14. Fonctions convexes

Utilisation de la convexité

N° 266
Montrer qu'un minimum local d'une fonction convexe est également un minimum global.

N° 267
Montrer pour n réels $x_1, x_2, \dots x_n$: $(x_1 + \dots x_n)^2 \leqslant n(x_1^2 + \dots + x_n^2)$.

N° 268
Soient $a, b > 0$ et $t \in [0,1]$, montrer que $a^t b^{1-t} \leqslant ta + (1-t)b$.

N° 269
Soient $p, q \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, montrer que pour tout $a, b > 0$: $\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geqslant ab$.

N° 270
Montrer l'inégalité arithmético-géométrique :

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

($a_i \geqslant 0$) en exploitant la concavité du logarihtme.

Régularité des fonctions convexes

N° 271
Montrer qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe bornée est constante.

N° 272
Soit f convexe sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$. Montrer que f est positive.

(Nouveaux) Critères de convexité

N° 273
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que si f est convexe, alors pour $a \in \mathbb{R}$, $\{x \mid f(x) \leqslant a\}$ est un intervalle.
2. Réciproquement. A-t-on ?
$\big(\forall\ a \in \mathbb{R}, \{x \mid f(x) \leqslant a\} \text{ est un intervalle}\big) \Rightarrow f$ est convexe ?

N° 274
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $x \in I$, $\frac{1}{x} \in I$.
Soit $f : I \to I$ continue sur I. Montrer que $F : x \to x f(x)$ est convexe sur I ssi $G : x \mapsto f(\frac{1}{x})$ est convexe sur I.

Inégalité intégrales

N° 275
Soit f une fonction convexe sur $\mathbb{R}$ et $h > 0$.
Etudier la convexité de $F : x \mapsto \dfrac{1}{2h} \displaystyle\int_{x-2h}^{x+2h} f(t)\mathrm{d}t$.
On peut démontrer que F' est croissante

N° 276
Quelques inégalités intégrales.

1. Soit f convexe de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0, 2\pi]$. Montrer que $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\cos x \mathrm{d}x \geqslant 0$.
2. Soit f convexe sur $[0, 2\pi]$. Démontrer que $g : [0,\pi] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) - f(x+\pi)$ est décroissante sur $[0,\pi]$.
3. Soit g continue et décroissante sur $[0,\pi]$. Démontrer que $\displaystyle\int_0^{\pi} g(x)\cos x \mathrm{d}x \geqslant 0$.
4. Soit f continue et convexe sur $[0, 2\pi]$. Démontrer que $\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\cos x \mathrm{d}x \geqslant 0$.

3 : Montrer que $I = \int_0^{\pi} /2(g(\pi/2 - x) - g(\pi/2 + x))\cos(\pi/2 - x)$

Problème

N° 277
Inégalité de Snell-Descartes
Soit $h > 0$.

1. Démontrer que la fonction $f_h : x \mapsto \sqrt{x^2 + h^2}$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
2. Démontrer que pour tout réel $a \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto f_h(a - x)$ est strictement convexe sur $\mathbb{R}$.
3. Application : démontrer les lois de Snell-Descartes (dont l'unicité de la solution) à partir du principe de Fermat.

On rappelle que l'indice d'un milieu n_i donne la vitesse de la lumière dans le milieu : $v_i = \frac{c}{n_i}$.

N° 278
Approximation intégrale
Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue, convexe et dérivable. Montrer que

$$0 \leqslant \frac{f(0) + f(1)}{2} - \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t \leqslant \frac{f'(1) - f'(0)}{8}.$$

N° 279
Inégalité de Hölder
Soient $p, q > 0$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
1. En exploitant la concavité de $\ln$, montrer que pour tout $a, b \geqslant 0$, $\sqrt[p]{a}\sqrt[q]{b} \leqslant \frac{a}{p} + \frac{b}{q}$.
2. Soient $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}_+$ déduire :

$$\frac{a_1 b_1}{\sqrt[p]{a_1^p + a_2^p}\sqrt[q]{b_1^q + b_2^q}} \leqslant \frac{1}{p}\frac{a_1^p}{a_1^p + a_2^p} + \frac{1}{q}\frac{b_1^q}{b_1^q + b_2^q}.$$

3. Conclure que $a_1 b_1 + a_2 b_2 \leqslant \sqrt[p]{a_1^p + a_2^p}\sqrt[q]{b_1^q + b_2^q}$.
4. Plus généralement, montrer pour $a_1, a_2, \dots a_n, b_1, \dots b_n \geqslant 0$,

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leqslant \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n a_i^p}\sqrt[q]{\sum_{i=1}^n b_i^q}.$$

N° 280
Inégalité de Pompeiu
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe et $x < y < z$ trois réels. Montrer que

$$\frac{2}{3}\left(f(\tfrac{x+y}{2}) + f(\tfrac{y+z}{2}) + f(\tfrac{z+x}{2})\right) \leqslant \frac{1}{3}\big(f(x) + f(y) + f(z)\big) + f\left(\tfrac{x+y+z}{3}\right).$$