Devoir surveillé n°3

Sujet donné le samedi 26 novembre 2022, 8h-12h. **L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.**

La clarté et la précision seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les réponses aux questions seront numérotées et séparées par un trait horizontal. De plus, les conclusions devront être **encadrées ou soulignées**.

Exercice 1

On note $\text{th} : x \mapsto \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)}$ la fonction tangente hyperbolique.

.1. Fonction argth.

(a) Quel est l'ensemble de définition, noté $\mathcal{D}$ de th ? Montrer que th est dérivable sur $\mathcal{D}$ et calculer, pour tout $x \in \mathcal{D}$, la valeur de $\text{th}'(x)$. On donnera deux expressions, l'une en fonction de th et l'autre en fonction de ch.

(b) En déduire que th établit une bijection de $\mathcal{D}$ sur un intervalle I à préciser.

(c) On note argth, la fonction réciproque de th. Montrer que argth est dérivable sur I et calculer $\text{argth}'(x)$, pour tout $x \in I$.

.2. Calculus.

(a) Donner une primitive de $g :]0, \pi[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{1}{\sin x}$, en faisant le changement de variable $t = \tan \dfrac{\theta}{2}$.

(b) Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < b$. Soit h une fonction définie et continue sur l'intervalle $]a, b[$. On note H une primitive de h sur $]a, b[$. On pose, lorsque cela a un sens, $f(x) = h(2x + c)$ où c est une constante réelle.
Déterminer le domaine de définition de f, justifier que f est continue et exprimer une primitive de f en fonction de H.

(c) Donner le plus grand intervalle contenant 0 sur lequel est définie $\psi : x \mapsto \text{argth}(\tan x)$. On note cet intervalle J.

(d) Montrer que $\forall x \in J$, $\psi'(x) = \dfrac{1}{\cos 2x}$.

(e) En déduire que pour tout $x \in J$, $\text{argth}(\tan x) = \dfrac{1}{2} \ln\left(\tan\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)\right)$.

Problème

Dans ce problème, on étudie les solutions **à valeurs réelles** de l'équation différentielle sous forme résolue

$$y" + a(t)y' + b(t)y = 0 \tag{E}$$

où $(a, b) \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})^2$, I étant un intervalle réel.

I Résolution de (E) connaissant une solution particulière

Dans cette partie, on suppose que Φ est une solution de (E), définie sur I, qui ne s'annule jamais (*i.e.* $\forall t \in I,\ \Phi(t) \neq 0$).

On fixe $t_0 \in I$ et on note A une primitive de a définie sur I.

I.1. Soit f une fonction deux fois dérivable définie sur I. On définit la fonction g pour tout $t \in I$ par $g(t) = \dfrac{f(t)}{\Phi(t)}$.

(a) Justifier que la fonction g est bien définie et qu'elle est deux fois dérivable.

(b) Montrer que $f = \Phi \times g$ est solution de (E) sur I si, et seulement si, g' est solution sur I de l'équation

$$z' + \left(\frac{2\Phi'(t)}{\Phi(t)} + a(t)\right) z = 0. \tag{E'}$$

I.2. Indiquer à quel type d'équations appartient (E') puis citer soigneusement les hypothèses du théorème permettant de la résoudre. Expliciter l'ensemble de ses solutions (que l'on exprimera en fonction de A et Φ) et donner sa nature.

I.3. En déduire que l'ensemble des solutions de (E) définies sur I est

$$\left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda\Phi(t)\displaystyle\int_{t_0}^{t} \frac{e^{-A(u)}}{\Phi^2(u)} \mathrm{d}u + \mu\Phi(t) \end{array} \quad \middle| \ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

I.4. **Exemple.** Considérons l'équation différentielle

$$9t^2y" + 3ty' + y = 0 \tag{Ex1}$$

(a) Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $t \mapsto t^\alpha$ soit solution de (Ex1) sur $]0, +\infty[$.

(b) Résoudre (Ex1) sur $\mathbb{R}_+^*$. On observera que l'équation (Ex1) n'a pas exactement la forme de l'équation (E).

(c) Soit h une fonction définie sur $]0, +\infty[$, deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Posons $\widehat{h} \left| \begin{array}{ccc}]-\infty, 0[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & h(-t) \end{array} \right.$

Justifier que $\widehat{h}$ est bien définie puis qu'elle est solution de (Ex1) sur $]-\infty, 0[$ si et seulement si h est solution de (Ex1) sur $]0, +\infty[$.

En déduire les solutions définies sur $]-\infty, 0[$ de (Ex1).

(d) Supposons qu'il existe une solution h de (Ex1) définie sur $\mathbb{R}$. Justifier qu'il existe $(a^-, b^-, a^+, b^+) \in \mathbb{R}^4$ tels que

$$\forall t \in \mathbb{R}^* ,\ h(t) = \begin{cases} a^-|t|^{\frac{1}{3}} \ln|t| + b^-|t|^{\frac{1}{3}} & \text{si } t < 0, \\ a^+t^{\frac{1}{3}} \ln t + b^+t^{\frac{1}{3}} & \text{si } t > 0. \end{cases}$$

En exploitant la dérivabilité de h en 0, obtenir des contraintes sur a^-, a^+, b^- et b^+.

En déduire l'ensemble des solutions de (Ex1) définies sur $\mathbb{R}$.

II Étude du cas particulier $a = 0$ et b paire

Dans cette partie, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à l'origine.
Nous envisageons l'équation (E) dans le cas où $a = 0$ et où b est **continue sur** I et **paire** :

$$\forall t \in I \ , \ y'' + b(t)y = 0 \ . \tag{E_1}$$

On admet (car cette équation est linéaire du second ordre à coefficients **non constants** et ne rentre donc pas dans le cadre du cours de MPSI) l'existence et l'unicité d'une solution définie sur I au problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \forall t \in I & , \quad y''(t) + b(t)y(t) = 0 \\ y(t_0) & = \quad \alpha_0 \\ y'(t_0) & = \quad \alpha_1 \end{cases}$$

où $t_0 \in I$ et $(\alpha_0, \alpha_1) \in \mathbb{R}^2$ sont fixés quelconques.

Une première application de l'énoncé ci-dessus pour $t_0 = 0$, $\alpha_0 = 1$ et $\alpha_1 = 0$ (resp. $t_0 = 0$, $\alpha_0 = 0$ et $\alpha_1 = 1$) permet de définir les fonctions notées f_0 (resp. f_1) comme les uniques solutions des problèmes de Cauchy

$$\begin{cases} \forall t \in I & , \quad y''(t) + b(t)y(t) = 0 \\ y(0) & = \quad 1 \\ y'(0) & = \quad 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} \forall t \in I & , \quad y''(t) + b(t)y(t) = 0 \\ y(0) & = \quad 0 \\ y'(0) & = \quad 1 \end{cases}$$

II.1. (a) Montrer que l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions définies sur I de (E_1) vérifie $\{\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 \mid (\lambda_0, \lambda_1) \in \mathbb{R}^2\} \subset \mathcal{S}$.

(b) Montrer que, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, l'unique solution notée f du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \forall t \in I & , \quad y''(t) + b(t)y(t) = 0 \\ y(0) & = \quad a \\ y'(0) & = \quad b \end{cases}$$

s'exprime comme une combinaison linéaire de f_0 et f_1. En déduire que $\mathcal{S} = \{\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 \mid (\lambda_0, \lambda_1) \in \mathbb{R}^2\}$.

II.2. (a) Montrer que, si y est une solution de (E_1) sur I, alors $\widehat{y} : t \mapsto y(-t)$ est aussi une solution de (E_1) sur I.

(b) Montrer que f_0 est paire et que f_1 est impaire.

(c) Déterminer, parmi les solutions de (E_1) sur I quelles sont celles qui sont paires et quelles sont celles qui sont impaires.

II.3. On suppose, dans cette question uniquement, que f_0 ne s'annule pas sur I.

(a) Expliciter l'ensemble des solutions définies sur I de (E_1) en fonction de f_0 en appliquant la question I.3 et en choisissant $t_0 = 0$.

(b) Préciser l'expression intégrale de f_1 en fonction de f_0. En admettant que f_0 est paire, reprouver l'imparité de f_1 à partir de l'expression obtenue.

II.4. Dans cette question, **on suppose de plus que $I = \mathbb{R}$ et que b est π-périodique.**
Supposons également qu'il existe une solution g de (E_1) π-périodique non identiquement nulle.

(a) Justifier qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ tel que $g = af_0 + bf_1$ puis exprimer les fonctions $g_p : t \mapsto g(t) + g(-t)$ et $g_i : t \mapsto g(t) - g(-t)$ en fonction de f_0 et f_1.

(b) En déduire que f_0 ou f_1 est une solution π-périodique non identiquement nulle.

II.5. Traitons par exemple le cas particulier où b est une fonction constante strictement positive. Soit ω un réel strictement positif. Considérons l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathbb{R} \ , \ y'' + \omega^2 y = 0 \ . \tag{E_2}$$

(a) Déterminer f_0 et f_1.

(b) Montrer que $f_0(\pi) + f_1'(\pi) = 2\cos(\omega\pi)$ et résoudre les équations d'inconnue ω, $f_0(\pi) + f_1'(\pi) = -2$ et $f_0(\pi) + f_1'(\pi) = 2$.

(c) En déduire que,

(i) si $f_0(\pi) + f_1'(\pi) = 2$, toutes les solutions de (E_2) sont π-périodiques, (*ii*) si $f_0(\pi)+f_1'(\pi)=-2$, il n'existe aucune solution de (E_2) π-périodique non identiquement nulle et toutes les solutions sont 2π périodiques,

(*ii*) si $|f_0(\pi)+f_1'(\pi)|<2$, il n'existe aucune solution de (E_2) π-périodique non identiquement nulle. *On pourra supposer qu'une solution est π-périodique, particulariser l'égalité qu'elle satisfait en 0 et en $\dfrac{\pi}{2\omega}$ pour déterminer les paramètres de cette solution après avoir calculé le déterminant du système linéaire établi.*

III Alternative de Sturm

Dans cette partie, nous envisageons l'équation (E) dans le cas où $I=\mathbb{R}$, $a=0$ et où b est **continue sur** $\mathbb{R}$ et **π-périodique** :

$$\forall t\in\mathbb{R}\ ,\ y''+b(t)y=0\ . \tag{E_1}$$

III.1. Posons, pour tout $t\in\mathbb{R}$, $W(t)=f_0(t)f_1'(t)-f_0'(t)f_1(t)$. En justifiant la dérivabilité de W sur $\mathbb{R}$ puis en calculant sa dérivée, montrer que W est une fonction constante dont on précisera la valeur.

III.2. (a) Montrer que, si y est une solution de (E_1) sur $\mathbb{R}$, alors $\widetilde{y}: t\mapsto y(t+\pi)$ est aussi une solution de (E_1) sur $\mathbb{R}$.

(b) En déduire que, pour tout $t\in\mathbb{R}$, $\left\{\begin{array}{rcccc} f_0(t+\pi) & = & f_0(\pi)f_0(t) & + & f_0'(\pi)f_1(t)\\ f_1(t+\pi) & = & f_1(\pi)f_0(t) & + & f_1'(\pi)f_1(t)\end{array}\right.$

III.3. Soit $\lambda\in\mathbb{R}$.

(a) Montrer qu'il existe une solution g de (E_1) non identiquement nulle vérifiant

$$\forall t\in\mathbb{R}\ ,\ g(t+\pi)=\lambda.g(t)$$

si et seulement si le système d'inconnues $(a,b)\in\mathbb{R}^2$

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} (f_0(\pi)-\lambda)a & + & f_1(\pi)b & = & 0\\ f_0'(\pi)a & + & (f_1'(\pi)-\lambda)b & = & 0\end{array}\right.$$

admet au moins une solution différente de $(0,0)$.

