# Trigonométrie

## 1 Problème 1 : Petits exercices...

1. Simplifier :
   1. $\dfrac{1}{\sin x} - \text{cotan} x$ 2. $\dfrac{\sin 3x}{\sin x} + \dfrac{\cos 3x}{\cos x}$
   3. $\dfrac{\sin x \cos \frac{x}{3}}{\frac{1}{2} + \cos x \cos \frac{x}{3}}$ 4. $3\cos^2 x - 2\sqrt{3}\cos x \sin x + \sin^2 x$
2. Soient $a, h \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   Calculer $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(a + kh)$ et $U_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} \sin(a + kh)$
3. Linéariser les expressions suivantes :
   $$\sin^3(x); \quad \cos^2(x)\sin(3x); \quad \cos^4(3x)\cos(x)$$
4. Linéariser $2^{2m}\cos^{2m} x; \quad (-1)^m 2^{2m} \sin^{2m} x$.
5. Résoudre les équations :
   $$\cos(x) + \cos(2x) + \cos(3x) = 0 \quad ; \quad \sin(x) + \sin(3x) + \sin(5x) = 0$$
6. On pose
   $$A = \sin\frac{\pi}{12}, \quad B = \cos\frac{\pi}{12}, \quad C = \tan\frac{\pi}{12}.$$
   Déterminer une équation du second degré dont $A$ et $B$ sont les racines (on pourra commencer par calculer $A + B$ et $AB$...).
   Exprimer $A$ et $B$ en utilisant des racines carrées et vérifier que $C = 2 - \sqrt{3}$
7. Soit $a$ un réel donné, résoudre le système $S$ :
   $$\begin{cases} \cos a + \cos(x + a) + \cos(y + a) &= 0 \\ \sin a + \sin(x + a) + \sin(y + a) &= 0 \end{cases}$$

# 2 Problème 2 : Polynôme de Tchebychev

## A. Construction de la famille de polynômes de Tchebychev

On définit la suite des polynômes de Tchebychev par $T_0 = 1$ et $T_1 = X$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$T_{n+1}(X) = 2XT_n(X) - T_{n-1}(X)$$

1. Construction de $(T_n)$.
   (a) Expliciter $T_2, T_3$ et $T_4$.
   (b) Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le degré de $T_n$ et son coefficient dominant. Quelle est la parité de $T_n$ ?
   (c) Montrer que tous les coefficients de $T_n$ sont des entiers relatifs.
   (d) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(T_0, T_1, \ldots T_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Autre expression.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$ :

   $$T_n(\cos x) = \cos(nx)$$

   (b) Que valent $T_n(0)$, $T_n(1)$, $T_n(-1)$ ?
   (c) On suppose $n \geqslant 1$, montrer que $T_n$ admet $n$ racines réelles distinctes. Les énoncer
   (d) On suppose $n \geqslant 2$, montrer que $T_n'$ admet $(n-1)$ racines réelles distinctes.

## B. Relation différentielle

1. Montrer que $T_n$ vérifie la relation différentielle : $n^2 T_n - XT_n' + (1 - X^2)T_n'' = 0$
   (On pourra considérer la fonction $x \mapsto T_n(\cos x)$)
2. (*) En utilisant la relation précédente, exprimer les coefficients de $T_n$ (on écrira $T_n = \displaystyle\sum_{k \in \mathbb{N}} a_k X^k$).
   *On commencera par montrer que :* $\forall\ h \leqslant n,\ a_{h-2} = \dfrac{h(h-1)}{(h-2-n)(h-2+n)} a_h$,
   *puis on cherchera une relation entre* $a_{n-2p}$ *et* $a_n$*, enfin on exprimera* $a_{n-2p}$ *à l'aide de* $\dfrac{n}{n-p}\dbinom{p}{n-p}$.

## C. Question sur les $\cos\theta$ rationnels

Il est bien connu que $\cos\dfrac{\pi}{3} \in \mathbb{Q}$. L'objet de cette est de chercher si $\dfrac{1}{3}$ est le seul rationnel $r$ de $]0, \dfrac{1}{2}[$ tel que $\cos(r\pi) \in \mathbb{Q}$.
Soit $r \in \mathbb{Q} \cap ]0, \dfrac{1}{2}[$. On suppose que $\cos(r\pi) \in \mathbb{Q}$ et que l'écriture irréductible de $r$ est $\dfrac{p}{q}$.

