Transformation du plan. Applications

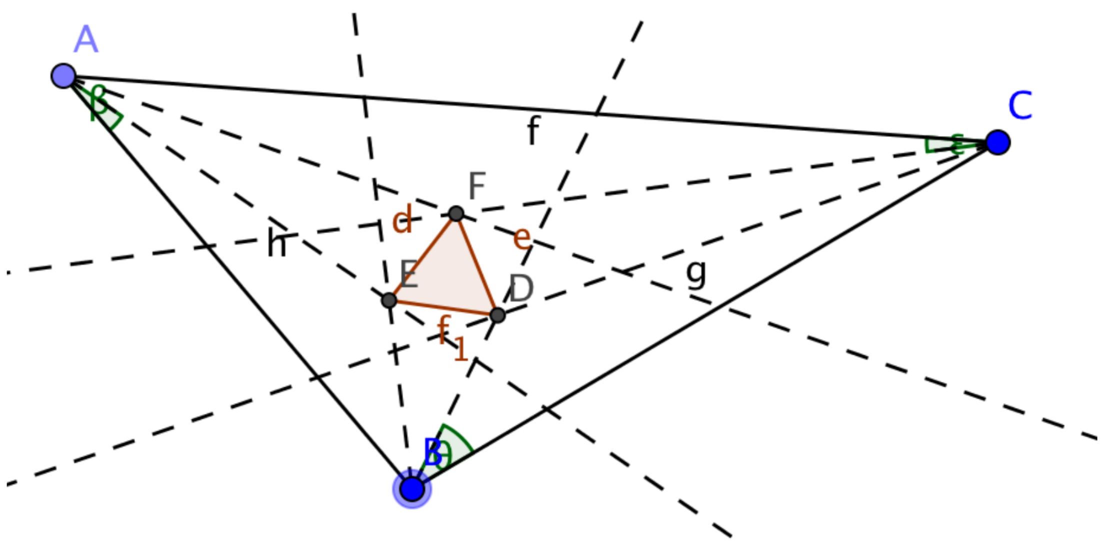
1 Exercice - Bijectivité...

Soit E et F deux ensembles non vides et $f : E \to F$.

1. Montrer que : si $\forall\ A, B \subset E,\ f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$, alors f est injective.
2. Montrer que : $\exists\ A, B \subset E$ tels que $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B) \Longrightarrow f$ non injective.
3. Qu'avez-vous démontrer avec ces deux implications ?

Problème - Théorème de Morley

Les trisectrices sont les droites qui découpent un angle en trois angles égaux.
L'objet de ce problème est de démontrer le théorème de Morley relatif aux trisectrices d'un angle.
Pour tout points A, B, C du plan, les points D, E, F obtenus par trisection forme un triangle équilatéral.



Dans tout le problème, le plan est muni d'un repère orthonormé direct qui permet de définir l'affixe complexe d'un point et le représentant d'un nombre complexe. Les nombres complexes a, b et c sont les affixes des trois points A, B et C respectivement.
Les nombres α, β, γ sont dans $\left]0, \dfrac{\pi}{3}\right[$ et tels que : $3\alpha = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \quad 3\beta = (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) \quad 3\gamma = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$
(les angles sont orientés : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$)
On note $u = e^{2i\alpha}$, $v = e^{2i\beta}$ et $w = e^{2i\gamma}$. Enfin, on définit les transformations complexes :

$$R_a : z \mapsto u(z-a)+a \qquad R_b : z \mapsto v(z-b)+b \qquad R_c : z \mapsto w(z-c)+c$$

I. Préliminaires

1. Soient M_1, M_2 et M_3 trois points distincts du plan et d'affixes respectives z_1, z_2 et z_3 tels que $z_1 + jz_2 + j^2 z_3 = 0$.
   Mettre sous forme trigonométrique les trois nombres complexes : $\dfrac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2}$, $\dfrac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3}$ et $\dfrac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$ En déduire que le triangle $M_1M_2M_3$ est équilatéral.
2. Montrer que uv, vw et wu sont différents de 1 et que $uvw = j$.

3. Mettre sous forme trigonométrique les deux nombres complexes : $\dfrac{u(1-v)}{1-uv}$ et $\dfrac{1-u}{1-uv}$.
4. On considère trois nombres complexes p, q et r vérifiant les relations suivantes :

   $$(1-v)b + v(1-w)c = p(1-vw) \qquad (1-w)c + w(1-u)a = q(1-wu) \qquad (1-u)a + u(1-v)b = r(1-uv)$$

   Puis on pose $E = (1-uv)(1-vw)(1-wu)(p + jq + j^2r)$. Montrer que

   $$E = \frac{w}{u}j^2(u^3-1)a + \frac{u}{v}(v^3-1)b + \frac{v}{w}j(w^3-1)c$$

II. Point fixe de $R_a \circ R_b$

1. Préciser les transformations géométriques liées aux transformations complexes R_a, R_b et R_c.
2. Montrer que $R_a \circ R_b$ a un unique point fixe r, représentant le point R et vérifiant $(1-u)a + u(1-v)b = r(1-uv)$.
3. En soustrayant $(1-uv)a$ de chaque côté de la relation précédente, préciser l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AR})$.
4. Préciser de même l'angle $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BR})$.
5. On définit de même p et P ; q et Q à partir de $R_b \circ R_c(p) = p$ et $R_c \circ R_a(q) = q$.
   Placer P, Q et R sur une figure.

III. Configuration principale de Morley

1. Montrer que le représentant de $R_c^3(a)$ est le symétrique de A par rapport à la droite (BC).
2. Montrer que $R_a^3 \circ R_b^3 \circ R_c^3$ est l'identité de $\mathbb{C}$.
3. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, calculer $R_a^3 \circ R_b^3 \circ R_c^3(z)$. En déduire

   $$(1-u^3)a + u^3(A-v^3)b + u^3v^3(1-w^3)c = 0$$

4. Montrer que le triangle PQR est équilatéral.