

Devoir à la maison n°3

La notation tiendra particulièrement compte de la **qualité de la rédaction**, la précision des raisonnements et l'énoncé des formules utilisées.

Exercice

On cherche à résoudre l'équation différentielle

$$y'' + 4y' + 4y = \Phi(x)e^{-2x} \quad (E_\Phi)$$

1. Résoudre (H) l'équation différentielle homogène.
2. Résoudre (E_Φ) , si $\Phi : x \mapsto x^2 - 2x + 1$.
3. On suppose ici que $\Phi(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
 - (a) Soit y une solution de (E) sur $\mathbb{R}$.
On pose $z : x \mapsto y(x)e^{2x}$. Montrer que z est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
Calculer z''
 - (b) Trouver une expression de z .
 - (c) En déduire l'ensemble des solutions de (E_Φ) .

Problème : Étude des intégrales de Wallis

On considère la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n dx$$

1. Etude classique de la suite (I_n)
 - (a) Calculer I_0 et I_1 .
 - (b) A l'aide d'une intégration par parties (écrire $\sin^{n+2} x = \sin x \sin^{n+1} x$), montrer que pour tout entier naturel n , on a : $I_{n+2} = (n+1)I_n - (n+1)I_{n+2}$.
En déduire I_{n+2} en fonction de I_n .
 - (c) En déduire, pour tout entier naturel p , la valeur de I_{2p} et de I_{2p+1} à l'aide de factorielles et de puissances de 2.
 - (d) Établir pour tout entier naturel n l'encadrement : $I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n$.
 - (e) En déduire que $\frac{I_{n+1}}{I_n}$ admet une limite quand n tend vers $+\infty$ puis que :

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{2^{4p}(p!)^4}{(2p)!^2 p} = \pi$$

2. Une autre méthode (pour n pair)

(a) A l'aide de changements de variables exprimer le lien entre I_n , $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n dt$ et $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\cos u)^n du$.

(b) Soit $p \in \mathbb{N}$. A l'aide de la formule du binôme, calculer

$$\int_0^{\pi} \left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \right)^{2p} dt$$

(c) Retrouver la valeur de I_n pour n pair.

3. Calculer en fonction de n , $\int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2} dx$.

Problème - Intégrales abéliennes

1. On appelle intégrale abélienne de première espèce, les intégrales du type :

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$$

où R est une fraction rationnelle (de deux variables) (et $n \in \mathbb{N}$).

On considère $\varphi : x \mapsto \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$. On suppose que $ad - bc \neq 0$.

On note $I = \{x \in \mathbb{R} \mid cx + d \neq 0 \text{ et } \frac{ax+b}{cx+d} > 0\}$

- (a) Montrer que I est intervalle, ou la réunion de deux intervalles.
- (b) Soit $I' = [\alpha, \beta]$, un intervalle inclus dans I . Montrer que φ établit une bijection de I' sur un intervalle J' à préciser (selon le signe de $ad - bc$)
- (c) Montrer qu'en faisant le changement de variable $t = \varphi(x)$, le calcul de l'intégrale est de la forme

$$\int_{\alpha}^{\beta} R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx = \int_{\gamma}^{\delta} R\left(\frac{dt^n - b}{a - ct^n}, t\right) \frac{n(ad - bc)t^{n-1}}{(at^n - c)^2} dt$$

c'est donc devenue l'intégration d'une « simple » fraction rationnelle.

- (d) Application 1 : Calculer $\int_1^2 \frac{1}{x + \sqrt{x-1}} dx$.
 - (e) Application 2 : Donner une primitive (sur quel intervalle ?) de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$.
2. On appelle intégrale abélienne de première espèce, les intégrales du type :

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx$$

où R est une fraction rationnelle (de deux variables).

- (a) Montrer qu'en posant $y = x + \frac{b}{2a}$, $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ se transforme en l'une des trois expressions suivantes :

$$\sqrt{|a|}\sqrt{y^2 + A^2} \quad , \quad \sqrt{|a|}\sqrt{y^2 - A^2} \quad \text{ou,} \quad \sqrt{|a|}\sqrt{A^2 - y^2}$$

où $A > 0$.

En admettant la possibilité théorique de faire les changements de variable suivant, on posera :

$$y = A \sinh u \text{ ou } y = A \tan u \quad , \quad y = A \cosh u \text{ ou } y = \frac{A}{\cos u} \quad , \quad y = A \sin u$$

respectivement.

- (b) Application 1 : Calculer $\int_{-4}^0 \sqrt{-t^2 - 4t} dt$
- (c) Application 2 : Calculer $\int_3^4 \frac{dt}{t\sqrt{t^2 + t - 6}}$
- (d) Application 3 : Donner une primitive de $f : x \mapsto \frac{8x - 3}{\sqrt{12x - 4x^2 - 5}}$.