(b) En déduire qu'il existe une solution g de (E_1) non identiquement nulle vérifiant

$$\forall t\in\mathbb{R}\ ,\ g(t+\pi)=\lambda.g(t)$$

si et seulement si λ est racine du trinôme $X^2-(f_0(\pi)+f_1'(\pi))X+1$.

III.4. Dans cette question, on suppose que $|f_0(\pi)+f_1'(\pi)|>2$.

(a) Justifier qu'il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $|\lambda|>1$ et les racines du trinôme $X^2-(f_0(\pi)+f_1'(\pi))X+1$ sont λ et $\dfrac{1}{\lambda}$.

(b) Montrer qu'il existe deux solutions g_1 et g_2 non nulles de (E_1) telles que

$$\forall t\in\mathbb{R}\ ,\ g_1(t+\pi)=\lambda g_1(t)\quad\text{ et }\quad g_2(t+\pi)=\frac{1}{\lambda}g_2(t)$$

(c) Justifier que l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (E_1) est l'ensemble des combinaisons linéaires de g_1 et g_2. On pourra commencer par montrer par l'absurde que le système linéaire d'inconnues $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ $\left\{\begin{array}{rcrcl} g_1(0)x & + & g_2(0)y & = & \dots\\ g_1'(0)x & + & g_2'(0)y & = & \dots\end{array}\right.$ a un déterminant non nul puis exploiter ce résultat.

(d) Justifier l'existence de $t_1\in\mathbb{R}$ tel que $g_1(t_1)\neq 0$ puis montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}|g_1(t_1+n\pi)|=+\infty$.

Montrer de même qu'il existe une suite de réels (u_n) telle que $\lim\limits_{n\to+\infty}|g_2(u_n)|=+\infty$.

On admet que $\lim\limits_{t\to-\infty}g_1(t)=0=\lim\limits_{t\to+\infty}g_2(t)$.

(e) Conclure que toute solution h non nulle de (E_1) n'est pas bornée sur $\mathbb{R}$.

III.5. Dans cette question, on suppose que $|f_0(\pi)+f_1'(\pi)|=2$.

(a) Montrer que, si $f_0(\pi)+f_1'(\pi)=2$, alors il existe une solution non identiquement nulle de (E_1) qui est π-périodique.

(b) Montrer que, si $f_0(\pi)+f_1'(\pi)=-2$, alors il n'existe aucune solution non identiquement nulle de (E_1) qui est π-périodique et il existe une solution non identiquement nulle de (E_1) qui est 2π périodique.

Corrigé du devoir surveillé n°3

Exercice 1

On note $\operatorname{th} : x \mapsto \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}$, la fonction tangente hyperbolique.

.1. Fonction argth.

(a) Quel est l'ensemble de définition, noté $\mathcal{D}$ de th ? Montrer que th est dérivable sur $\mathcal{D}$ et calculer, pour tout $x \in \mathcal{D}$, la valeur de $\operatorname{th}'(x)$. On donnera deux expressions, l'une en fonction de th et l'autre en fonction de ch.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch}(x) \geqslant 1$ donc

$$\boxed{\text{th est définie sur } \mathcal{D} = \mathbb{R}.}$$

Ensuite, sur $\mathbb{R}$, th est le quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ -le dénominateur ne s'annulant pas-, elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$$\boxed{\operatorname{th}'(x) = \frac{\operatorname{sh}'(x)\operatorname{ch}(x) - \operatorname{ch}'(x)\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}^2(x)} = \frac{\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x)}{\operatorname{ch}^2(x)} = 1 - \operatorname{th}^2(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2(x)}}$$

(b) En déduire que th établit une bijection de $\mathcal{D}$ sur un intervalle I à préciser.

On a alors :
— th est continue sur $\mathbb{R}$,
— pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{th}'(x) = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2(x)} > 0$, donc th est strictement croissante sur $\mathbb{R}$,
— $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \operatorname{th}(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}(e^{2x}-1)}{e^{-x}(e^{2x}+1)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-1+e^{2x}}{1+e^{2x}} = -1$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \operatorname{th}(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}} = 1$.

$$\boxed{\text{Ainsi th établit une bijection de } \mathbb{R} \text{ sur l'intervalle } I =]-1,1[.}$$

(c) On note argth, la fonction réciproque de th. Montrer que argth est dérivable sur I et calculer $\operatorname{argth}'(x)$, pour tout $x \in I$.

En tant que fonction réciproque, argth est définie sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Elle est, par ailleurs dérivable sur $\{x \in I \mid \operatorname{th}'(\operatorname{argth}(x)) = 0\}$. Or pour tout $x \in I =]-1,1[$,

$$\operatorname{th}'(\operatorname{argth}(x)) = 1 - \operatorname{th}^2(\operatorname{argth}(x)) = 1 - x^2 \neq 0$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Donc argth est dérivable sur } I =]-1,1[. \\ \text{Et, pour tout } x \in]-1,1[,\ \operatorname{argth}'(x) = \dfrac{1}{\operatorname{th}'(\operatorname{argth}(x))} = \dfrac{1}{1-x^2}.\end{array}}$$

.2. Calculus.

(a) Donner une primitive de $g :]0,\pi[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{1}{\sin x}$, en faisant le changement de variable $t = \tan\dfrac{\theta}{2}$.

Version MPSI3. On note $G : x \mapsto \displaystyle\int_{.}^{x} \frac{1}{\sin\theta}\mathrm{d}\theta$, une primitive de $g : x \mapsto \dfrac{1}{\sin x}$ sur $]0,\pi[$.

Si on note $t = \tan\dfrac{\theta}{2}$, on a $\sin\theta = \dfrac{2t}{1+t^2}$.

Le changement de variable $\theta \mapsto t = \tan\dfrac{\theta}{2}$ est bijectif de $]0,\pi[$ sur $]0,+\infty[$ et de classe $\mathcal{C}^1$,
la bijection réciproque est $t \mapsto \theta = 2\arctan t$.
On a alors $\mathrm{d}\theta = \dfrac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t$.

$$\boxed{\forall x \in]0,\pi[,\ G(x) = \int_{.}^{\tan\frac{x}{2}} \frac{1}{t}\mathrm{d}t = \ln\left(\tan\frac{x}{2}\right) + C}$$

Autre rédaction. Déterminons la primitive G de g qui s'annule en $\dfrac{\pi}{2}$.

En posant $t = \tan\dfrac{\theta}{2}$, on a $\sin\theta = \dfrac{2t}{1+t^2}$.

Le changement de variable $\theta \mapsto t = \tan\dfrac{\theta}{2}$ est bijectif de $]0,\pi[$ sur $]0,+\infty[$ et de classe $\mathcal{C}^1$,

la bijection réciproque est $t \mapsto \theta = 2\arctan t$.

On a alors $\mathrm{d}\theta = \dfrac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t$.

$$\forall x \in]0,\pi[\ ,\ G(x) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \frac{1}{\sin\theta}\mathrm{d}\theta = \int_{\tan\frac{\pi}{4}}^{\tan\frac{x}{2}} \frac{1}{t}\mathrm{d}t = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| - \ln(1) = \ln\left(\tan\frac{x}{2}\right)$$

car, pour tout $x \in]0,\pi[$, $\tan\dfrac{x}{2} > 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi, une primitive de } g \text{ est } G : x \in]0,\pi[\mapsto \ln\left(\tan\frac{x}{2}\right)}$$

(b) Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < b$. Soit h une fonction définie et continue sur l'intervalle $]a,b[$. On note H une primitive de h sur $]a,b[$. On pose, lorsque cela a un sens, $f(x) = h(2x+c)$ où c est une constante réelle.
Déterminer le domaine de définition de f, justifier que f est continue et exprimer une primitive de f en fonction de H.

$f(x)$ a un sens $\iff 2x + c \in]a,b[\iff x \in \left]\dfrac{a-c}{2}, \dfrac{b-c}{2}\right[$.

$$\boxed{\text{Ainsi, le domaine de définition de } f \text{ est } \left]\frac{a-c}{2}, \frac{b-c}{2}\right[.}$$

$f = h \circ (x \mapsto 2x + c)$ est la composée de deux fonctions continues donc

$$\boxed{f \text{ est continue sur son intervalle de définition.}}$$

Posons $F : x \in \left]\dfrac{a-c}{2}, \dfrac{b-c}{2}\right[\mapsto \dfrac{1}{2}H(2x+c)$. $F = (x \mapsto \dfrac{1}{2}x) \circ H \circ (x \mapsto 2x + c)$ donc F est dérivable sur $\left]\dfrac{a-c}{2}, \dfrac{b-c}{2}\right[$ comme composée de fonctions dérivables, et de plus

$$\forall x \in \left]\frac{a-c}{2}, \frac{b-c}{2}\right[\ ,\ F'(x) = \frac{1}{2} \times H'(2x+c) \times 2 = h(2x+c) = f(x)$$

$$\boxed{\text{Ainsi, une primitive de } f \text{ est } F : x \in \left]\frac{a-c}{2}, \frac{b-c}{2}\right[\mapsto \frac{1}{2}H(2x+c)}$$

(c) Donner le plus grand intervalle contenant 0 sur lequel est définie $\psi : x \mapsto \operatorname{argth}(\tan x)$. On note cet intervalle J.

On cherche J, intervalle de $\mathbb{R}$ tel que :

— $0 \in J$

— $J \subset \bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}}]-\dfrac{\pi}{2} + n\pi, \dfrac{\pi}{2} + n\pi[$ (domaine de définition de tan)

— $\tan(J) \subset]-1,1[$.

La dernière condition donne en fait $J \subset \bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}}]-\dfrac{\pi}{4} + n\pi, \dfrac{\pi}{4} + n\pi[$.

J contenant 0 et étant l'intervalle le plus grand possible, on trouve

$$\boxed{J = \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[}$$

(d) Montrer que $\forall x \in J,\ \psi'(x) = \dfrac{1}{\cos 2x}$.

On applique alors la dérivation de fonctions composées. La définition de J permet d'affirmer que ψ est dérivable sur J et

$$\forall x \in J, \qquad \psi'(x) = \tan'(x) \times \operatorname{argth}'(\tan x) = \frac{1}{\cos^2(x)} \times \frac{1}{1-\tan^2(x)} = \frac{1}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{1}{\cos 2x}$$

.

$$\boxed{\forall x \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[, \qquad \psi'(x) = \frac{1}{\cos 2x}}$$

(e) En déduire que pour tout $x \in J$, $\operatorname{argth}(\tan x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\tan\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$.

