

## 10. Groupes

### Loi de composition interne

#### N° 171

Soit  $E$  un ensemble non vide.

1. Quelles sont les propriétés des LCI  $\cap$  et  $\cup$  sur  $\mathcal{P}(E)$  ?
2. Quelles sont les propriétés de la LCI  $\Delta$  (différence symétrique) sur  $\mathcal{P}(E)$  ?  
On pourra calculer, pour tout  $A \in \mathcal{P}(E)$ ,  $A\Delta A$ ,  $A\Delta\emptyset$  et  $A\Delta E$ .  
Tout élément est-il symétrisable pour cette loi ?

#### N° 172

Soit  $E = \{a, b, c\}$  un ensemble muni d'une LCI  $*$  définie par la table suivante :

$\diagup$	$a$	$b$	$c$
$a$	$a$	$c$	$b$
$b$	$c$	$b$	$a$
$c$	$b$	$a$	$c$

1. Quelles sont les propriétés de  $*$  ?
2. Résoudre les équations d'inconnue  $x \in E$  suivantes :  
( $E_1$ )  $x * b = c$  - ( $E_2$ )  $(b * x) * a = c$  - ( $E_3$ )  $x * x = a$  -  
( $E_4$ )  $x * x = x$

#### N° 173

Soit  $E = \{a, b, c, d, e, f\}$  l'ensemble des sommets d'un hexagone régulier de centre  $O$ . On définit une LCI  $*$  sur  $E$  en posant :  
 $\forall x, y \in E$ ,  $x * y = z$  où  $z$  est le sommet image de  $x$  dans la réflexion d'axe  $(Oy)$ .

1. Dresser la table de  $*$ .
2. Quelles sont les propriétés de la LCI  $*$  ?
3. Résoudre les équations d'inconnue  $x \in E$  suivantes :  
( $E_1$ )  $a * x = e$  - ( $E_2$ )  $x * a = e$  - ( $E_3$ )  $x * x = a$  -  
( $E_4$ )  $x * x = x$  - ( $E_5$ )  $(e * x) * a = c$  - ( $E_6$ )  $e * (x * a) = c$

### Exemples de groupes

#### N° 174

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $G = \{T \in \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R}, f(x+T) = f(x)\}$  l'ensemble des périodes de  $f$ . Montrer que  $(G, +)$  est un sous-groupe de  $(\mathbb{R}, +)$ .

#### N° 175

1. Montrer que  $(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, \star)$  est un groupe où  $\star$  est définie par  $(x, y) \star (x', y') = (xx', \frac{y'}{x} + x'y)$ .
2. Trouver une application  $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$  dont le graphe (i.e.  $\{(x, f(x)); x \in \mathbb{R}^*\}$ ) soit un sous-groupe de  $(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, \star)$  (on montrera que  $f(xx') = \frac{f(x')}{x} + x'f(x)$  et l'on essaiera d'obtenir  $f(x)$  en fonction de  $x$  sachant que  $f(xx') = f(x'x)$ ...).
3. Trouver d'autres sous-groupes.

#### N° 176

Sur l'intervalle  $] -1, 1[$ , à partir de  $+$  et  $\times$  de  $\mathbb{R}$ , on définit une LCI, notée  $*$  en posant pour tout  $a, b \in ] -1, 1[$ ,  $a * b = \frac{a+b}{1-a \times b}$ .

1. Montrer que  $(] -1, 1[, *)$  est un groupe abélien
2. En exploitant  $\ln$ , montrer que  $(] -1, 1[, *)$  est isomorphe à  $(\mathbb{R}, +)$

### Propriétés classiques des groupes

#### N° 177

Soit  $(G, *)$  un groupe. Montrer que l'application  $\Psi : G \rightarrow G$ ,  $g \mapsto g^{-1}$  est une bijection.  
 $\Psi$  est-il un morphisme de groupe ?

#### N° 178

Soit  $G$  un groupe. Pour tout  $a \in G$ , on note  $\varphi_a : G \rightarrow G$ ,  $x \mapsto axa^{-1}$ .

