15. Divisibilité et congruence sur $\mathbb{Z}$. PGCD et PPCM

Divisibilité. Division euclidienne

N° 281

Soit n un entier impair. Montrer que 24 divise $n(n^2 - 1)$

N° 282

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{N}$. Montrer que $a^2 - a$ divise $a^n - a$ dans $\mathbb{Z}$

N° 283

Montrer que $\forall n \in \mathbb{Z}, \frac{n^7}{7} + \frac{n^5}{5} + \frac{23n}{35} \in \mathbb{Z}$.

N° 284

Soit $a \in \mathbb{N}, a \geq 2$. On pose, pour $n > 0, f(n) = a^n - 1$.
On suppose $m \geq n$. Montrer que $f(m) \wedge f(n) = f(n) \wedge f(r)$ où r est le reste dans la division euclidienne de m par n . En déduire que $f(m) \wedge f(n) = f(m \wedge n)$.

Relation de Bézout

N° 285

Soient a et b des entiers strictement positifs, premiers entre eux. Montrer qu'il existe un et un seul couple d'entiers (c, d) tels que $ac + bd = 1$ et $0 \leq c < b$ et que les autres couples de Bezout sont les couples $(c + kb, d - ka), k \in \mathbb{Z}$

N° 286

Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $13x - 8y = 1$.

En déduire les triplets $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ tel que $\begin{cases} 5x + y - 2z = 0 \\ 8x - 9y + 2z = 1 \end{cases}$

N° 287

Soit $\cup_n$ l'ensemble des racines n -ièmes de l'unité. Montrer que $\cup_n \cap \cup_p = \cup_{n \wedge p}$ et que $\cup_n \cup \cup_p \subset \cup_{n \vee p}$. Y a-t-il égalité ?

Équation diophantienne

N° 288

Déterminer le nombre de couples $(a, b) \in \mathbb{N}^{*2}$ tels que $a + b = 360$ et $a \wedge b = 18$

N° 289

Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ les équations suivantes :

$$x^2 - 3y^2 = 17 \quad ; \quad x^2 + y^2 - 2x + 4y - 5 = 0$$

Congruences

N° 290

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 11 \mid 3^{5n} + 5^{5n+1} + 4^{5n+2}$

N° 291

On note $d(n)$, la somme des chiffres d'un entier n

- Démontrer le critère de divisibilité par 3 et par 9(en exploitant $d(n)$).
- Résoudre les équations $n + d(n) + d(d(n)) = 2017$ et $n + d(n) + d(d(n)) = 2016$.

N° 292

Le but : trouver un critère de divisibilité par 7.

- Montrer que $a \in \mathbb{Z}$ est un multiple de 7 ssi $2a \equiv 0[7]$
- Soit $n \in \mathbb{Z}$, on écrit $n = 10a + b$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in [0, 9]$. Montrer que n est divisible par 7 si et seulement si $a - 2b$ est divisible par 7.
- Donner un critère de divisibilité par 7, l'appliquer pour déterminer si 1141 est divisible par 7

N° 293

Quel est le chiffre des unités dans l'écriture décimale de $a = 7^{3^{8^4}}$?

N° 294

Montrer sans utiliser de calculatrice et à l'aide des congruences, que 1295377 n'est pas un carré parfait.

N° 295

On considère la suite numérique (u_n) définie par $u_0 = 14$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 5u_n - 6$.

- Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4 .
- Quelle conjecture peut-on émettre concernant les deux derniers chiffres de u_n ?
- Montrer que pour tout entier $n, u_{n+2} \equiv u_n[4]$.
- En déduire que, pour tout entier naturel $k, u_{2k+1} \equiv 0[4]$ et $u_{2k} \equiv 2[4]$.
- Montrer par récurrence que, pour $n \in \mathbb{N}, 2u_n = 5^{n+2} + 3$.
- Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}, 5^{n+2} \equiv 25[100]$.
- En déduire que, pour $n \in \mathbb{N}, 2u_n \equiv 28[100]$.
- Déterminer les deux derniers chiffres dans l'écriture décimale de u_n

Problèmes

N° 296

Restes chinois.

Soient n entiers $(m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{N}^{*n}$ premiers deux à deux entre eux. On pose $M = m_1 \dots m_n$ et $\forall i \in [1, n], M_i = \frac{M}{m_i}$.

- Montrer que $\forall i \in [1, n], m_i \wedge M_i = 1$ et en déduire qu'il existe $\mu_i \in \mathbb{Z}$ tel que $M_i \mu_i \equiv 1[m_i]$.
- Soient n entiers $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$. On pose $x = \sum_{j=1}^n a_j M_j \mu_j$.
Montrer que $\forall i \in [1, n], x \equiv a_i[m_i]$.
- Trouver un entier $x \in \mathbb{N}$ tel que $\begin{cases} x \equiv 3[5] \\ x \equiv 1[6] \\ x \equiv 2[7] \end{cases}$
- Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système :

$$(S) \begin{cases} 5x \equiv 7[11] \\ 7x \equiv 11[5] \\ 11x \equiv 5[7] \end{cases}$$

N° 297

Résidus quadratiques

- Ecrire la table des carrés modulo $N = 7$
- Montrer que pour tout $a \in [1, 6]$ $x^2 = a$ admet exactement 0 ou 2 racines. Quel lien entre elles ?
- Calculer a^3 , pour tout $a \in [1, 6]$. Quel rapport avec la question précédente ?
- Reprendre les questions avec $N = 9$ puis $N = p$, un nombre premier.