrt{24}}(v-\frac{1}{5}))\right]_{e^a}^{e^b}$$

Méthode 2. On pose donc $(y=)t+\frac{1}{2}=\frac{5}{2\cos u}\iff t=\frac{5-\cos u}{2\cos u}$

on a donc $\sqrt{t^2+t-6}=\frac{5}{2|\cos u|}\sqrt{1-\cos^2 u}=\dfrac{5}{2}|\tan u|$ et $\mathrm{d}t=\dfrac{5\sin u}{2\cos^2 u}\mathrm{d}u$ Enfin : $u\mapsto\frac{1}{2}(\frac{5}{\cos u}-1)$ est bijective de $]0,\frac{\pi}{2}[$ sur $[2,+\infty]$.

Il existe donc $0<a<b<\frac{\pi}{2}$ tel que $\frac{1}{2}(\frac{5}{\cos u}-1)$ est bijective de $[a,b]$ sur $[3,4]$.

En fait : $a=\arccos\frac{5}{7}$ et $b=\arccos\frac{5}{9}$ et $\cos u,\sin u>0$ sur $[a,b]$

$$\int_3^4\frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t^2+t-6}}=\int_a^b\frac{5\sin u}{2\cos^2u(\frac{5-\cos u}{2\cos u})\frac{5}{2}\tan u}\mathrm{d}u=\int_a^b\frac{5\sin u}{(5-\cos u)\frac{5}{2}\sin u}\mathrm{d}u=\int_a^b\frac{2}{5-\cos u}\mathrm{d}u$$

On fait le classiquement changement de variable $t=\tan\frac{u}{2}$,

on rappelle que $\cos u=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ et $\mathrm{d}u=\dfrac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t$.

$$\int_3^4\frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t^2+t-6}}=\int_{\tan\frac{a}{2}}^{\tan\frac{b}{2}}\frac{4}{5(1+t^2)-(1-t^2)}\mathrm{d}t=\int_{\tan\frac{a}{2}}^{\tan\frac{b}{2}}\frac{1}{\frac{3}{2}t^2+1}\mathrm{d}t=\left[\frac{\sqrt{6}}{3}\arctan\frac{\sqrt{6}}{2}t\right]_{\tan\frac{a}{2}}^{\tan\frac{b}{2}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\int_3^4\frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t^2+t-6}}&=\frac{\sqrt{6}}{3}\left(\arctan\left(\tfrac{5}{\sqrt{24}}(e^{\mathrm{argch}\frac{7}{5}}-\tfrac{1}{5})\right)-\arctan\left(\tfrac{5}{\sqrt{24}}(e^{\mathrm{argch}\frac{9}{5}}-\tfrac{1}{5})\right)\right)\\&=\frac{\sqrt{6}}{3}\left(\arctan\left(\tfrac{\sqrt{6}}{2}\tan\tfrac{\arccos\frac{5}{7}}{2}\right)-\arctan\left(\tfrac{\sqrt{6}}{2}\tan\tfrac{\arccos\frac{5}{9}}{2}\right)\right)\end{aligned}}$$

(d) Les racines de $12x-4x^2-5$ sont $x_1=\dfrac{-12+\sqrt{64}}{-8}=\frac{-1}{2}$ et $x_2=\dfrac{-12-\sqrt{64}}{-8}=\frac{5}{2}$.

Donc la fonction intégrant n'est définie que sur $]-\frac{1}{2},\frac{5}{2}[$, où elle admet une primitive.
On remarque que $12x-4x^2-5=4(3x-x^2-\frac{5}{4})=4(1-(x-\frac{3}{2})^2)$. Ici $a=-4<0$ et $A=1$.
On pose donc $(y=)x-\frac{3}{2}=\sin u\iff x=\sin u+\frac{3}{2}$,

on a donc $12x-4x^2-5=4(1-\sin^2u)=4\cos^2u$.

Enfin $u\mapsto\sin u+\frac{3}{2}$ est bijective de $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ sur $]-\frac{1}{2},\frac{5}{2}[$.

elle est dérivable, de dérivée : $u\mapsto\cos u$. Donc, pour $s\in]-\frac{1}{2},\frac{5}{2}[$:

$$\int_.^s\frac{8x-3}{\sqrt{12-4x^2-5}}\mathrm{d}x=\int_.^{\arcsin(s-\frac{3}{2})}\frac{8\sin u+9}{2|\cos u|}\cos u\mathrm{d}u=\int_.^{\arcsin(s-\frac{3}{2})}(4\sin u+\frac{9}{2})\mathrm{d}u$$

car $\cos u>0$, puisque $u\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$. Enfin, comme $\cos\arcsin(y)=\sqrt{1-y^2}$:

$$\boxed{\int_.^s\frac{8x-3}{\sqrt{12-4x^2-5}}\mathrm{d}x=-4\cos(\arcsin(s-\frac{3}{2}))+\frac{9}{2}\arcsin(s-\frac{3}{2})=\frac{9}{2}\arcsin(s-\frac{3}{2})-2\sqrt{12s-4s^2-5}}$$