1. (a) Montrer que $q \geqslant 3$.
   (b) Montrer que $\cos\dfrac{\pi}{q} \in \mathbb{Q}$.
   *On pourra utiliser la relation de Bézout vérifiée par* $(p, q)$ *et B.4.*
2. Montrer que $q$ n'est pas un multiple de 4 (on admet que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$).
   En déduire qu'il existe un entier impair, noté $h \geqslant 3$ tel que $q = h$ ou $q = 2h$.
3. On suppose que $q = h$. Montrer que $h = 3$.
   *On pourra exploiter le polynôme* $T_h + 1$ *et le résultat de la partie A.*
4. On suppose que $q = 2h$. Montrer que $\cos\dfrac{\pi}{h} \in \mathbb{Q}$. Est-ce possible ?
5. Conclure : quels sont les rationnels $r$ de $]0, \dfrac{1}{2}[$ tels que $\cos(r\pi) \in \mathbb{Q}$ ?

# 3 Problème 1 : Petits exercices...

Quelques formules à savoir retrouver :

$$1-\cos x = \mathrm{Re}(1-e^{ix}) = \mathrm{Re}(e^{ix/2}(e^{-ix/2}-e^{ix/2})) = \mathrm{Re}(e^{ix/2}\times(-2i)\sin\frac{x}{2}) = -2\sin\frac{x}{2}\mathrm{Re}\left(i(\cos\frac{x}{2}+i\sin\frac{x}{2})\right) = 2\sin^2\frac{x}{2}$$

$$\begin{array}{ll} \sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a \sin b & \sin(a-b) = \sin a\cos b - \cos a\sin b \\ \cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b & \cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a \sin b \\ \sin(2x) = 2\sin x\cos & \cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x \end{array}$$

1. 1. $\dfrac{1}{\sin x} - \mathrm{cotan} x = \dfrac{1-\cos x}{\sin x} = \dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \tan\dfrac{x}{2}$

   2. $\dfrac{\sin 3x}{\sin x} + \dfrac{\cos 3x}{\cos x} = \dfrac{\cos x\sin 3x + \cos 3x \sin x}{\sin x\cos x} = \dfrac{\sin 4x}{\frac{1}{2}\sin(2x)} = \dfrac{4\sin 2x\cos 2x}{\sin 2x} = 4\cos 2x$

   3. $\dfrac{\sin x\cos\frac{x}{3}}{\frac{1}{2}+\cos x\cos\frac{x}{3}} = \dfrac{\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\,\frac{e^{ix/3}+e^{-ix/3}}{2}}{\frac{1}{2}+\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\,\frac{e^{ix/3}+e^{-ix/3}}{2}} = \dfrac{\frac{1}{4i}(e^{4ix/3}-e^{-4ix/3}+e^{2ix/3}-e^{-2ix/3})}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2i}(e^{4ix/3}+e^{-4ix/3}+e^{2ix/3}+e^{-2ix/3})}$
   $= \dfrac{\sin\frac{4x}{3}+\sin\frac{2x}{3}}{1+\cos\frac{4x}{3}+\cos\frac{2x}{3}} = \dfrac{2\sin\frac{2x}{3}\cos\frac{2x}{3}+\sin\frac{2x}{3}}{2\cos^2\frac{2x}{3}+\cos\frac{2x}{3}} = \dfrac{\sin\frac{2x}{3}(2\cos\frac{x}{3}+1)}{\cos\frac{2x}{3}(2\cos\frac{x}{3}+1)} = \tan\dfrac{2x}{3}$

   4. $3\cos^2 x - 2\sqrt{3}\cos x\sin x + \sin^2 x = (\sqrt{3}\cos x - \sin x)^2 = 4\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \dfrac{1}{2}\sin x\right)^2$
   $= 4\left(\cos\dfrac{\pi}{6}\cos x - \sin\dfrac{\pi}{6}\sin x\right)^2 = 4\cos^2(x+\dfrac{\pi}{6})$

   Remarque : $a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x + \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x\right)$.
   Or $\exists\ \varphi \in ]-\pi,\pi]$ tel que $\cos a = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ car $\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$.
   Donc $a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\varphi)$ (reste à trouver une valeur de $\varphi$).