1. Calculer  $\varphi_a \circ \varphi_b$ .
2. Montrer que, pour tout  $a \in G$ ,  $\varphi_a$  est un morphisme bijective de  $G$  sur  $G$  (automorphisme)
3. Montrer que  $(\{\varphi_a, a \in G\}, \circ)$  est un groupe ?

#### N° 179

Soit  $E$  un ensemble et  $(S(E), \circ)$ , le groupe des permutations (=bijections) de  $E$ . Fixons  $f_0 \in S(E)$ .

1. Montrer que,  $\mathcal{C}_{f_0} = \{f \in S(E) \mid f \circ f_0 = f_0 \circ f\}$  est un sous-groupe de  $(S(E), \circ)$ .
2. Soit  $\varphi : S(E) \rightarrow S(E)$ ,  $f \mapsto f_0^{-1} \circ f \circ f_0$ . Montrer que  $\varphi$  est un automorphisme de groupes.  
Préciser le groupe  $\varphi(\mathcal{C}_{f_0})$ .

#### N° 180

1. Soit  $a \in \mathbb{Z}$ . Montrer que  $a\mathbb{Z}$  est un sous-groupe de  $(\mathbb{Z}, +)$ .
2. Soit  $G$  un sous-groupe de  $(\mathbb{Z}, +)$ ,  $G \neq \{0\}$ .  
Justifier que  $G \cap \mathbb{N}^*$  a un plus petit élément  $a > 0$ .  
Montrer que  $G = a\mathbb{Z}$  (utiliser la division euclidienne).

### Problème

#### N° 181

##### Parité

Soit  $(G, *)$  un groupe de cardinal fini et pair.

Le but est de prouver qu'il existe au moins un élément non trivial d'ordre 2 (i.e.  $g \in G$  tel que  $g^2 = e$  et  $g \neq e$ ).

1. Soit  $E = \{g \in G \mid g^2 \neq e\}$ .  
Montrer que si  $g \in E$ , alors  $g^{-1} \in E$ .
2. En déduire que le cardinal de  $E$  est pair. Conclure.

#### N° 182

##### Sous-groupes commutants

Soient  $H$  et  $K$  des sous-groupes du groupe  $(G, \star)$ . On pose  $HK = \{h \star k \mid h \in H, k \in K\}$ .

1. Montrer que  $HK$  est un sous-groupe de  $G$  si et seulement si  $HK = KH$ .  
On pose  $G = S_{[1,3]}$  (ensemble des permutations de  $[1, 3]$ ),  
 $H = \{Id, \tau_{1,2}\}$ ,  $K = \{Id, \tau_{1,3}\}$  où  $\tau_{a,b}$  désigne la bijection qui échange  $a$  et  $b$  et laisse le troisième élément fixe.  
Ecrire  $G$  et  $HK$ .  $HK$  est-il un sous-groupe de  $(G, \circ)$  ?
2. On suppose que :  $\forall h \in H, \forall g \in G, hgh^{-1} \in H$  (on dit que  $H$  est distingué dans  $G$ ). Montrer que  $HK$  est un sous-groupe de  $G$ .

#### N° 183

##### Groupe monogène

On pourra exploiter le théorème de LAGRANGE (exercice précédent) : si  $H$  sous-groupe de  $G$ , fini alors  $\text{card}(H) \mid \text{card}(G)$ .

On dit qu'un groupe  $(G, \times)$  est monogène, si il existe  $a \in G$ , tel que  $G = \langle a \rangle := \{a^m, m \in \mathbb{Z}\}$ .

On dit qu'il est cyclique, s'il est monogène et fini.

Un élément  $a$  est dit d'ordre  $p$  si  $\langle a \rangle$  est fini de cardinal  $p$ .

