Méthode du pivot de Gauss

1 Matrice échelonnée en ligne (en colonne)

1.1 Définitions

On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est **échelonnée en ligne** si le nombre de zéros précédant la première valeur non nulle d'une ligne augmente ligne par ligne jusqu'à ce qu'il ne reste en fin de compte plus que des zéros.

Ou encore : une matrice A est échelonnée en ligne, si le nombre de zéros consécutifs en début de ligne est toujours strictement supérieur à celui de la ligne précédente ou s'il est égal au nombre de colonnes.

Formellement : on considère $\varphi(A, i) = \max\{k \in \mathbb{N} \mid \forall j \leq k, {}^i[A]_j = 0\}$.

$A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est échelonnée en ligne si $\forall i \in \mathbb{N}_{n-1}, \varphi(A, i) < \varphi(A, i+1)$ ou $\varphi(A, i+1) = p$.

Le premier élément non nul d'une ligne (s'il existe) s'appelle un **pivot**.

On dit qu'une matrice est **échelonnée en colonne** si sa transposée est échelonnée en ligne.

1.2 Exemples

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ sont échelonnées en ligne}$$

mais pas $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ car L_2 et L_3 ont toutes les deux, deux 0.

1.3 Exercices

▷ **Exercice 1.1.** On dit qu'une matrice est échelonné (en ligne) et réduite, si les pivots sont tous égaux à 1 et que les pivots sont les seuls éléments non nuls de leur colonne.

On appelle type d'une matrice échelonné, la liste strictement croissante des indices des colonnes des pivots.

1. Donner une matrice de $\mathcal{M}_{4,5}(\mathbb{R})$ échelonné (en ligne) et réduite et de type $(1, 3, 5)$
2. Combien existe-t-il de matrice de $\mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ échelonné (en ligne) et réduite du type $(1, 2, \dots, r)$?
3. Combien de « degré de liberté » pour une matrice de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ échelonné (en ligne) et réduite de type $(a_1, \dots, a_m)$, avec $m \leq p$ et $r \leq q$?

2 Méthode du pivot de Gauss

On a le théorème suivant :

Toute matrice M peut être transformée en une matrice échelonnée en ligne (resp. en colonne) par des opérations élémentaires sur les lignes (resp. sur les colonnes).

Plus que l'existence de la transformation, on s'intéresse à la méthode pour y parvenir.

La démonstration, que nous faisons sous forme d'un exercice, nous donne un algorithme - colonne par colonne-, que l'on formalisera par la suite.

2.1 « Echelonnage » d'une matrice (rectangulaire)

▷ **Exercice 2.1.** Montrer que par suites d'opérations élémentaires, on peut transformer la première colonne de A ou bien avec que des nombres nuls, ou bien avec un unique nombre non nul situé en haut (et donc à gauche - i.e. en première colonne).

▷ **Exercice 2.2.** Ecrire un programme `reduction_colonne` en Python, inspiré de la réponse à la question précédente, qui prend en argument une matrice A , une altitude `alt` et un numéro de colonnes `k` et qui renvoie une nouvelle matrice obtenue à partir de la matrice A initiale,

- les colonnes $j \neq k$ inchangées, pour la colonne k ,
- les coefficients en lignes $i < \text{alt}$ inchangés, ceux en lignes $i > \text{alt}$ annulés
- et avec ou bien un pivot non nul en ligne `alt` et la valeur `alt←alt+1` ou bien un coefficient nul et la valeur `alt← alt`.

▷ **Exercice 2.3.** Ecrire un programme complet qui échelonne une matrice donnée en paramètre.

Comment démontrer que l'algorithme réalise bien ce que l'on souhaite ?

Comment démontrer que l'algorithme termine bien ?

▷ **Exercice 2.4.** Transformer en matrice échelonnée, la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 6 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 3 & \frac{1}{2} \\ 0 & 3 & 6 & 7 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & 3 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

2.2 Inversibilité et inverse d'une matrice (carrée)

On rappelle que les opérations élémentaires conservent le caractère d'inversibilité (ou non).

▷ **Exercice 2.5.** Comment appliquer notre algorithme pour inverser une matrice. *Peut-être faut-il créer un nouveau programme auxiliaire...*

▷ **Exercice 2.6.** Calculer la complexité du programme informatique créé, en fonction de n , l'ordre de la matrice.