Méthode 1 en utilisant la question 2(b). D'après la question précédente,

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[,\ \psi'(x) = \frac{1}{\cos 2x} = \frac{1}{\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)} = g\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$$

donc ψ est une primitive de $x \mapsto g\left(2x+\dfrac{\pi}{2}\right)$,
ce qui nous permet d'appliquer le résultat de la question 2(b) pour $a \leftarrow 0$, $b \leftarrow \pi$, $h \leftarrow g$, $H \leftarrow G$ (car d'après la question 2(a), G est une primitive de g), $f \leftarrow \psi'$ et $c \leftarrow \dfrac{\pi}{2}$: une primitive de ψ' est $x \mapsto \dfrac{1}{2}G\left(2x+\dfrac{\pi}{2}\right)$ donc l'ensemble des primitives de ψ' est

$$\left\{x \mapsto \frac{1}{2}\ln\left(\tan\frac{(2x+\frac{\pi}{2})}{2}\right) + \lambda \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\} = \left\{x \mapsto \frac{1}{2}\ln\left(\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right) + \lambda \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\}$$

Or ψ est une primitive de ψ' donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[\ ,\ \operatorname{Argth}(\tan x) = \psi(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right) + \lambda$$

Particularisons pour $x \leftarrow 0$,

$$\underbrace{\operatorname{Argth}(\tan 0)}_{=\operatorname{Argth}(0)=0} = \frac{1}{2}\ln\underbrace{\left(\tan\left(0+\frac{\pi}{4}\right)\right)}_{=1} + \lambda = \lambda$$

donc $\lambda = 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } x \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[,\ \operatorname{argth}(\tan x) = \frac{1}{2}\ln\left(\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right).}$$

Méthode 2 sans utiliser la question 2(b). On remarque que $\ln\left(\tan\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\right) = G(2x+\dfrac{\pi}{2})$.
On peut dériver la différence, pour tout $x \in J$ (par linéarité et composition) :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\operatorname{argth}(\tan x) - \frac{1}{2}\ln\left(\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right)\right] = \frac{1}{\cos 2x} - \frac{2}{2}G'(2x+\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{\cos 2x} - \frac{1}{\sin(2x+\frac{\pi}{2})} = 0$$

Donc $x \mapsto \operatorname{argth}(\tan x) - \dfrac{1}{2}\ln\left(\tan\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$ est constante sur J.
Et en particulier en $x = 0$: $\operatorname{argth}(\tan 0) - \dfrac{1}{2}\ln\left(\tan\left(0+\dfrac{\pi}{4}\right)\right) = \operatorname{argth}(0) - \dfrac{1}{2}\ln(1) = 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } x \in J,\ \operatorname{argth}(\tan x) = \frac{1}{2}\ln\left(\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right).}$$

Remarque. En fait, il existe une forme fermée pour argth faisant intervenir les fonctions usuelles.
Il s'agit de $x \mapsto \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$ (en effet : $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+\operatorname{th}(x)}{1-\operatorname{th}(x)} = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{2e^x}{2e^{-x}} = x$).
On a alors

$$\operatorname{argth}(\tan(x)) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\tan x}{1-\tan x} \qquad \text{et} \qquad \tan(x+\frac{\pi}{4}) = \frac{\tan x + \tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan x\tan\frac{\pi}{4}} = \frac{1+\tan x}{1-\tan x}$$

Problème

Dans ce problème, on étudie les solutions **à valeurs réelles** de l'équation différentielle sous forme résolue

$$y" + a(t)y' + b(t)y = 0 \tag{E}$$

où $(a, b) \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})^2$, I étant un intervalle réel.

I Résolution de (E) connaissant une solution particulière

Dans cette partie, on suppose que Φ est une solution de (E), définie sur I, qui ne s'annule jamais (*i.e.* $\forall t \in I,\ \Phi(t) \neq 0$).

On fixe $t_0 \in I$ et on note A une primitive de a définie sur I.

I.1. Soit f une fonction deux fois dérivable définie sur I. On définit la fonction g pour tout $t \in I$ par $g(t) = \dfrac{f(t)}{\Phi(t)}$.

(a) Justifier que la fonction g est bien définie et qu'elle est deux fois dérivable.

---

g est le **quotient d'une fonction deux fois dérivable** définie sur I **par une fonction deux fois dérivable** définie sur I **qui ne s'annule pas sur** I donc $\boxed{\text{elle est bien définie et deux fois dérivable définie sur } I.}$

(b) Montrer que $f = \Phi \times g$ est solution de (E) sur I si, et seulement si, g' est solution sur I de l'équation

$$z' + \left(\frac{2\Phi'(t)}{\Phi(t)} + a(t)\right) z = 0. \tag{E'}$$

La formule de dérivation d'un produit de fonctions dérivables donne :

$$\forall t \in I,\ f'(t) = \Phi'(t)g(t) + \Phi(t)g'(t),\ \text{ puis } \forall t \in I,\ f''(t) = \Phi''(t)g(t) + 2\Phi'(t)g'(t) + \Phi(t)g''(t).$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
f \text{ est solution de } (E) \text{ sur } I &\iff \forall t \in I,\ \Phi''(t)g(t) + 2\Phi'(t)g'(t) + \Phi(t)g''(t) \\
&\qquad\qquad + a(t)\left[\Phi'(t)g(t) + \Phi(t)g'(t)\right] + b(t)\Phi(t)g(t) = 0, \\
&\iff \forall t \in I,\ \overbrace{\left(\Phi''(t) + a(t)\Phi'(t) + b(t)\Phi(t)\right)}^{=0, \text{ car } \Phi \text{ est solution de } (E)} g(t) \\
&\qquad\qquad + \Phi(t)g''(t) + (2\Phi'(t) + a(t)\Phi(t))g'(t) = 0 \\
&\iff \forall t \in I,\ \Phi(t)g''(t) + (2\Phi'(t) + a(t)\Phi(t))g'(t) = 0 \\
&\iff \forall t \in I,\ g''(t) + \left(\frac{2\Phi'(t)}{\Phi(t)} + a(t)\right) g'(t) = 0 \quad \text{car } \Phi \text{ ne s'annule pas sur } I \\
&\iff g' \text{ est solution sur } I \text{ de l'équation } (E') :\ z' + \left(\frac{2\Phi'(t)}{\Phi(t)} + a(t)\right) z = 0.
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{L'équivalence recherchée est donc démontrée.}}$

I.2. Indiquer à quel type d'équations appartient (E') puis citer soigneusement les hypothèses du théorème permettant de la résoudre. Expliciter l'ensemble de ses solutions (que l'on exprimera en fonction de A et Φ) et donner sa nature.

- (E') est une équation différentielle **linéaire d'ordre 1, homogène**.
  Elle est **définie sur** I, **résolue sur** I et le **coefficient est continu** sur I (Φ est deux fois dérivable donc Φ et Φ' sont continues sur I, a est continue sur I par hypothèse) donc les **solutions définies sur un intervalle maximal sont définies sur** I et leur ensemble constitue une **droite vectorielle**.

- Une primitive de $t \mapsto \dfrac{2\Phi'(t)}{\Phi(t)} + a(t)$ est $t \mapsto 2\ln|\Phi(t)| + A(t)$ donc la droite vectorielle des solutions définies sur I est

$$\left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda \underbrace{e^{-2\ln|\Phi(t)|-A(t)}}_{=\frac{e^{-A(t)}}{|\Phi(t)|^2}} \end{array} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \dfrac{e^{-A(t)}}{\Phi(t)^2} \end{array} \right\}$$

I.3. En déduire que l'ensemble des solutions de (E) définies sur I est

$$\left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda\Phi(t)\displaystyle\int_{t_0}^{t} \frac{e^{-A(u)}}{\Phi^2(u)}\mathrm{d}u + \mu\Phi(t) \end{array} \mid (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

$$\begin{aligned}
f \text{ est une sol. de (E) déf sur } I \quad & \iff \quad \left(\frac{f}{\Phi}\right)' \in \mathrm{Vect}\left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \dfrac{e^{-A(t)}}{\Phi(t)^2} \end{array} \right\} \quad \text{(question I.1(b))} \\
& \iff \quad \exists \lambda \in \mathbb{R} \ : \ \forall t \in I \ , \ \left(\frac{f}{\Phi}\right)'(t) = \lambda \frac{e^{-A(t)}}{\Phi(t)^2} \\
& \iff \quad \exists \lambda \in \mathbb{R} \ : \ \forall t \in I \ , \ \left(\frac{f}{\Phi}\right)'(t) = \left(t \mapsto \lambda \int_{t_0}^{t} \frac{e^{-A(u)}}{\Phi(u)^2}\mathrm{d}u\right)'(t) \\
& \iff \quad \exists \lambda \in \mathbb{R} \ : \ \forall t \in I \ , \ \left(t \mapsto \frac{f(t)}{\Phi(t)} - \lambda \int_{t_0}^{t} \frac{e^{-A(u)}}{\Phi(u)^2}\mathrm{d}u\right)'(t) = 0 \\
& \iff \quad \exists (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \forall t \in I \ , \ \frac{f(t)}{\Phi(t)} - \lambda \int_{t_0}^{t} \frac{e^{-A(u)}}{\Phi(u)^2}\mathrm{d}u = \mu \\
& \iff \quad \exists (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \forall t \in I \ , \ \frac{f(t)}{\Phi(t)} = \lambda \int_{t_0}^{t} \frac{e^{-A(u)}}{\Phi(u)^2}\mathrm{d}u + \mu \\
& \iff \quad \exists (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \forall t \in I \ , \ f(t) = \lambda\Phi(t) \int_{t_0}^{t} \frac{e^{-A(u)}}{\Phi(u)^2}\mathrm{d}u + \mu\Phi(t) \\
& \iff \quad f \in \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda\Phi(t)\displaystyle\int_{t_0}^{t} \frac{e^{-A(u)}}{\Phi^2(u)}\mathrm{d}u + \mu\Phi(t) \end{array} \mid (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}
\end{aligned}$$

I.4. **Exemple.** Considérons l'équation différentielle

$$9t^2y" + 3ty' + y = 0 \tag{Ex1}$$

(a) Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $t \mapsto t^\alpha$ soit solution de (Ex1) sur $]0,+\infty[$.

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $t \mapsto t^\alpha$ est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$ donc, en injectant dans l'équation,

$$\begin{aligned}
t \mapsto t^\alpha \text{ est solution de (Ex1) sur }]0,+\infty[\quad & \iff \quad \forall t \in]0,+\infty[\ , \ 9t^2\alpha(\alpha-1)t^{\alpha-2} + 3t\alpha t^{\alpha-1} + t^\alpha = 0 \\
& \iff \quad \forall t \in]0,+\infty[\ , \ (9\alpha^2 - 9\alpha + 3\alpha + 1)t^\alpha = 0 \\
& \iff \quad \forall t \in]0,+\infty[\ , \ (3\alpha-1)^2 t^\alpha = 0
\end{aligned}$$

Ce calcul, dans le cas $\alpha = \dfrac{1}{3}$, montre que $\boxed{t \mapsto t^{\frac{1}{3}} \text{ est une solution de (Ex1) définie sur }]0,+\infty[.}$

(b) Résoudre (Ex1) sur $\mathbb{R}_+^*$. On observera que l'équation (Ex1) n'a pas exactement la forme de l'équation (E).

Sur $\mathbb{R}_+^*$, l'équation (Ex1) est équivalente à

$$y" + \frac{1}{3t}y' + \frac{1}{9t^2}y = 0$$

ce qui permet d'appliquer le résultat de la question I.3 : en prenant

— $I \leftarrow]0,+\infty[$,
— $t_0 \leftarrow 1$ (autorisé car $1 \in]0,+\infty[$),
— $a(t) \leftarrow \dfrac{1}{3t}$ (autorisé car $t \mapsto \dfrac{1}{3t}$ est continue sur $]0,+\infty[$),
— $A(t) \leftarrow \dfrac{1}{3}\ln t$ (une primitive de a),
— $\Phi(t) \leftarrow t^{\frac{1}{3}}$ (autorisé car nous venons de voir que c'est une solution de (Ex1) et elle ne s'annule pas sur $]0,+\infty[$).