1. Montrer que tout groupe monogène est abélien.
2. Soit  $a$ , un élément d'ordre  $p$ .  
Montrer que  $p = \min\{k \in \mathbb{N} \mid a^k = e_G\}$
3. Montrer que si  $G$  est fini de cardinal  $n$  et  $a$  est d'ordre de  $p$ , alors  $p|n$ . Montrer l'équivalence :  $a^q = e \iff p|q$
4. Montrer que si  $G$  est fini de cardinal  $p$  premier, alors  $G$  est cyclique engendré par tout élément différent de l'élément neutre.
5. Montrer que si  $G$  est fini de cardinal  $n$  et  $G = \langle a \rangle$ , alors on a l'équivalence

$$G = \langle a^k \rangle \iff k \wedge n = 1$$

### N° 184

#### Groupe opérant sur un ensemble

On dit qu'un groupe  $(G, \star)$  opère sur un ensemble  $X$ , s'il existe une application  $G \times X \rightarrow X$   $(s, x) \mapsto s \cdot x$  vérifiant :

- $\forall s, t \in G, \forall x \in X, s \cdot (t \cdot x) = (s \star t) \cdot x$
- $\forall x \in X, e \cdot x = x$ .

Enfin, pour tout  $x \in X$ , on note  $O(x) = \{s \cdot x, s \in G\}$  (orbite ou trajectoire de  $x$  sous l'action de  $G$ ).

1. Montrer que  $(S_n, \circ)$  opère sur  $X = \mathbb{N}_n$
2. On note, pour tout  $x \in X$ ,  $S_x = \{s \in G \mid s \cdot x = x\}$  (stabilisateur de  $x$ ).  
Montrer que, pour tout  $x \in X$ ,  $S_x$  est un sous-groupe de  $G$
3. On suppose que  $G$  est fini. Démontrer que pour tout  $x \in X$ ,  $\text{Card}(G) = \text{Card}(O(x)) \times \text{Card}(S_x)$
4. On suppose que  $G$  et  $X$  sont finis.  
Déduire de la question précédente, que si  $\Theta$  contient exactement un représentant de chacune des orbites, alors

$$\text{Card}(X) = \text{Card}(G) \sum_{x \in \Theta} \frac{1}{\text{Card}(S_x)}$$

5. Application : en faisant opérer  $G$  sur lui-même par les automorphismes intérieurs (exercice précédent), montrer qu'il existe une famille  $(H_i)_{i \in I}$  finie de sous-groupe strict de  $G$  ( $\neq \{e\}$  et  $\neq G$ ) telle que

$$\text{Card}(G) = \text{Card}(Z(X)) + \sum_{i \in I} \frac{\text{Card}(G)}{\text{Card}(S_x)}$$

### N° 185

#### Caractérisation des sous-groupes de $(\mathbb{R}, +)$

1. Soit  $a \in \mathbb{R}_+^*$ . On pose  $a\mathbb{Z} = \{ap; p \in \mathbb{Z}\}$ .  
Montrer que  $a\mathbb{Z}$  est un sous-groupe de  $(\mathbb{R}, +)$ .  
On considère désormais un sous-groupe  $G$  de  $(\mathbb{R}, +)$ ,  $G \neq \{0\}$ .
2. Justifier que  $G \cap \mathbb{R}_+^*$  admet une borne inférieure que l'on notera  $m$ .
3. On suppose dans cette question que  $m > 0$ .
  - (a) Supposons que  $]m, 2m[ \cap G \neq \emptyset$ .  
En appliquant la caractérisation de la borne inférieure, montrer qu'il existe  $(x, x') \in G^2$  tel que  $m \leq x < x' < 2m$ . En considérant  $x' - x$ , aboutir à une contradiction.  
En déduire que  $]m, 2m[ \cap G = \{m\}$  puis que  $m\mathbb{Z} \subset G$ .
  - (b) Montrer que  $G = m\mathbb{Z}$ .

4. On suppose maintenant que  $m = 0$ . Soit  $(c, d) \in \mathbb{R}^2$ ,  $c < d$ .
  - (a) Justifier qu'il existe  $x \in G$  tel que  $0 < x < d - c$ .
  - (b) En déduire que  $]c, d[ \cap G \neq \emptyset$ .
5. Déduire de ce qui précède que tout sous-groupe de  $(\mathbb{R}, +)$  est soit dense dans  $\mathbb{R}$ , soit de la forme  $a\mathbb{Z}$  avec  $a \in \mathbb{R}^+$ .
6. Application : En introduisant un certain sous-groupe de  $\mathbb{R}$ , montrer que  $\{\cos n; n \in \mathbb{Z}\}$  est dense dans  $[-1, 1]$ .