Equations polynomiales

Factorisation

N° 322
Factoriser les fonctions polynomiales $x \mapsto x^3 - 1$, $x \mapsto x^4 - 1$.

N° 323
Factoriser les fonctions polynomiales

$f_1 : x \mapsto x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1$ $\quad f_2 : x \mapsto x^4 - 4$
$f_3 : x \mapsto x^9 + x^6 + x^3 + 1$ $\quad f_4 : x \mapsto x^6 + 1$
$f_5 : x \mapsto x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1$ $\quad f_6 : x \mapsto x^4 - 1$

N° 324
Factoriser les fonctions polynomiales $x \mapsto x^6 + 4x^5 + 4x^4 - 4x^3 - 11x^2 - 8x - 2$, sachant qu'il y a une racine évidente multiple.

N° 325
Déterminer, selon les valeurs du paramètre réel m, le degré de la fonction polynôme f définie par $f : x \mapsto (m^2 - m)x^4 + (2m - 2)x^3 + mx^2 + (m-3)x + 5$

Développement

N° 326
Développer les fonctions polynomiales $x \mapsto (x+1)^3(x-1)(x+2)(x-2)^2$ et $x \mapsto (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)(x^2 - 1)$.

N° 327
Développer avec le moins de calculs possibles

— $(a+b)^8$
— $(a+b+c)^3$
— $(a+b+c+d)^8$
— $(a+b+c)^n$

N° 328
Démontrer l'égalité de LAGRANGE :

$$\forall\, a,b,c,d \in \mathbb{R}, (a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac+bd)^2 + (ad-bc)^2$$

En déduire 2 décompositions différentes de 221 en somme de deux carrés.

Polynôme de plusieurs variables

N° 329
Soit $f : (a,b,c,d,e,f,g,h) \mapsto (a+b)(c+d)(e+f)(g+h)$.

1. Montrer que f est une fonction polynomiale de 8 variables.
2. Quel est son degré.
3. Développer f, en déduire une expression développée de $(a+b)^4$ puis de $(1+x)^4$.
4. En déduire une définition du coefficients qui figure devant x^h dans le développement de $(1+x)^4$.
   De quelles variables dépend la définition de ce coefficient ?

N° 330
Développer $(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)(1+y^2+y^4)(1+z^3)$.
En déduire le nombre de façon d'obtenir 5 astols avec des pièces de 1, 2 et 3 astols.

N° 331
Combien y-a-t-il de façon de choisir une douzaine de beignets de trois saveurs différentes (fraises, pomme et chocolat) s'il doit y avoir au moins deux beignets de chaque saveur et pas plus de quatre beignets au chocolat ?

Représentation graphique

N° 332
Ali et Benoit jouent au jeu suivant : on écrit $x^4 + *x^3 + *x^2 + *x + 1$ au tableau.
Ali choisit une étoile et la remplace par un réel, puis c'est à Benoit, et ainsi de suite jusqu'à épuisement des étoiles. Ali gagne si le polynôme obtenu n'a pas de racine réelle. Sinon, c'est Benoit qui gagne.
Montrer que ce dernier a une stratégie gagnante.

N° 333
Soient f et g deux fonctions polynomiales de terme dominant x^{2020} et tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f(x) \neq g(x)$.
Montrer qu'il existe un réel x tel que $P(x-1) = Q(x+1)$.

N° 334
Trouver tous les polynômes P à coefficients réels tels que pour tout x on ait

$$\left| P(x)P\left(\frac{1}{x}\right) \right| \geqslant 1$$

On pourra supposer que $p(x) = x^k q(x)$ avec $q(0) \neq 0\ldots$

Coniques

N° 335
On considère une droite Δ d'équation $x = a$ (directrice), un point F (foyer) de coordonnées $(0,s)$ et un nombre $e > 0$ (excentricité). On note $\Gamma_e = \{M \in \mathbb{R}^2 \mid d(M,F) = e \times d(M,\Delta)\}$ où d représente la distance.

1. Si $M(x,y)$, calculer $d(M,F)^2$ et $d(M,\Delta)^2$.
2. Donner l'équation de Γ_e. En déduire la nature de Γ en fonction de la valeur de l'exentricité e
3. Représenter Γ_e selon les différentes familles de valeurs possibles pour e.

N° 336
Etudier les courbes dont une équation polaire (en repère orthonormé direct) est :

— $r_1 : \theta \mapsto \dfrac{1}{1 + 2\cos\theta}$
— $r_2 : \theta \mapsto \dfrac{1}{2 + \cos\theta}$

N° 337
$\mathscr{C}$ est le cercle de diamètre $[A,B]$. (D) est la tangente en A à $\mathscr{C}$. P est un point variable sur $\mathscr{C}$ et (T) est la tangente en P à $\mathscr{C}$.
(T) recoupe (D) en S, puis la perpendiculaire à (AB) passant par P coupe (BS) en M. Quel est l'ensemble des points décrit par M, lorsque P décrit $\mathscr{C}$?

Symétrie sur les graphes de fonctions polynomiales

N° 338
Tracer les courbes d'équations $y = x^2$, $y = x^2 - 1$ et $y = (x-1)^2$

N° 339
Trouver toutes les fonctions polynomiales dont la représentation graphique présente une symétrie par rapport à l'axe $x = 0$.
Même question par rapport à l'axe $x = a$.

N° 340
Trouver toutes les fonctions polynomiales dont la représentation graphique présente une symétrie de centre $O(0,0)$.
Même question par rapport au centre $M(a,b)$.