On a alors,

$$\forall t \in]0,+\infty[\ ,\ \int_{t_0}^{t} \frac{e^{-A(u)}}{\Phi^2(u)}\mathrm{d}u = \int_1^t \frac{e^{-\frac{1}{3}\ln u}}{u^{\frac{2}{3}}}\mathrm{d}u = \int_1^t \frac{\mathrm{d}u}{u} = [\ln u]_1^t = \ln t$$

si bien que le plan vectoriel des solutions de (Ex1) définies sur $]0,+\infty[$ est

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda t^{\frac{1}{3}}\ln t + \mu t^{\frac{1}{3}} \end{array} \mid (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}}$$

(c) Soit h une fonction définie sur $]0,+\infty[$, deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Posons $\widehat{h} \left| \begin{array}{ccc}]-\infty,0[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & h(-t) \end{array} \right.$

Justifier que $\widehat{h}$ est bien définie puis qu'elle est solution de (Ex1) sur $]-\infty,0[$ si et seulement si h est solution de (Ex1) sur $]0,+\infty[$.

En déduire les solutions définies sur $]-\infty,0[$ de (Ex1).

- $\star$ Pour tout $t < 0$, $-t \in]0,+\infty[$ donc $\boxed{\widehat{h} = h \circ (t \mapsto -t) \text{ est bien définie sur }]-\infty,0[.}$
  $\star$ $\widehat{h} = h \circ (t \mapsto -t)$ or $t \mapsto -t$ est deux fois dérivable sur $]-\infty,0[$ et h est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$ donc $\boxed{\widehat{h} \text{ est deux fois dérivable sur }]-\infty,0[.}$
  $\star$ En observant que $\widehat{h}'(t) = -h'(-t)$ et $\widehat{h}''(t) = (-1)^2 h''(-t) = h''(-t)$,

$$\begin{aligned}
\widehat{h} \text{ est solution de (Ex1) sur }]-\infty,0[&\iff \forall t \in]-\infty,0[\ ,\ 9t^2\widehat{h}''(t) + 3t\widehat{h}'(t) + \widehat{h}(t) = 0 \\
&\iff \forall t \in]-\infty,0[\ ,\ 9t^2 h''(-t) + 3t(-h'(-t)) + h(-t) = 0 \\
&\iff \forall s \in]0,+\infty[\ ,\ 9(-s)^2 h''(s) + 3(-s)(-h'(s)) + h(s) = 0 \quad \text{en posant } s = -t \\
&\iff \forall s \in]0,+\infty[\ ,\ 9s^2 h''(s) + 3sh'(s) + h(s) = 0 \\
&\iff h \text{ est solution de (Ex1) sur }]0,+\infty[
\end{aligned}$$

- Le résultat ci-dessus prouve que l'application $h \mapsto \widehat{h}$ réalise une bijection de l'ensemble des solutions de (Ex1) sur $]0,+\infty[$ dans l'ensemble des solutions de (Ex1) sur $]-\infty,0[$ si bien que le plan vectoriel des solutions de (Ex1) définies sur $]-\infty,0[$ est

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{ccc}]-\infty,0[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda(-t)^{\frac{1}{3}}\ln(-t) + \mu(-t)^{\frac{1}{3}} \end{array} \mid (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}}$$

(d) Supposons qu'il existe une solution h de (Ex1) définie sur $\mathbb{R}$. Justifier qu'il existe $(a^-,b^-,a^+,b^+) \in \mathbb{R}^4$ tels que

$$\forall t \in \mathbb{R}^*\ ,\ h(t) = \left\{ \begin{array}{ll} a^-|t|^{\frac{1}{3}}\ln|t| + b^-|t|^{\frac{1}{3}} & \text{si } t < 0, \\ a^+ t^{\frac{1}{3}}\ln t + b^+ t^{\frac{1}{3}} & \text{si } t > 0. \end{array} \right.$$

En exploitant la dérivabilité de h en 0, obtenir des contraintes sur a^-, a^+, b^- et b^+.

En déduire l'ensemble des solutions de (Ex1) définies sur $\mathbb{R}$.

- h est une solution de (Ex1) définie sur $\mathbb{R}$ donc
  $\star$ sa restriction à $]-\infty,0[$ est une solution de (Ex1) définie sur $]-\infty,0[$ si bien qu'en utilisant la question précédente,

$$\exists (a^-,b^-) \in \mathbb{R}^2\ :\ \forall t \in \mathbb{R}_-^*\ ,\ h(t) = a^-|t|^{\frac{1}{3}}\ln|t| + b^-|t|^{\frac{1}{3}}$$

* ⋆ sa restriction à $]0,+\infty[$ est une solution de (Ex1) définie sur $]0,+\infty[$ si bien qu'en utilisant la question précédente,

$$\exists (a^+,b^+)\in\mathbb{R}^2 \ : \ \forall t\in\mathbb{R}_+^* \ , \ h(t)=a^+t^{\frac13}\ln t+b^+t^{\frac13}$$

* De plus, la fonction h étant une solution définie sur $\mathbb{R}$ d'une équation du second ordre, elle est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ donc, en particulier,
  * ⋆ h est continue en 0 si bien que

$$h(0)=\lim_{t\to0^+}h(t)=\lim_{t\to0^+}a^+\underbrace{t^{\frac13}\ln t}_{\substack{\longrightarrow 0\\ t\to0^+\\ \text{croiss. comp.}}}+b^+t^{\frac13}=0$$

  * ⋆ h est dérivable en 0

$$h'(0)=\lim_{t\to0^+}\frac{h(t)-h(0)}{t-0}=\lim_{t\to0^-}\frac{h(t)-h(0)}{t-0}$$

  ce qui équivaut à (en utilisant que $h(0)=0$)

$$h'(0)=\lim_{t\to0^+}\left(a^+\frac{\ln(t)}{t^{\frac23}}+\frac{b^+}{t^{\frac23}}\right)=\lim_{t\to0^-}\left(a^-\frac{\ln|t|}{|t|^{\frac23}}+\frac{b^-}{|t|^{\frac23}}\right)$$

  Si $a^+\neq0$,

$$a^+\frac{\ln(t)}{t^{\frac23}}+\frac{b^+}{t^{\frac23}}=a^+\underbrace{\frac{\ln(t)}{t^{\frac23}}}_{\substack{\longrightarrow -\infty\\ t\to0^+}}\underbrace{\left(1+\underbrace{\frac{b^+}{a^+\ln t}}_{\substack{\longrightarrow 0\\ t\to0^+}}\right)}_{\substack{\longrightarrow 1\\ t\to0^+}}\underset{t\to0^+}{\longrightarrow}\begin{cases}+\infty & \text{si } a^+<0\\ -\infty & \text{si } a^+>0\end{cases}$$

  or cette limite doit être égale à $h'(0)$ donc finie ce qui permet d'affirmer que $\boxed{a^+=0}$.
  La dérivabilité à droite en 0 se reformule donc en

$$h'(0)=\lim_{t\to0^+}\frac{b^+}{t^{\frac23}}$$

  or, $\displaystyle\lim_{t\to0^+}\frac{b^+}{t^{\frac23}}=\begin{cases}-\infty & \text{si } b^+<0\\ 0 & \text{si } b^+=0\\ +\infty & \text{si } b^+>0\end{cases}$ donc $\boxed{b_+=0}$.
  Des calculs et un raisonnement analogues montrent de même que $\boxed{a^-=b^-=0}$.
  $\boxed{\text{Ainsi, il existe au plus une solution de (Ex1) définie sur } \mathbb{R} \text{ : la fonction nulle.}}$
* Réciproquement, la fonction nulle est évidemment une solution de (Ex1) définie sur $\mathbb{R}$ (car cette équation est homogène) donc $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de (Ex1) définies sur } \mathbb{R} \text{ est le singleton } \{\widetilde{0}\}}$.

II Étude du cas particulier $a=0$ et b paire

Dans cette partie, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à l'origine.
Nous envisageons l'équation (E) dans le cas où $a=0$ et où b est **continue sur** I et **paire** :

$$\forall t\in I \ , \ y''+b(t)y=0 \quad . \tag{E_1}$$

On admet (car cette équation est linéaire du second ordre à coefficients **non constants** et ne rentre donc pas dans le cadre du cours de MPSI) l'existence et l'unicité d'une solution définie sur I au problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases}\forall t\in I & , & y''(t)+b(t)y(t)=0\\ \quad y(t_0) & = & \alpha_0\\ \quad y'(t_0) & = & \alpha_1\end{cases}$$

où $t_0 \in I$ et $(\alpha_0, \alpha_1) \in \mathbb{R}^2$ sont fixés quelconques.

Une première application de l'énoncé ci-dessus pour $t_0 = 0$, $\alpha_0 = 1$ et $\alpha_1 = 0$ (resp. $t_0 = 0$, $\alpha_0 = 0$ et $\alpha_1 = 1$) permet de définir les fonctions notées f_0 (resp. f_1) comme les uniques solutions des problèmes de Cauchy

$$\left\{\begin{array}{rcl} \forall t \in I & , & y''(t) + b(t)y(t) = 0 \\ y(0) & = & 1 \\ y'(0) & = & 0 \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{rcl} \forall t \in I & , & y''(t) + b(t)y(t) = 0 \\ y(0) & = & 0 \\ y'(0) & = & 1 \end{array}\right.$$

II.1. (a) Montrer que l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions définies sur I de (E_1) vérifie $\{\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 \mid (\lambda_0, \lambda_1) \in \mathbb{R}^2\} \subset \mathcal{S}$.

Soit $\gamma \in \{\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 \mid (\lambda_0, \lambda_1) \in \mathbb{R}^2\}$ fixée quelconque. Il existe $(\lambda_0, \lambda_1) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\gamma = \lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1$. De plus,

$$\begin{array}{rcll} \forall t \in I\ ,\ \gamma''(t) + b(t)\gamma(t) & = & (\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1)''(t) + b(t)(\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1)(t) & \\ & = & \lambda_0 f_0''(t) + \lambda_1 f_1''(t) + b(t)\lambda_0 f_0(t) + b(t)\lambda_1 f_1(t) & \text{car la dérivation est linéaire} \\ & = & \lambda_0 \Big(f_0''(t) + b(t)f_0(t)\Big) + \lambda_1 \Big(f_1''(t) + b(t)f_1(t)\Big) & \\ & = & 0 \quad \text{car } f_0 \in \mathcal{S} \text{ et } f_1 \in \mathcal{S} & \end{array}$$

donc γ est une solution de l'équation différentielle (E_1).
Remarque : un autre argument repose sur le théorème de superposition pour les équations différentielles linéaires homogènes (quel que soit l'ordre et avec des coefficients non nécessairement constants) : f_0 et f_1 sont des solutions d'une même EDL homogène donc toutes les combinaisons linéaires de f_0 et f_1 sont aussi solutions de la même EDL homogène.

(b) Montrer que, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, l'unique solution notée f du problème de Cauchy

$$\left\{\begin{array}{rcl} \forall t \in I & , & y''(t) + b(t)y(t) = 0 \\ y(0) & = & a \\ y'(0) & = & b \end{array}\right.$$

s'exprime comme une combinaison linéaire de f_0 et f_1. En déduire que $\mathcal{S} = \{\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 \mid (\lambda_0, \lambda_1) \in \mathbb{R}^2\}$.

- Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ fixés quelconques. Posons $\widetilde{f} = af_0 + bf_1$.
  — $\widetilde{f}$ est combinaison linéaire de f_0 et f_1 donc, d'après la question précédente, c'est une solution de (E_1).
  — De plus $\widetilde{f}(0) = af_0(0) + bf_1(0) = a$ et $\widetilde{f}'(0) = af_0'(0) + bf_1'(0) = b$.
  Par conséquent, $\widetilde{f}$ et f sont des solutions définies sur I du même problème de Cauchy à savoir
  $$\left\{\begin{array}{rcl} \forall t \in I & , & y''(t) + b(t)y(t) = 0 \\ y(0) & = & a \\ y'(0) & = & b \end{array}\right. \tag{1}$$
  donc, d'après l'unicité de la solution à ce problème de Cauchy, $f = \widetilde{f}$.
  $\boxed{\text{Ainsi, } af_0 + bf_1 \text{ est la solution du problème de Cauchy étudié.}}$
- Procédons par double inclusion.
  ⋆ Nous avons déjà établi que $\{\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 \mid (\lambda_0, \lambda_1) \in \mathbb{R}^2\} \subset \mathcal{S}$.
  ⋆ Soit f une solution de l'équation (E_1) fixée quelconque.
  Alors f est la solution du problème de Cauchy
  $$\left\{\begin{array}{rcl} \forall t \in I & , & y''(t) + b(t)y(t) = 0 \\ y(0) & = & f(0) \\ y'(0) & = & f'(0) \end{array}\right.$$
  donc en appliquant le résultat de la première partie de la question pour $a \leftarrow f(0)$ et $b \leftarrow f'(0)$, on a
  $$f = f(0)f_0 + f'(0)f_1 \in \{\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 \mid (\lambda_0, \lambda_1) \in \mathbb{R}^2\}\ .$$
  donc $\mathcal{S} \subset \{\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 \mid (\lambda_0, \lambda_1) \in \mathbb{R}^2\}$.

$$\boxed{\text{Ainsi, l'ensemble des solutions réelles définies sur } I \text{ de } (E_1) \text{ est } \mathcal{S} = \{\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 \mid (\lambda_0, \lambda_1) \in \mathbb{R}^2\}.}$$

II.2. (a) Montrer que, si y est une solution de (E_1) sur I, alors $\widehat{y} : t \mapsto y(-t)$ est aussi une solution de (E_1) sur I.

Soit y une solution de (E_1) sur I fixée quelconque. Posons $\widehat{y} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & y(-t) \end{array}$. Alors $\widehat{y}$

— est bien définie sur I car I est symétrique par rapport à l'origine,

— est deux fois dérivable sur I car c'est la composée de y et de $t \mapsto -t$ qui sont deux fois dérivables,

— vérifie, pour tout $t \in I$, $\widehat{y}'(t) = -y'(-t)$ et $\widehat{y}''(t) = -(-y''(-t)) = y''(-t)$ donc

$$\widehat{y}''(t) + b(t)\widehat{y}(t) = y''(-t) + b(t)y(-t) = y''(-t) + b(-t)y(-t) = 0$$

en utilisant la parité de b et en évaluant en $-t$ la fonction $y'' + b \times y$ qui est la fonction nulle.

$$\boxed{\text{Ainsi, si } y \text{ est une solution de } (E_1) \text{ sur } I, \text{ alors } t \mapsto y(-t) \text{ est aussi une solution de } (E_1) \text{ sur } I.}$$

(b) Montrer que f_0 est paire et que f_1 est impaire.

D'après la question précédente, la fonction $\widehat{f_0} \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f_0(-t) \end{array}$ est une solution de (E_1) sur I,

or $\widehat{f_0}(0) = f_0(0) = 1$ et $\widehat{f_0}'(0) = -f_0'(0) = 0$

donc f_0 et $\widehat{f_0}$ sont deux solutions définies sur I du même problème de Cauchy donc, par unicité elles sont égales ce qui prouve la parité de f_0.

De même, la fonction $\widehat{f_1} \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f_1(-t) \end{array}$ est une solution de (E_1) sur I,

or $\widehat{f_1}(0) = f_1(0) = 0$ et $\widehat{f_1}'(0) = -f_1'(0) = -1$

donc f_1 et $-\widehat{f_1}$ sont deux solutions définies sur I du même problème de Cauchy donc, par unicité elles sont égales, $f_1 = -\widehat{f_1}$ ce qui prouve l'imparité de f_1.

$$\boxed{\text{Ainsi, } f_0 \text{ est paire et } f_1 \text{ est impaire.}}$$

(c) Déterminer, parmi les solutions de (E_1) sur I quelles sont celles qui sont paires et quelles sont celles qui sont impaires.

Montrons que les solutions paires sont $\{\lambda f_0 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ en procédant par double inclusion.

⋆ Soit f une solution paire de (E_1) sur I. Alors il existe $(\lambda_0, \lambda_1) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f = \lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1$. Puisque f est paire,

$$\forall t \in I \ , \ f(t) = \frac{f(t) + f(-t)}{2} = \frac{\lambda_0 f_0(t) + \lambda_1 f_1(t) + \lambda_0 f_0(-t) + \lambda_1 f_1(-t)}{2} = \lambda_0 f_0(t)$$

donc $f = \lambda_0 f_0 \in \{\lambda f_0 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.

⋆ Réciproquement, soit $\lambda \in \mathbb{R}$ fixé quelconque. La fonction λf_0 est une solution de (E_1) (d'après la forme générale des solutions de (E_1)) et elle est paire (car f_0 l'est).

On procède de manière analogue pour montrer que l'ensemble des fonctions impaires est $\{\mu f_1 \mid \mu \in \mathbb{R}\}$.

$$\boxed{\text{L'ensemble des solution paires est } \{\lambda f_1 \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \text{ et celui des solutions impaires est } \{\mu f_1 \mid \mu \in \mathbb{R}\}.}$$

II.3. On suppose, dans cette question uniquement, que f_0 ne s'annule pas sur I.

(a) Expliciter l'ensemble des solutions définies sur I de (E_1) en fonction de f_0 en appliquant la question I.3 et en choisissant $t_0 = 0$.

Puisque f_0 ne s'annule pas sur I, on applique la question I.3 pour $A \leftarrow 0$ (puisque $a = 0$, on peut choisir pour A la fonction constante de valeur 0) et $t_0 \leftarrow 0$:

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions définies sur } I \text{ est } \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda f_0(t) \displaystyle\int_0^t \frac{1}{f_0^2(u)} \mathrm{d}u + \mu f_0(t) \end{array} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}}$$

(b) Préciser l'expression intégrale de f_1 en fonction de f_0. En admettant que f_0 est paire, reprouver l'imparité de f_1 à partir de l'expression obtenue.

- Puisque $f_1 \in \mathcal{S}$, $\exists(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall t \in I\ ,\ \ f_1(t) = \lambda f_0(t) \int_0^t \frac{1}{f_0^2(u)}\mathrm{d}u + \mu f_0(t)$$

  La contrainte $f_1(0) = 0$ donne

$$0 = \lambda f_0(0) \underbrace{\int_0^0 \frac{1}{f_0^2(u)}\mathrm{d}u}_{=0} + \mu \underbrace{f_0(0)}_{=1} = \mu$$

  La contrainte $f_1'(0) = 0$ donne

$$1 = \lambda f_0'(0) \underbrace{\int_0^0 \frac{1}{f_0^2(u)}\mathrm{d}u}_{=0} + \lambda \underbrace{f_0(0) \times \frac{1}{f_0^2(0)}}_{=\frac{1}{1^2}} + \mu \underbrace{f_0'(0)}_{=0} = \lambda$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } \forall t \in I,\ f_1(t) = f_0(t) \int_0^t \frac{\mathrm{d}u}{f_0^2(u)}.}$$

- Admettons la parité de f_0 et procédons au changement de variable $s = -u$ dans l'expression intégrale de $f_1(-t)$ ce qui est austorisé car $u \mapsto -u$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment d'extrémités 0 et $-t$,

$$\begin{aligned} \forall t \in I\ ,\ \ f_1(-t) &= f_0(-t) \int_0^{-t} \frac{\mathrm{d}u}{f_0^2(u)} \\ &= f_0(-t) \int_0^{t} \frac{-\mathrm{d}s}{f_0^2(-s)} \quad \mathrm{d}u = -\mathrm{d}s \\ &= -f_0(t) \int_0^{t} \frac{\mathrm{d}s}{f_0^2(s)} \quad \text{par parité de } f_0 \\ &= -f_1(t) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } f_1 \text{ est une fonction impaire.}}$$

II.4. Dans cette question, **on suppose de plus que $I = \mathbb{R}$ et que b est π-périodique.**
Supposons également qu'il existe une solution g de (E_1) π-périodique non identiquement nulle.

(a) Justifier qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ tel que $g = af_0 + bf_1$ puis exprimer les fonctions $g_p : t \mapsto g(t) + g(-t)$ et $g_i : t \mapsto g(t) - g(-t)$ en fonction de f_0 et f_1.

$\star$ g est une solution de (E_1), or l'ensemble des solutions de (E_1) est $\{\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 \mid (\lambda_0,\lambda_1) \in \mathbb{R}^2\}$, donc il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $g = af_0 + bf_1$.
Par l'absurde, si $(a,b) = (0,0)$, alors g est la fonction identiquement nulle ce qui contredit l'hypothèse faite sur g.

$$\boxed{\text{Ainsi, il existe } (a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \text{ tel que } g = af_0 + bf_1.}$$

$\star$ En utilisant la parité de f_0 et l'imparité de f_1, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$g_p(t) = g(t) + g(-t) = af_0(t) + bf_1(t) + a \underbrace{f_0(-t)}_{=f_0(t)} + b \underbrace{f_1(-t)}_{=-f_1(t)} = 2af_0(t)$$

$$g_i(t) = g(t) - g(-t) = af_0(t) + bf_1(t) - a \underbrace{f_0(-t)}_{=f_0(t)} - b \underbrace{f_1(-t)}_{=-f_1(t)} = 2bf_1(t)$$

donc $\boxed{g_p = 2af_0 \text{ et } g_i = 2bf_1.}$

(b) En déduire que f_0 ou f_1 est une solution π-périodique non identiquement nulle.

Nous avons prouvé que $(a,b) \neq (0,0)$.

— Si $a \neq 0$, alors $f_0 = \dfrac{2}{a} g$ donc f_0 est π-périodique (car multiple d'une fonction π-périodique).

— Sinon, $a = 0$, or nous avons prouvé que $(a,b) \neq (0,0)$ donc $b \neq 0$, alors $f_1 = \dfrac{2}{b} g$ donc f_1 est π-périodique (car multiple d'une fonction π-périodique).

$$\boxed{\text{Ainsi, } f_0 \text{ ou } f_1 \text{ est } \pi\text{-périodique.}}$$

II.5. Traitons par exemple le cas particulier où b est une fonction constante strictement positive. Soit ω un réel strictement positif. Considérons l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathbb{R} \ , \ y'' + \omega^2 y = 0 \quad . \tag{E_2}$$

(a) Déterminer f_0 et f_1.

Le plan vectoriel des solutions réelles de l'équation harmonique (E_2) est

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda \cos(\omega t) + \mu \sin(\omega t) \end{array} \ \middle| \ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}}$$

Posons, pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et tout $t \in \mathbb{R}$, posons $f_{\lambda,\mu}(t) = \lambda \cos(\omega t) + \mu \sin(\omega t)$.

$$f_{\lambda,\mu} = f_0 \iff \left\{ \begin{array}{ccc} f_{\lambda,\mu}(0) & = & 1 \\ f'_{\lambda,\mu}(0) & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{ccc} \lambda & = & 1 \\ \omega\mu & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{ccc} \lambda & = & 1 \\ \mu & = & 0 \end{array} \right.$$

$$f_{\lambda,\mu} = f_1 \iff \left\{ \begin{array}{ccc} f_{\lambda,\mu}(0) & = & 0 \\ f'_{\lambda,\mu}(0) & = & 1 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{ccc} \lambda & = & 0 \\ \omega\mu & = & 1 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{ccc} \lambda & = & 0 \\ \mu & = & \dfrac{1}{\omega} \end{array} \right.$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } f_0 \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \cos(\omega t) \end{array} \right. \text{ et } f_1 \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \dfrac{\sin(\omega t)}{\omega} \end{array} \right. .}$$

(b) Montrer que $f_0(\pi) + f_1'(\pi) = 2\cos(\omega\pi)$ et résoudre les équations d'inconnue ω, $f_0(\pi) + f_1'(\pi) = -2$ et $f_0(\pi) + f_1'(\pi) = 2$.