2. Soient $a, h \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   $T_n(a) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathrm{Im}\left(e^{i(a+kh)}\right) = \mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{ia}+e^{ikh}\right) = \mathrm{Im}\left(e^{ia}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(e^{ih})^k\right)$
   $= \mathrm{Im}\left(e^{ia}(1+e^{ih})^n\right) = \mathrm{Im}\left(e^{ia+inh/2}\left(e^{-ih/2}+e^{ih/2}\right)^n\right) = 2^n\cos^n\dfrac{h}{2}\sin(a+\dfrac{nh}{2})$
   Puis comme, pour $k \geqslant 1$, $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$, le terme de la somme étant nul pour $k=0$ :
   $$U_n(a) = \sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}\sin(a+kh) = \sum_{k=1}^{n}n\binom{n-1}{k-1}\sin(a+kh) = n\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}\sin(a+h+jh)$$
   où l'on a posé $j = n-1$. On remarque qu'on trouve $T_{n-1}(a+h)$. Et donc
   $$U_n(a) = n2^{n-1}\cos^{n-1}\frac{h}{2}\sin(a+h+\frac{(n-1)h}{2}) = n2^{n-1}\cos^{n-1}\frac{h}{2}\sin(a+\frac{(n+1)h}{2})$$

3. Linéariser les expressions suivantes :
   $$\sin^3 x = \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^3 = \frac{e^{3ix}-3e^{ix}+3e^{-ix}+e^{-3ix}}{-8i} = \frac{1}{4}\left(\sin x - \sin(3x)\right)$$
   $$\cos^2(x)\sin(3x) = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^2\left(\frac{e^{3ix}-e^{-3ix}}{2i}\right) = \frac{1}{8i}(e^{2ix}+2+e^{-2ix})(e^{3ix}-e^{-3ix})$$
   $$= \frac{1}{8i}(e^{5ix}+2e^{3ix}+e^{ix}-e^{-ix}-2e^{-3ix}-e^{-5ix}) = \frac{1}{4}(\sin 5x + 2\sin 3x + \sin x)$$

$$\cos^4(3x)\cos x = \left(\frac{e^{3ix}+e^{-3ix}}{2}\right)^4\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right) = \frac{1}{2^5}(e^{12ix}+4e^{6ix}+6+4e^{-6ix}+e^{-12ix})(e^{ix}-e^{-ix})$$
$$= \frac{1}{16}(\cos 13x+\cos 11x+4\cos 7x+4\cos 5x+6\cos x)$$

4. On applique la formule d'Euler :

$$\begin{aligned}
2^{2m}\cos^{2m}x &= 2^{2m}\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^{2m} = \frac{2^{2m}}{2^{2m}}\sum_{k=0}^{2m}\binom{2m}{k}e^{ixk}e^{-ix(2m-k)}\\
&= \sum_{k=0}^{2m}\binom{2m}{k}e^{2ix(k-m)} = \sum_{k=0}^{m-1}\binom{2m}{k}e^{2ix(k-m)} + \underbrace{\binom{2m}{m}1}_{k=m} + \sum_{k=m+1}^{2m}\binom{2m}{k}e^{2ix(k-m)}\\
&= \underbrace{\sum_{h=0}^{m-1}\binom{2m}{h}e^{2ix(h-m)}}_{h=k} + \binom{2m}{m} + \underbrace{\sum_{h=0}^{m-1}\binom{2m}{2m-h}e^{2ix(2m-2h)}}_{h=2m-k}\\
&= \binom{2m}{m} + \sum_{h=0}^{m-1}\binom{2m}{h}\left(e^{2ix(h-m)}+e^{2ix(m-h)}\right) = \binom{2m}{m} + \sum_{h=0}^{m-1}\binom{2m}{h}\cos(2(m-h)x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(-1)^m2^{2m}\sin^{2m}x &= (-1)^m2^{2m}\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^{2m} = \frac{(-1)^m2^{2m}}{i^{2m}2^{2m}}\sum_{k=0}^{2m}\binom{2m}{k}e^{ixk}(-1)^{2m-k}e^{-ix(2m-k)}\\
&= \sum_{k=0}^{2m}\binom{2m}{k}(-1)^{2m-k}e^{2ix(k-m)}\\
&= \sum_{k=0}^{m-1}\binom{2m}{k}(-1)^{2m-k}e^{2ix(k-m)} + \underbrace{\binom{2m}{m}(-1)^m}_{k=m} + \sum_{k=m+1}^{2m}\binom{2m}{k}(-1)^{2m-k}e^{2ix(k-m)}\\
&= \underbrace{\sum_{h=0}^{m-1}\binom{2m}{h}(-1)^he^{2ix(h-m)}}_{h=k} + \binom{2m}{m}(-1)^m + \underbrace{\sum_{h=0}^{m-1}\binom{2m}{2m-h}(-1)^he^{2ix(2m-2h)}}_{h=2m-k}\\
&= \binom{2m}{m}(-1)^m + \sum_{h=0}^{m-1}\binom{2m}{h}(-1)^h\left(e^{2ix(h-m)}+e^{2ix(m-h)}\right)\\
&= \binom{2m}{m}(-1)^m + \sum_{h=0}^{m-1}\binom{2m}{h}(-1)^h\cos(2(m-h)x)
\end{aligned}$$