▷ **Exercice 2.7.** Déterminer les inverses de

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 10 & 9 & 1 \\ 9 & 10 & 5 \\ 1 & 5 & 9 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Correction des exercices

▷ Corrigé de l'exercice 1.1

1. Exemple :
$$\begin{pmatrix} 1 & x & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Une c'est l'identité.

3. $a_{k+1} - a_k - 1$ est le nombre de colonnes sans pivots entre a_k et a_{k+1} . Puis pour chacune, le nombre de ligne disponibles est k .

Il y a donc $\sum_{k=1}^{m-1} k(a_{k+1} - a_k - 1) = ma_m - \sum_{k=1}^m a_k - \frac{m(m-1)}{2}$ degré de liberté.

▷ Corrigé de l'exercice 2.1

Considérons

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$$

Pour le besoin de l'algorithme, on notera $\text{alt}(j)$, le niveau (altitude) où se trouve le pivot de la colonne j

— Si $a_{1,1} \neq 0$. La méthode consiste, dans une première étape, à effectuer les transformations élémentaires :

$$L_2 \leftarrow L_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}}L_1, \quad L_3 \leftarrow L_3 - \frac{a_{31}}{a_{11}}L_1, \dots, L_n \leftarrow L_n - \frac{a_{n1}}{a_{11}}L_1,$$

de manière à obtenir la matrice

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2p} \\ 0 & a'_{32} & \cdots & a'_{3p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a'_{n2} & \cdots & a'_{np} \end{pmatrix}$$

Dans cette première série de transformations élémentaires, le coefficient *non nul* $a_{1,1}$ s'appelle le **pivot**.

On a $\text{alt}(1) = 1$

— Si $a_{1,1} = 0$ et s'il existe i_0 tel que $a_{i_0,1} \neq 0$,

on commence par effectuer la transformation élémentaire $L_i \leftrightarrow L_{i_0}$.

Puis on revient à l'étape précédente.

— Si tous les $a_{i,1}$ sont nuls, la matrice a une forme acceptable (concernant la première colonne). Il n'y a pas de pivot en colonne 1.

Et l'on définit $\text{alt}(1) = 0$

On note alors $a_{i,j}^{(1)}$ les coefficients de A ainsi transformée

▷ Corrigé de l'exercice 2.2

Il reste à écrire le codage (Python)

▷ Corrigé de l'exercice 2.3

▷ Corrigé de l'exercice 2.4

On obtient

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 6 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

▷ Corrigé de l'exercice 2.5

▷ Corrigé de l'exercice 2.6

On trouve une complexité en $O(n^3)$.

▷ **Corrigé de l'exercice 2.7**

On applique l'algorithme de Gauss-Jordan en considérant $(A|I_3)$:

$$\begin{aligned}
 & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad \left\{ \begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array} \right. \\
 & \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{11}{3} & 1 & \frac{2}{3} & 1 \end{array} \right) \quad \left\{ \begin{array}{l} L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + \frac{2}{3}L_2 \end{array} \right. \\
 & \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{11} & \frac{2}{11} & \frac{3}{11} \end{array} \right) \quad \left\{ \begin{array}{l} L_2 \leftarrow \frac{1}{3}L_2 \\ L_3 \leftarrow -\frac{3}{11}L_3 \end{array} \right. \\
 & \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{11} & \frac{3}{11} & \frac{-1}{11} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{11} & \frac{2}{11} & \frac{3}{11} \end{array} \right) \quad \left\{ \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{3}L_3 \end{array} \right. \\
 & \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{9}{11} & \frac{1}{11} & \frac{7}{11} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{11}{11} & \frac{2}{11} & \frac{2}{11} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{11} & \frac{11}{11} & \frac{11}{11} \end{array} \right) \quad \left\{ \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{2}L_2 + L_3 \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

Par suite d'opérations élémentaires, on a transformé A en I_3 donc A est inversible.

Par suite des mêmes opérations élémentaires, on a transformé I_3 en A^{-1} , donc $A^{-1} = \frac{1}{22} \begin{pmatrix} 18 & 1 & 7 \\ -2 & 6 & -2 \\ 6 & 4 & 6 \end{pmatrix}$.

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 65 & -76 & 35 \\ -76 & 89 & -41 \\ 35 & -41 & 19 \end{pmatrix} \text{ et } D^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 8 & 9 & -3 & -4 \\ 3 & -1 & -2 & 2 \\ -6 & -5 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$