- $f_0(\pi) + f_1'(\pi) = \cos(\omega\pi) + \dfrac{\omega \cos(\omega\pi)}{\omega} = 2\cos(\omega\pi)$.
-

$$\begin{aligned} f_0(\pi) + f_1'(\pi) = 2 \quad & \iff \quad 2\cos(\omega\pi) = 2 \\ & \iff \quad \cos(\omega\pi) = 1 \\ & \iff \quad \omega\pi \in 2\pi\mathbb{Z} \quad \text{or } \omega > 0, \\ & \iff \quad \omega \in 2\mathbb{N}^* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_0(\pi) + f_1'(\pi) = -2 \quad & \iff \quad 2\cos(\omega\pi) = -2 \\ & \iff \quad \cos(\omega\pi) = -1 \\ & \iff \quad \omega\pi \in \{\pi + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \\ & \iff \quad \exists k \in \mathbb{Z} \ : \ \omega\pi = (2k+1)\pi \\ & \iff \quad \exists k \in \mathbb{N} \ : \ \omega = 2k+1 \quad (\text{car } \omega > 0) \\ & \iff \quad \omega \in \{2k+1 \mid k \in \mathbb{N}\} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, les solutions de } f_0(\pi) + f_1'(\pi) = 2 \text{ (resp. } = -2) \text{ sont les entiers naturels pairs strictement positifs (resp. impairs).}}$$

(c) En déduire que,

  (*i*) si $f_0(\pi)+f_1'(\pi)=2$, toutes les solutions de (E_2) sont π-périodiques,

  (*ii*) si $f_0(\pi)+f_1'(\pi)=-2$, il n'existe aucune solution de (E_2) π-périodique non identiquement nulle et toutes les solutions sont 2π périodiques,

  (*ii*) si $|f_0(\pi)+f_1'(\pi)|<2$, il n'existe aucune solution de (E_2) π-périodique non identiquement nulle. *On pourra supposer qu'une solution est π-périodique, particulariser l'égalité qu'elle satisfait en 0 et en $\dfrac{\pi}{2\omega}$ pour déterminer les paramètres de cette solution après avoir calculé le déterminant du système linéaire établi.*

(*i*) Supposons que $f_0(\pi)+f_1'(\pi)=2$.
D'après la résolution de l'équation $f_0(\pi)+f_1'(\pi)=2$, ω est un entier naturel pair strictement positif donc il existe $k\in\mathbb{N}^*$ tel que $\omega=2k$. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle est

$$\left\{ f_{\lambda,\mu} = \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda\cos(2kt)+\mu\sin(2kt) \end{array} \mid (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2 \right\}$$

Or, $\forall t\in\mathbb{R}$, $f_{\lambda,\mu}(t+\pi)=\lambda\cos(2kt+2k\pi)+\mu\sin(2kt+2k\pi)=\lambda\cos(2kt)+\mu\sin(2kt)=f_{\lambda,\mu}(t)$, donc $\boxed{\text{toutes les les solutions de } (E_2) \text{ sont } \pi\text{-périodiques.}}$

(*ii*) Supposons que $f_0(\pi)+f_1'(\pi)=-2$.
D'après la résolution de l'équation $f_0(\pi)+f_1'(\pi)=-2$, ω est un entier naturel impair donc il existe $k\in\mathbb{N}$ tel que $\omega=2k+1$. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle est

$$\left\{ f_{\lambda,\mu} = \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda\cos((2k+1)t)+\mu\sin((2k+1)t) \end{array} \mid (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2 \right\}$$

$\forall t\in\mathbb{R}$, $f_{\lambda,\mu}(t+\pi)=\lambda\cos(2kt+2k\pi+\pi)+\mu\sin(2kt+2k\pi+\pi)=-\lambda\cos(2kt)-\mu\sin(2kt)=-f_{\lambda,\mu}(t)$
si bien que, si $f_{\lambda,\mu}$ n'est pas identiquement nulle, il existe $t_0\in\mathbb{R}$ tel que $f_{\lambda,\mu}(t_0)\neq 0$,
donc $f_{\lambda,\mu}(t_0+\pi)=-f_{\lambda,\mu}(t_0)\neq f_{\lambda,\mu}(t_0)$,
ce qui prouve que $f_{\lambda,\mu}$ n'est pas π-périodique.

$\boxed{\text{Ainsi, aucune solution non identiquement nulle de } (E_2) \text{ n'est } \pi\text{-périodique.}}$

De plus, $\forall t\in\mathbb{R}$, $f_{\lambda,\mu}(t+2\pi)=\lambda\cos(2kt+(2k+1)2\pi)+\mu\sin(2kt+(2k+1)\pi)=\lambda\cos(2kt)+\mu\sin(2kt)=f_{\lambda,\mu}(t)$,

$\boxed{\text{donc toutes les les solutions de } (E_2) \text{ sont } 2\pi\text{-périodiques.}}$

(*iii*) Supposons que $|f_0(\pi)+f_1'(\pi)|<2$.
Soient $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ fixés quelconques tels que la fonction $f_{\lambda,\mu}: t\mapsto\lambda\cos(\omega t)+\mu\sin(\omega t)$ est une fonction π-périodique solution de (E_2). Alors

$$\forall t\in\mathbb{R}\ ,\ \lambda\cos(\omega t)+\mu\sin(\omega t)=\lambda\cos(\omega t+\omega\pi)+\mu\sin(\omega t+\omega\pi)$$

Particularisons l'égalité ci-dessus pour $t\leftarrow 0$ et $t\leftarrow\dfrac{\pi}{2\omega}$:

$$\lambda\cos 0+\mu\sin 0=\lambda\cos(\omega\pi)+\mu\sin(\omega\pi)\iff\lambda=\lambda\cos(\omega\pi)+\mu\sin(\omega\pi)$$

et

$$\lambda\cos\frac{\pi}{2}+\mu\sin\frac{\pi}{2}=\lambda\cos\left(\frac{\pi}{2}+\omega\pi\right)+\mu\sin\left(\frac{\pi}{2}+\omega\pi\right)\iff\mu=-\lambda\sin(\omega\pi)+\mu\cos(\omega\pi)$$

Les deux équations ci-dessus montrent que (λ,μ) est solution du système linéaire

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} (1-\cos(\pi\omega))\lambda & - & \sin(\omega\pi)\mu & = & 0 \\ \sin(\omega\pi)\lambda & + & (1-\cos(\omega\pi)\mu & = & 0 \end{array}\right.$$

Le déterminant ce ce système linéaire est

$$(1-\cos(\pi\omega))^2+\sin^2(\omega\pi)=2-2\cos(\omega\pi)=2-(f_0(\pi)+f_1'(\pi))\neq 0\quad\text{car } |f_0(\pi)+f_1'(\pi)|<2.$$

donc le système admet une unique solution,
or il est homogène, donc $(0,0)$ est solution, donc $(\lambda,\mu)=(0,0)$
si bien que $f_{\lambda,\mu}=f_{0,0}$ est la fonction nulle.

On vient de prouver que l'équation a au plus une solution π-périodique, la fonction nulle. Réciproquement, la fonction nulle est une solution de (E_2) (car cette équation est homogène) et elle est π-périodique.

$\boxed{\text{Ainsi, la fonction identiquement nulle est l'unique solution } \pi\text{-périodique.}}$

III Alternative de Sturm

Dans cette partie, nous envisageons l'équation (E) dans le cas où $I=\mathbb{R}$, $a=0$ et où b est **continue sur** $\mathbb{R}$ et **π-périodique** :

$$\forall t\in\mathbb{R}\ ,\ y''+b(t)y=0\ \ . \tag{E_1}$$

III.1. Posons, pour tout $t\in\mathbb{R}$, $W(t)=f_0(t)f_1'(t)-f_0'(t)f_1(t)$. En justifiant la dérivabilité de W sur $\mathbb{R}$ puis en calculant sa dérivée, montrer que W est une fonction constante dont on précisera la valeur.

---

f_0 et f_1 sont des solutions d'une équation différentielle du second ordre sur $\mathbb{R}$ donc elles sont deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ donc
— f_0 et f_1 sont dérivables sur $\mathbb{R}$,
— f_0' et f_1' sont dérivables sur $\mathbb{R}$,
si bien que, par **stabilité de la dérivabilité par produit et combinaison linéaire**, $\boxed{W \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}}$.
De plus, en utilisant que f_0 et f_1 sont solutions de (E), $f_0''=-bf_0$ et $f_1''=-bf_1$,

$$W'=(f_0f_1'-f_0'f_1)'=f_0'f_1'+f_0\underbrace{f_1''}_{=-bf_1}-\underbrace{f_0''}_{=-bf_0}f_1-f_0'f_1'=-bf_0f_1+bf_0f_1=0$$

donc W est dérivable de dérivée nulle sur l'intervalle $\mathbb{R}$,
donc W est constante sur $\mathbb{R}$,
donc $\forall t\in\mathbb{R}$, $W(t)=W(0)=f_0(0)f_1'(0)-f_0'(0)f_1(0)=1\times1-0\times0=1$.

$\boxed{\text{Ainsi } W \text{ est la fonction constante de valeur 1.}}$

III.2. (a) Montrer que, si y est une solution de (E_1) sur $\mathbb{R}$, alors $\widetilde{y}:t\mapsto y(t+\pi)$ est aussi une solution de (E_1) sur $\mathbb{R}$.

⋆ y est une solution d'une équation différentielle du second ordre sur $\mathbb{R}$ donc elle est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ donc $\widetilde{y}=y\circ(t\mapsto t+\pi)$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ (comme composée de fonctions deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$).