5. On exploite à nouveau les formules d'Euler, et l'on reconnait des sommes géométriques.
On commence par noter que $x\equiv 0[\pi]$ n'est pas solution (pour la première équation), on pourra donc diviser par $1-e^{ix}$

$$\begin{aligned}
\cos(x)+\cos(2x)+\cos(3x) &= \mathrm{Re}\left(e^{ix}+e^{2ix}+e^{3ix}\right) = \mathrm{Re}\left(e^{ix}\frac{1-(e^{ix})^3}{1-e^{ix}}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{e^{ix}-e^{4ix}}{1-e^{ix}}\right)\\
&= \mathrm{Re}\left(\frac{e^{i5x/2}(-2i\sin\frac{3x}{2})}{e^{ix/2}(-2i\sin\frac{x}{2})}\right) = \frac{\sin\frac{3x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\mathrm{Re}(e^{2ix}) = \frac{\sin\frac{3x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\cos(2x)
\end{aligned}$$

On a donc $\cos(x)+\cos(2x)+\cos(3x)=0 \iff \sin\dfrac{3x}{2}=0$ ou $\cos(2x)=0 \iff x\equiv 0[\dfrac{2\pi}{3}]$ ou $x\equiv\dfrac{\pi}{4}[\dfrac{\pi}{2}]$
On commence par noter que $x\equiv 0[2\pi]$ est solution (pour la seconde équation), on exclut ce cas et pourra ensuite diviser par $1-e^{ix}$

$$\begin{aligned}
\sin(x)+\sin(3x)+\sin(5x) &= \mathrm{Im}\left(e^{ix}+e^{3ix}+e^{5ix}\right) = \mathrm{Im}\left(e^{ix}\frac{1-(e^{2ix})^3}{1-e^{2ix}}\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{e^{ix}-e^{7ix}}{1-e^{2ix}}\right)\\
&= \mathrm{Im}\left(\frac{e^{i4x}(-2i\sin 3x)}{e^{ix}(-2i\sin x)}\right) = \frac{\sin 3x}{\sin x}\mathrm{Im}(e^{3ix}) = \frac{\sin 3x}{\sin x}\sin(3x)
\end{aligned}$$

On a donc $\sin(x)+\sin(3x)+\sin(5x)=0 \iff x=0$ ou $\sin 3x=0 \iff x\equiv 0[\dfrac{\pi}{3}]$

