16. Nombres premiers

Nombres premiers

N° 298
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe une suite de n entiers naturels consécutifs ne comprenant aucun nombre premier.
N° 299
Trouver tous les nombres premiers p tels que p^2+2 soit aussi premier.
N° 300
Si $n \in \mathbb{N}$ et p est un nombre premier, montrer que $v_p(n!) = \sum_{k\geqslant 1} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$.

Suite des nombres premiers

N° 301
Quel est le nombre de diviseurs de $n = p^\alpha q^\beta$, avec p et q entiers premiers ?
En déduire le nombre de diviseurs de 360, puis de 17500, le nombre de diviseurs communs, le $PGCD$ et le $PPCM$ de ces deux nombres.

N° 302
Soit p_n le n-ième nombre premier.
On pose $q_n = 2\times 3\times 5\times\cdots\times p_n+1$. Montrer que $p_{n+1} \leq q_n$ et en déduire que, pour tout n, $p_n < 2^{2^n}$.
$\pi(x)$ désigne le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à x.
Montrer que pour $n \geq 4$ et $e^{e^{n-1}} < x \leq e^{e^n}$ on a $\pi(x) \geqslant n$.
(on donne $e^4 \simeq 54.5, e^3 \simeq 20.08, e^2 \simeq 7.32$). Montrer que pour tout x réel, $x \geqslant 2$ on a $\pi(x) \geqslant \ln(\ln x)$.
N° 303
Soit p un nombre premier et $q = 2^2\times 3\times 5\times\cdots\times p-1$. Montrer que q est divisible par un nombre premier congru à 3 modulo 4.
En déduire qu'il y a une infinité de nombres premiers congrus à 3 modulo 4.
N° 304
On note $\mathscr{P}' = \{m \in \mathscr{P} \mid \exists\, n \in \mathbb{N}, m = 4n+1\}$. On suppose $\mathscr{P}'$ fini et $\mathscr{P}' = \{p_1, p_2, \dots p_r\}$.
On note $N = (2p_1p_2\cdots p_r)^2+1$.

1. Si q est un facteur premier de N de la forme $4n+3$, montrer que $(2p_1p_2\cdots p_r)^{q-1} \equiv -1[q]$
2. Conclure que $\mathscr{P}'$ n'est pas fini.

Fermat

N° 305
Montrer que $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\frac{n^7}{7}+\frac{n^5}{5}+\frac{23n}{35} \in \mathbb{Z}$.
N° 306
On pose $M_n = 2^n-1$.

1. Montrer que si M_n est premier, n est premier.
2. Montrer que si p et q sont premiers et si $q|M_p$, alors q est de la forme $2kp+1$
3. On pose $G_n = 2^n+1$. Montrer que que si G_n est premier, n est de la forme 2^k.
4. On pose $H_k = G_{2^k}$. Montrer que, si $k \neq \ell$, alors H_k et H_ℓ sont premiers entre eux.
5. Montrer que H_k divise $2^{H_k}-2$.

Problèmes

N° 307
Nombres abondants
On dit qu'un nombre n est abondant si $\sigma(n) \geqslant 2n$.
Montrer que si n est abondant et impair, alors il possède au moins trois facteurs premiers. On rappelle $\sigma(n) = \sum_{d|n} d$
N° 308
Fonction de Liouville
On désigne par $\Omega(n)$ le nombres de facteurs premiers de n, comptés avec leur ordre de multiplicités : $\Omega(n) = \sum_{p\in\mathscr{P}} v_p(n)$.
La fonction λ de LIOUVILLE est définie par $\lambda(n) = (-1)^{\Omega(n)}$.
Montrer que λ est complètement multiplicative et que $\lambda * 1(d) = [d$ est un carré$]$.
N° 309
Cribles
A. Crible de Poincaré
Soit E un ensemble fini. On note $A, B, A_1, \dots A_n$ des parties de E.

1. Montrer que $1-\mathbb{1}_{A\cup B} = (1-\mathbb{1}_A)(1-\mathbb{1}_B)$.
2. Montrer que $\mathbb{1}_{\cup_{i=1}^n A_i} = 1-\prod_{i=1}^n (1-\mathbb{1}_{A_i})$
3. Développer ce dernier facteurs, en déduire la formule du crible de Poincaré :

$$\#\Big(\bigcup_{k=1}^n A_k\Big) = \sum_{h=1}^n (-1)^{h-1} \sum_{\{i_1\dots i_h\}\in\binom{\mathbb{N}_n}{h}} \#(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_h})$$

B. Crible d'Erathosténe

1. écrire le crible pour les nombres de 2 à 30

On note $\forall\ k \in \mathbb{N}$, $E_k = \{n \in \mathbb{N} \mid k \text{ divise } n\}$.
Ainsi, E_2 est l'ensemble des nombres pairs, E_3, l'ensemble des nombres divisibles par 3. . .

2. En utilisant la formule du crible de Poincaré, calculer le nombre de nombre qu'il reste dans l'ensemble $[\![2;100]\!]$ une fois que l'on a barré les multiples de 2, 3, 5 et 7.

N° 310
Nombre de représentations en somme de 2 carrés
Pour tout entier n, on note $r(n) = \mathrm{Card}\{(A,B) \in \mathbb{Z}^2 \mid A^2+B^2 = n\}$.
On pose également $\chi(n) = (-1)^{(n-1)/2}$ si n est impair et $\chi(n) = 0$, sinon.

1. Montrer que $r(5) = 8$.
Par la suite, on admet que pour p premier, $r(p) = 0$ si $p \equiv 3[4]$ et $r(p) = 8$ si $p \equiv 1[4]$.
2. Montrer que χ est multiplicative.
3. On définit $\delta(n) = \sum_{d|n} \chi(d)$. Montrer que $\delta(n) = \sum_{d|n, d\equiv 1[4]} 1 - \sum_{d|n, d\equiv 3[4]} 1$.
4. (*) Montrer que $r(n) = 4\delta(n)$