⋆

$$\begin{aligned}\forall t\in\mathbb{R}\ ,\ \widetilde{y}''(t)+b(t)\widetilde{y}(t) &= y''(t+\pi)+b(t)y(t+\pi)\\ &= y''(t+\pi)+b(t+\pi)y(t+\pi) \quad \text{car } b \text{ est } \pi\text{-périodique,}\\ &= (y''+by)(t+\pi)\\ &= 0 \quad \text{car } y \text{ est une solution de } (E_1) \text{ sur } \mathbb{R} \text{ donc } y''+by=0 \text{ sur } \mathbb{R}\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Ainsi, si } y \text{ est une solution de } (E_1) \text{ sur } \mathbb{R}, \text{ alors } \widetilde{y}:t\mapsto y(t+\pi) \text{ est aussi une solution de } (E_1) \text{ sur } \mathbb{R}.}$

(b) En déduire que, pour tout $t\in\mathbb{R}$, $\begin{cases} f_0(t+\pi) = f_0(\pi)f_0(t) + f_0'(\pi)f_1(t)\\ f_1(t+\pi) = f_1(\pi)f_0(t) + f_1'(\pi)f_1(t)\end{cases}$

D'après la question III.2(a), f_0 est une solution de (E_1) sur $\mathbb{R}$,
donc $\widetilde{f_0}:t\mapsto f_0(t+\pi)$ est aussi une solution de (E_1) sur $\mathbb{R}$,
or l'ensembles des solutions de (E_1) sur $\mathbb{R}$ est $\{\lambda_0f_0+\lambda_1f_1\mid(\lambda_0,\lambda_1)\in\mathbb{R}^2\}$ (question II.1(b)),
donc

$$\exists(a,b)\in\mathbb{R}^2\ :\ \widetilde{f_0}=a.f_0+b.f_1 \tag{2}$$

En évaluant en 0 : $f_0(\pi) = a \times 1 + b \times 0$ donc $a = f_0(\pi)$.
En dérivant l'identité (2) puis en évaluant en 0 : $f_0'(\pi) = a \times 0 + b \times 1$ donc $b = f_0'(\pi)$.

$$\boxed{\text{Par conséquent, } \forall t \in \mathbb{R},\ f_0(t+\pi) = f_0(\pi).f_0(t) + f_0'(\pi).f_1(t).}$$

En reproduisant ce raisonnement pour $\widetilde{f_1} : t \mapsto f_1(t+\pi)$, on montre de même que

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ f_1(t+\pi) = f_1(\pi).f_0(t) + f_1'(\pi).f_1(t).}$$

III.3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

(a) Montrer qu'il existe une solution g de (E_1) non identiquement nulle vérifiant

$$\forall t \in \mathbb{R}\ ,\ g(t+\pi) = \lambda.g(t)$$

si et seulement si le système d'inconnues $(a,b) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} (f_0(\pi)-\lambda)a & + & f_1(\pi)b & = & 0 \\ f_0'(\pi)a & + & (f_1'(\pi)-\lambda)b & = & 0 \end{cases}$$

admet au moins une solution différente de $(0,0)$.

- Supposons qu'il existe une solution g de (E_1) non identiquement nulle vérifiant

$$\forall t \in \mathbb{R}\ ,\ g(t+\pi) = \lambda.g(t)$$

  - ⋆ g est une solution de (E_1) donc il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $g = af_0 + bf_1$.
  - ⋆ De plus si $(a,b) = (0,0)$, alors g est la fonction nulle ce qui est exclu, par conséquent, $(a,b) \neq (0,0)$.
  - ⋆ Injectons l'expression de g en fonction de f_0 et f_1 dans la relation satisfaite par g :

$$\forall t \in \mathbb{R}\ ,\ af_0(t+\pi) + bf_1(t+\pi) = \lambda af_0(t) + \lambda bf_1(t)$$

  Remplaçons $f_0(t+\pi)$ et $f_1(t+\pi)$ par leurs expressions en fonction de $f_0(t)$ et $f_1(t)$ établies dans la question III.2(b) :

$$\forall t \in \mathbb{R}\ ,\ a(f_0(\pi).f_0(t) + f_0'(\pi).f_1(t)) + b(f_1(\pi).f_0(t) + f_1'(\pi).f_1(t)) = \lambda af_0(t) + \lambda bf_1(t)$$

  donc

$$\forall t \in \mathbb{R}\ ,\ (af_0(\pi) + bf_1(\pi) - \lambda a).f_0(t) + (af_0'(\pi) + bf_1'(\pi) - \lambda b).f_1(t)) = 0$$

  Évaluons cette égalité en 0 :

$$af_0(\pi) + bf_1(\pi) - \lambda a = 0 \iff (f_0(\pi)-\lambda)a + f_1(\pi)b = 0$$

  puis dérivons-la et évaluons en π :

$$af_0'(\pi) + bf_1'(\pi) - \lambda b = 0 \iff f_0'(\pi)a + (f_1'(\pi)-\lambda)b = 0$$

  Par conséquent,

$$\boxed{\text{le système d'inconnues } (a,b) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} (f_0(\pi)-\lambda)a & + & f_1(\pi)b & = & 0 \\ f_0'(\pi)a & + & (f_1'(\pi)-\lambda)b & = & 0 \end{cases} \text{ admet au moins une solution} \neq (0,0).}$$

- Supposons que le système $\begin{cases} (f_0(\pi)-\lambda)a & + & f_1(\pi)b & = & 0 \\ f_0'(\pi)a & + & (f_1'(\pi)-\lambda)b & = & 0 \end{cases}$ admet au moins une solution $(a,b) \neq (0,0)$.
  Fixons une telle solution (a,b).
  Posons $g = af_0 + bf_1$.
  - ⋆ Par construction, $g \in \{\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 \mid (\lambda_0,\lambda_1) \in \mathbb{R}^2\}$ donc g **est une solution de** (E_1) (question II.1(b)).
  - ⋆ En évaluant g en 0, on obtient $g(0) = af_0(0) + bf_1(0) = a$.
    En évaluant g' en 0, on obtient $g'(0) = af_0'(0) + bf_1'(0) = b$.
    Puisque, par hypothèse, $(a,b) \neq (0,0)$, on a $(g(0), g'(0)) \neq (0,0)$.
    Si g est la fonction nulle, alors $(g(0), g'(0)) = (0,0)$ ce qui est une contradiction, par conséquent g **n'est pas identiquement nulle.**

$\star$ Soit $t \in \mathbb{R}$ fixé quelconque.

$$\begin{array}{rcll} g(t+\pi) & = & af_0(t+\pi) + bf_1(t+\pi) & \\ & = & a(f_0(\pi).f_0(t) + f_0'(\pi).f_1(t)) + b(f_1(\pi).f_0(t) + f_1'(\pi).f_1(t)) & \text{quest. III.2(b)} \\ & = & \underbrace{(f_0(\pi).a + f_1(\pi)b)}_{=\lambda a} f_0(t) + \underbrace{(f_0'(\pi)a + f_1'(\pi)b)}_{=\lambda b} .f_1(t) & \\ & = & \lambda a f_0(t) + \lambda b f_1(t) & \\ & = & \lambda g(t) & \end{array}$$

donc $\forall t \in \mathbb{R}\ ,\ g(t+\pi) = \lambda.g(t)$.

$\boxed{\text{Ainsi, il existe une solution } g \text{ de } (E_1) \text{ non identiquement nulle vérifiant } \forall t \in \mathbb{R}\ ,\ g(t+\pi) = \lambda.g(t).}$

(b) En déduire qu'il existe une solution g de (E_1) non identiquement nulle vérifiant

$$\forall t \in \mathbb{R}\ ,\ g(t+\pi) = \lambda.g(t)$$

si et seulement si λ est racine du trinôme $X^2 - (f_0(\pi) + f_1'(\pi))X + 1$.

- Supposons qu'il existe une solution g de (E_1) non identiquement nulle vérifiant

$$\forall t \in \mathbb{R}\ ,\ g(t+\pi) = \lambda.g(t)$$

D'après la question III.3(a) précédente, un certain système linéaire homogène 2×2 admet au moins une solution non nulle,
donc il admet au moins deux solutions distinctes (car $(0,0)$ est solution de tout système homogène),
donc le déterminant de ce système est nul d'où

$$0 = (f_0(\pi)-\lambda)(f_1'(\pi)-\lambda) - f_0'(\pi)f_1(\pi) = \lambda^2 - (f_0(\pi)+f_1'(\pi))\lambda + \underbrace{f_0(\pi)f_1'(\pi) - f_0'(\pi)f_1(\pi)}_{= W(\pi) = 1 \text{ quest. III.1}} = \lambda^2 - (f_0(\pi)+f_1'(\pi))\lambda + 1$$

$\boxed{\text{Ainsi, } \lambda \text{ est racine de } X^2 - (f_0(\pi) + f_1'(\pi))X + 1.}$

- Supposons que λ est racine de $X^2 - (f_0(\pi) + f_1'(\pi))X + 1$.
Alors $\lambda^2 - (f_0(\pi) + f_1'(\pi))\lambda + 1 = 0$,
or (voir ci-dessus), $\lambda^2 - (f_0(\pi) + f_1'(\pi))\lambda + 1$ est le déterminant du système linéaire 2×2 de la question III.3(a),
donc sa nullité signifie que ce système possède une infinité de solutions ou aucune,
or ce système est homogène et admet donc au moins $(0,0)$ comme solution,
donc il admet une infinité de solutions,
donc il admet au moins une solution différente de $(0,0)$,
ce qui implique, en utilisant le sens réciproque de l'équivalence établie dans la question III.3(a),
$\boxed{\text{qu'il existe une solution } g \text{ de } (E_1) \text{ non identiquement nulle vérifiant } \forall t \in \mathbb{R}\ ,\ g(t+\pi) = \lambda.g(t).}$

III.4. Dans cette question, on suppose que $|f_0(\pi) + f_1'(\pi)| > 2$.

(a) Justifier qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $|\lambda| > 1$ et les racines du trinôme $X^2 - (f_0(\pi) + f_1'(\pi))X + 1$ sont λ et $\dfrac{1}{\lambda}$.

Le discriminant du trinôme est $(f_0(\pi) + f_1'(\pi))^2 - 4 > 0$ car $|f_0(\pi) + f_1'(\pi)| > 2$ donc ce trinôme admet deux racines réelles distinctes.

Le produit des racines vaut 1 (coefficient constant du trinôme car il est unitaire) donc les deux racines sont inverses l'une de l'autre.

Si les deux racines ont une valeur absolue < 1 alors leur produit a une valeur absolue < 1 ce qui contredit le fait que leur produit vaut 1. Par conséquent, l'une des racines, que l'on note λ, a une valeur absolue $\geqslant 1$.

Si $|\lambda| = 1$ alors $\lambda \in \{-1, 1\}$ mais alors l'autre racine est aussi égale à λ (car leur produit vaut 1) ce qui contredit le caractère distinct des racines (discriminant $\neq 0$). Par conséquent, $|\lambda| > 1$.

$\boxed{\text{Ainsi, il existe } \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } |\lambda| > 1 \text{ de sorte que } \lambda \text{ et } \dfrac{1}{\lambda} \text{ sont les racines de } X^2 - (f_0(\pi) + f_1'(\pi))X + 1.}$

(b) Montrer qu'il existe deux solutions g_1 et g_2 non nulles de (E_1) telles que

$$\forall t \in \mathbb{R}\ ,\ g_1(t+\pi) = \lambda g_1(t) \quad \text{et} \quad g_2(t+\pi) = \frac{1}{\lambda} g_2(t)$$

Appliquons le sens réciproque le l'équivalence de la question III.3(b) pour $\lambda \leftarrow \lambda$: λ est racine de $X^2 - (f_0(\pi) + f_1'(\pi))X + 1$ donc il existe une solution g_1 de (E_1) non identiquement nulle vérifiant $\forall t \in \mathbb{R}\ ,\ g_1(t+\pi) = \lambda . g_1(t)$.

Procédons de même pour $\lambda \leftarrow \dfrac{1}{\lambda}$: $\dfrac{1}{\lambda}$ est racine de $X^2 - (f_0(\pi) + f_1'(\pi))X + 1$ donc il existe une solution g_2 de (E_1) non identiquement nulle vérifiant $\forall t \in \mathbb{R}\ ,\ g_2(t+\pi) = \lambda . g_2(t)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, il existe deux solutions } g_1 \text{ et } g_2 \text{ non nulles de } (E_1) \text{ telles que } \forall t \in \mathbb{R}\ ,\ g_1(t+\pi) = \lambda g_1(t) \text{ et } g_2(t+\pi) = \frac{1}{\lambda} g_2(t).}$$

(c) Justifier que l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (E_1) est l'ensemble des combinaisons linéaires de g_1 et g_2. On pourra commencer par montrer par l'absurde que le système linéaire d'inconnues $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ $\begin{cases} g_1(0)x & + & g_2(0)y & = & \dots \\ g_1'(0)x & + & g_2'(0)y & = & \dots \end{cases}$ a un déterminant non nul puis exploiter ce résultat.