Approximation par essais successifs

N° 341
Calculer par approximations successives une valeur approchée de $\sqrt{1,02}$. Même question pour $\sqrt{2}$.

N° 342
Résoudre le système $\left\{ \begin{array}{lll} x & +y & = 2 \\ x & -y & = 0 \end{array} \right.$.

Donner une solution approchée du système $\left\{ \begin{array}{lll} x & +y & = 1,9 \\ x & -y & = 0,2 \end{array} \right.$.

Vérifier.

N° 343
On cherche une valeur approchée de $\alpha = \sqrt{6}$.
Donner une équation polynomiale dont α est racine.

En déduire une suite (u_n) de premier terme 2 et qui converge vers α (a priori). Calculer u_1 et u_2.
Comparer u_2 à α.

Problèmes

N° 344

Division euclidienne

1. Montrer que $x^2 - x - 1$ divise $x^4 + x^3 - 5x - 3$.
   En déduire une factorisation de $f : x \mapsto x^4 + x^3 - 5x - 3$.
2. Que vaut 123×89 ? Quel rapport avec la question précédente ?

N° 345

Carré

1. Montrer que $f_a : x \mapsto x(x+a)(x+2a)(x+3a) + a^4$ est le carré d'une fonction polynomiale
2. En déduire la factorisation de $h : x(x+1)(x+2)(x+3) - 8$

N° 346

Polynôme à coefficients entiers

Trouver l'équation polynomiale à coefficients entiers de plus bas degré admettant pour solution $x_1 = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}$.
Donner les autres solutions, sans calcul.

N° 347

Critère de divisibilité

Soit $f : x \mapsto x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, une fonction polynomiale de degré $n \geqslant 1$ à coefficients entiers.
Démontrer que si f admet une racine dans Z, alors celle-ci divise a_0.
Les équations $x^3 - x^2 - 109x - 11$ et $x^{10} + x^5 + 1$ ont des solutions dans $\mathbb{Z}$?

N° 348

Système (non linéaire)

Résoudre le système $\left\{\begin{array}{ccc} a+b+c & = & \frac{5}{12} \\ ab+ac+bc & = & \frac{-1}{8} \\ abc & = & \frac{-1}{24} \end{array}\right.$.

On pourra développer le polynôme $(x-a)(x-b)(x-c)\ldots$

18. L'algèbre des polynômes

Ecriture polynomiale

N° 349
Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant $P \circ P = P$
N° 350
Trouver les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P = Q \times P'$
N° 351
Résoudre les équations suivantes :
— $Q^2 = XP^2$, d'inconnues $P, Q \in \mathbb{K}[X]$
— $P \circ P = P$ d'inconnue $P \in \mathbb{K}[X]$
N° 352
On note $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.
Calculer rapidement $\sum_{k=0}^{50} j^{2k}$. Quel rapport avec les polynômes ?
N° 353
Soit A une matrice qui vérifie $A^3 = 2A^2 - I_2$.
Calculer A^{100}
N° 354
Pour $n \in \mathbb{N}$, développer le polynôme

$$(1+X)(1+X^2)(1+X^4)\dots(1+X^{2^n})$$

En déduire que tout entier $p > 0$ s'écrit de façon unique comme somme de puissance de 2 (2,4,8,16...)
N° 355
Soit (P_n), la suite de polynômes définie par

$$P_1 = X - 2, \qquad \forall\ n \in \mathbb{N}^*, P_{n+1} = P_n^2 - 2$$

Calculer le coefficient de X^2 dans P_n
N° 356
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On suppose que $\deg(P) = d$.
Montrer qu'il existe une unique famille $(b_0, b_1, \dots b_d)$ tel que

$$\begin{aligned} P &= b_0 + b_1 X + b_2 \frac{X(X-1)}{2} + \dots + b_d \frac{X(X-1)\cdots(X-d+1)}{d!} \\ &= \sum_{k=0}^{d} b_k \frac{X(X-1)\cdots(X-k+1)}{k!} \end{aligned}$$

Dérivation

N° 357
Résoudre les équations suivantes :

1. $(P')^2 = 4P$ d'inconnue $P \in \mathbb{K}[X]$
2. $(X^2+1)P'' - 6P = 0$ d'inconnue $P \in \mathbb{K}[X]$

N° 358
Montrer que pour tout entier n, il existe un unique polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$P_n - P_n' = X^n$$

Exprimer les coefficients de P à l'aide de nombres factoriels
N° 359
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que

$$P(X+1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} P^{(n)}(X)$$

Problème

N° 360
Polynôme de Bernoulli
On considère la suite de polynôme définie par récurrence par :

$$B_0 = 1 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}^* : B_n = X^n - \frac{-1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} B_k$$

1. Calculer B_1, B_2 et B_3.
2. Montrer que $B_{n+1}' = (n+1)B_n$
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, B_n est de degré n et de coefficient dominant $[B_n]_n = 1$
4. Montrer que pour tout $d \in \mathbb{N}$, tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} k^d = \frac{B_{d+1}(n+1) - B_{d+1}(0)}{d+1}$$

N° 361
Composition répétée
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.

1. Montrer que $P(X) - X$ divise $P(P(X)) - P(X)$
2. En déduire que $P(X) - X$ divise $P(P(X)) - X$
3. On note $P^{[n]} = P \circ P \circ \cdots P$ (composition de n polynômes). Etablir que $P(X) - X$ divise $P^{[n]}(X) - X$

On dit que A divise B s'il existe Q tel que $B = AQ$