6. On pose
$$A=\sin\frac{\pi}{12},\quad B=\cos\frac{\pi}{12},\quad C=\tan\frac{\pi}{12}.$$
On a $A+B=\sin\frac{\pi}{12}+\cos\frac{\pi}{12}=\sqrt{2}(\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{12}+\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{12})=\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{12})=\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{6}}{2}$
$A\times B=\sin\frac{\pi}{12}\times\cos\frac{\pi}{12}=\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{12}=\frac{1}{4}$.
Or $A$ et $B$ sont les racines de $(x-A)(x-B)=x^2-(A+B)x+A\times B=x^2-\frac{\sqrt{6}}{2}x+\frac{1}{4}$.
Il reste à résoudre cette équation.
$\Delta=\frac{6}{4}-1=\frac{1}{2}$, donc $\sqrt{\Delta}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.
Donc $\{A,B\}=\{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4},\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\}$.
Puis, comme $\frac{1}{12}<\frac{1}{4}$, $\cos\frac{\pi}{12}>\sin\frac{\pi}{12}$.
On a donc $A=\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ et $B=\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.
On vérifie que $C=\tan\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}{6-2}=\frac{6+2-2\sqrt{12}}{4}=\frac{8-4\sqrt{3}}{4}=2-\sqrt{3}$.

7. En prenant les parties réelles et imaginaires, puis en factorisant par $e^{ia}\neq 0$, on a les équivalences :
$$(S)\begin{cases}\cos a+\cos(x+a)+\cos(y+a) &=0\\ \sin a+\sin(x+a)+\sin(y+a) &=0\end{cases}\iff e^{ia}+e^{i(a+x)}+e^{i(a+y)}=0\iff 1+e^{ix}+e^{iy}=0$$
$$\iff e^{i(x+y)/2}2\cos\frac{x-y}{2}=-1\iff\begin{cases}2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} &=-1\\ 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} &=0\end{cases}$$
en prenant les parties réelles et imaginaires.
Pour ce dernier système, il faut et il suffit que : $\cos\frac{x-y}{2}\neq 0$, puis $\sin\frac{x+y}{2}$, on a donc
$$(S)\iff\begin{cases}\sin\frac{x+y}{2} &=0\\ \cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} &=-\frac{1}{2}\end{cases}$$
Or $\sin\frac{x+y}{2}=0\Leftrightarrow\frac{x+y}{2}\equiv 0[\pi]\Leftrightarrow x\equiv -y[2\pi]$.
On a alors nécessairement, $\cos\frac{x+y}{2}=\pm 1$.
- Cas 1 : $x+y\equiv 0[4\pi]$, alors $\cos\frac{x+y}{2}=\cos 0=1$.
  Il reste donc la condition $\cos\frac{x-y}{2}=\cos x=-\frac{1}{2}$, car $y\equiv -x[4\pi]$ et donc $\frac{x-y}{2}\equiv x[2\pi]$.
  On a donc $x\equiv\frac{2\pi}{3}[2\pi]$ ou $x\equiv\frac{4\pi}{3}[2\pi]$.
- Cas 2 : $x+y\equiv 2\pi[4\pi]$, alors $\cos\frac{x+y}{2}=\cos\pi=-1$.
  Il reste donc la condition $\cos\frac{x-y}{2}=\cos(x-\pi)=-\cos x=-\frac{1}{2}$,
  car $y\equiv -x+2\pi[4\pi]$ et donc $\frac{x-y}{2}\equiv x-\pi[2\pi]$.
  On a donc $x\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$ ou $x\equiv\frac{5\pi}{3}[2\pi]$.

Ainsi, on a montré que si $(x,y)$ est une solution, alors $(x,y)$ définis <u>modulo $4\pi$</u> appartient à
$\{(\frac{2\pi}{3},-\frac{2\pi}{3}),(\frac{8\pi}{3},-\frac{8\pi}{3}),(\frac{4\pi}{3},-\frac{4\pi}{3}),(\frac{-2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}),(\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3}),(\frac{7\pi}{3},\frac{-\pi}{3}),(\frac{5\pi}{3},\frac{\pi}{3}),(\frac{-\pi}{3},\frac{-5\pi}{3})\}$.
On vérifie réciproquement que chacun de ces 8 couples fonctionnent avec le dernier système équivalent.
Ex : $(x,y)=(\frac{7\pi}{3},\frac{-\pi}{3})$, alors
$x+y\equiv 2\pi[4\pi]$ donc $\frac{x+y}{2}\equiv\pi[2\pi]$ donc $\sin\frac{x+y}{2}=0$ et $\cos\frac{x+y}{2}=-1$.
$x-y\equiv\frac{8\pi}{3}[4\pi]$ donc $\frac{x-y}{2}\equiv\frac{4\pi}{3}[2\pi]$ donc $\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}=(-1)\times(-\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$.