- L'ensemble $\{\mu_1 g_1 + \mu_2 g_2 \mid (\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2\}$ est inclus dans l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (E_1) car toute combinaison linéaire de solutions d'une équation différentielle linéaire homogène est encore solution de la même équation différentielle linéaire homogène (voir la question II.1(a)).
- Considérons le système linéaire 2×2 d'inconnues $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} g_1(0)x & + & g_2(0)y & = & 1 \\ g_1'(0)x & + & g_2'(0)y & = & 0 \end{cases}$$

Supposons que le déterminant de ce système soit nul, alors cela signifie que les deux colonnes de coefficients du système sont proportionnels :

$$\exists \alpha \in \mathbb{R}\ :\ \begin{pmatrix} g_1(0) \\ g_1'(0) \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} g_2(0) \\ g_2'(0) \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \exists \beta \in \mathbb{R}\ :\ \beta \begin{pmatrix} g_1(0) \\ g_1'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_2(0) \\ g_2'(0) \end{pmatrix}$$

— Dans le cas $\begin{pmatrix} g_1(0) \\ g_1'(0) \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} g_2(0) \\ g_2'(0) \end{pmatrix}$, la fonction αg_2 est solution du même problème de Cauchy que g_1 donc, par unicité $\alpha g_2 = g_1$. Or $\forall t \in \mathbb{R}$, $g_2(t+\pi) = \lambda^{-1} g_2(t)$ donc, en multipliant par α,

$$\forall t \in \mathbb{R}\ ,\ g_1(t+\pi) = \alpha g_2(t+\pi) = \alpha \lambda^{-1} g_2(t) = \lambda^{-1} g_1(t)$$

Par ailleurs, $\forall t \in \mathbb{R}$, $g_1(t+\pi) = \lambda g_1(t)$ donc

$$\forall t \in \mathbb{R}\ ,\ \lambda g_1(t) = \lambda^{-1} g_1(t)$$

et en évaluant en $t_1 \in \mathbb{R}$ tel que $g_1(t_1) \neq 0$ (ce qui est possible car g_1 n'est pas identiquement nulle par construction), on obtient

$$\lambda g_1(t_1) = \lambda^{-1} g_1(t_1) \text{ donc } \lambda = \lambda^{-1}$$

ce qui est une contradiction car $\lambda \neq \lambda^{-1}$ (voir question III.4(a)).

— Dans le cas $\beta \begin{pmatrix} g_1(0) \\ g_1'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_2(0) \\ g_2'(0) \end{pmatrix}$, on obtient une contradiction de la même façon que dans le premier cas en échangeant les rôles de g_1 et g_2, de α et β.

Par conséquent, le déterminant du système est non nul donc ce système admet une unique solution $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Observons alors que la fonction $x_0 g_1 + y_0 g_2$ est solution du même problème de Cauchy que f_0 donc, par unicité, $f_0 = x_0 g_1 + y_0 g_2$.

En considérant de même le système linéaire 2×2 d'inconnues $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} g_1(0)x & + & g_2(0)y & = & 0 \\ g_1'(0)x & + & g_2'(0)y & = & 1 \end{cases}$$

qui admet lui aussi une unique solution $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$, on montre par un argument identique que $f_1 = x_1 g_1 + y_1 g_2$.
Toute solution de (E_1) s'écrit comme une combinaison linéaire de f_0 et f_1 (voir la question II.1(b)), or f_0 et f_1 s'écrivent comme des combinaison linéaire de g_1 et g_2 donc toute solution de (E_1) s'écrit comme une combinaison linéaire de g_1 et g_2.

$$\boxed{\text{Ainsi, } \mathcal{S} \text{ est l'ensemble des combinaisons linéaires de } g_1 \text{ et } g_2.}$$

(d) Justifier l'existence de $t_1 \in \mathbb{R}$ tel que $g_1(t_1) \neq 0$ puis montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} |g_1(t_1 + n\pi)| = +\infty$.
Montrer de même qu'il existe une suite de réels (u_n) telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} |g_2(u_n)| = +\infty$.
On admet que $\lim\limits_{t \to -\infty} g_1(t) = 0 = \lim\limits_{t \to +\infty} g_2(t)$.

- $\star$ g_1 n'est pas la fonction identiquement nulle, or

$$non(\forall t \in \mathbb{R} \ , \ g_1(t) = 0) \iff \exists t_1 \in \mathbb{R} \ : \ g_1(t_1) \neq 0$$

donc $\boxed{\text{il existe } t_1 \in \mathbb{R} \text{ tel que } g_1(t_1) \neq 0}$.

- $\star$ Compte tenu de la relation fonctionnelle $\forall t \in \mathbb{R} \ , \ g_1(t + \pi) = \lambda g_1(t)$, une récurrence permet de montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N} \ , \ g_1(t_1 + n\pi) = \lambda^n g_1(t_1)$$

donc

$$\forall n \in \mathbb{N} \ , \ |g_1(t_1 + n\pi)| = \underbrace{|\lambda|^n}_{\substack{\xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty \\ \text{car } |\lambda| > 1}} \underbrace{|g_1(t_1)|}_{> 0} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } \lim_{n \to +\infty} |g_1(t_1 + n\pi)| = +\infty.}$$

- $\star$ g_2 n'est pas la fonction identiquement nulle, or

$$non(\forall t \in \mathbb{R} \ , \ g_2(t) = 0) \iff \exists t_2 \in \mathbb{R} \ : \ g_2(t_2) \neq 0$$

donc $\boxed{\text{il existe } t_2 \in \mathbb{R} \text{ tel que } g_2(t_2) \neq 0}$.

- $\star$ Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = t_2 - n\pi$.
Compte renu de la relation fonctionnelle $\forall t \in \mathbb{R} \ , \ g_2(t + \pi) = \lambda^{-1} g_2(t)$, une récurrence permet de montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N} \ , \ g_2(u_n) = g_2(t_2 - n\pi) = \lambda^n g_2(t_2)$$

donc

$$\forall n \in \mathbb{N} \ , \ |g_2(u_n)| = |g_2(t_2 - n\pi)| = \underbrace{|\lambda|^n}_{\substack{\xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty \\ \text{car } |\lambda| > 1}} \underbrace{|g_2(t_2)|}_{> 0} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } \lim_{n \to +\infty} |g_2(u_n)| = +\infty.}$$

(e) Conclure que toute solution h non nulle de (E_1) n'est pas bornée sur $\mathbb{R}$.

Soit h une solution non nulle de (E_1) sur $\mathbb{R}$.
Par l'absurde, supposons que h est bornée : il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}$, $|h(t)| \leqslant M$.
h est une solution de (E_1) donc, d'après la question III.4(c), il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $h = af_0 + bf_1$.

- $\star$ Si $a \neq 0$, utilisons que $\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2$, $|u + v| \geqslant |u| - |v|$,

$$\forall n \in \mathbb{N} \ , \ |h(t_1 + n\pi)| = |ag_1(t_1 + n\pi) + bg_2(t_1 + n\pi)| \geqslant \underbrace{|a|}_{> 0} \underbrace{|g(t_1 + n\pi)|}_{\substack{\xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty \\ \text{quest. précédente}}} - |b| \underbrace{|g_2(t_1 + n\pi)|}_{\substack{\xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \\ \text{car } \lim\limits_{t \to +\infty} g_2(t) = 0}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$$

donc le théorème de divergence par minoration donne $\lim\limits_{n \to +\infty} |h(t_1 + n\pi)| = +\infty$ ce qui contreduit son caractère borné.

⋆ Sinon, $a = 0$, or puisque h est non nulle, $(a, b) \neq (0, 0)$ donc $b \neq 0$ ce qui permet d'écrire

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ |h(u_n)| = |0 \times g_1(u_n) + bg_2(u_n)| = \underbrace{|b|}_{>0} \underbrace{|g_2(u_n)|}_{\substack{\longrightarrow \\ n\to+\infty} +\infty \text{ quest. précédente}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

donc le théorème de divergence par minoration donne $\lim\limits_{n\to+\infty} |h(u_n)| = +\infty$ ce qui contreduit son caractère borné.

$\boxed{\text{Ainsi, toute solution } h \text{ non nulle de } (E_1) \text{ n'est pas bornée sur } \mathbb{R}.}$

III.5. Dans cette question, on suppose que $|f_0(\pi) + f_1'(\pi)| = 2$.

(a) Montrer que, si $f_0(\pi) + f_1'(\pi) = 2$, alors il existe une solution non identiquement nulle de (E_1) qui est π-périodique.

Si $f_0(\pi) + f_1'(\pi) = 2$, le trinôme $X^2 - (f_0(\pi) + f_1'(\pi))X + 1$ devient $X^2 - 2X + 1 = (X - 1)^2$, il admet donc 1 comme racine ce qui permet d'appliquer le sens réciproque de l'équivalence de la question III.3(b) pour $\lambda \leftarrow 1$: 1 est racine de $X^2 - (f_0(\pi) + f_1'(\pi))X + 1$ donc il existe une solution g de (E_1) non identiquement nulle vérifiant $\forall t \in \mathbb{R}\ ,\ g(t+\pi) = 1 \times g(t) = g(t)$, ce qui signifie exactement,

$\boxed{\text{il existe une solution non identiquement nulle de } (E_1) \text{ qui est } \pi\text{-périodique.}}$

(b) Montrer que, si $f_0(\pi) + f_1'(\pi) = -2$, alors il n'existe aucune solution non identiquement nulle de (E_1) qui est π-périodique et il existe une solution non identiquement nulle de (E_1) qui est 2π périodique.

⋆ Si $f_0(\pi) + f_1'(\pi) = -2$, le trinôme $X^2 - (f_0(\pi) + f_1'(\pi))X + 1$ devient $X^2 + 2X + 1 = (X + 1)^2$, il admet donc -1 comme racine ce qui permet d'appliquer le sens réciproque de l'équivalence de la question III.3(b) pour $\lambda \leftarrow -1$: -1 est racine de $X^2 - (f_0(\pi) + f_1'(\pi))X + 1$ donc il existe une solution g de (E_1) non identiquement nulle vérifiant $\forall t \in \mathbb{R}\ ,\ g(t + \pi) = (-1) \times g(t) = -g(t)$, donc

$$\forall t \in \mathbb{R}\ ,\ g(t + 2\pi) = g(t + \pi + \pi) = -g(t + \pi) = -(-g(t)) = g(t)$$

$\boxed{\text{donc il existe une solution non identiquement nulle de } (E_1) \text{ qui est } 2\pi\text{-périodique.}}$

⋆ Par l'absurde, supposons qu'il existe une solution h non identiquement nulle de (E_1) qui est π-périodique.

Alors nous pouvons appliquer le sens direct de l'équivalence de la question III.3(b) pour $\lambda \leftarrow 1$: h est une solution non nulle satisfaisant $\forall t \in \mathbb{R}\ ,\ h(t + \pi) = 1 \times h(t)$ donc 1 est racine du trinôme $X^2 - (f_0(\pi) + f_1'(\pi))X + 1 = (X + 1)^2$ ce qui est une contradiction.

$\boxed{\text{Ainsi, il n'existe aucune solution non identiquement nulle de } (E_1) \text{ qui est } \pi\text{-périodique.}}$
