Développements limités

1 Manipulation algébrique de fonctions polynomiales

1.1 Addition et multiplication

L'addition (et soustraction) de deux fonctions polynomiales donne une fonction polynomiale. Il en est de même de la multiplication. On admet que si $f : x \mapsto a_0 + a_1x + \cdots a_nx^n$ et $g : x \mapsto b_0 + b_1x + \ldots b_mx^m$ sont deux polynômes,

$$f = g \Longleftrightarrow \underbrace{n}_{\deg f} = \underbrace{m}_{=\deg g} \text{ et } \forall\ k \leqslant \deg f, a_k = b_k \Longleftrightarrow \forall\ k \in \mathbb{N} a_k = b_k$$

On note alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $[f]_k$, le nombre a_k. Il est nul pour $k \geqslant n$.

▷ **Exercice 1.1.**
Soient $f : x \mapsto 2 + x - x^2 + 3x^3$ et $g : x \mapsto 1 + x - x^2 + x^4$ définies sur $\mathbb{R}$.
Evaluer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(f + g)(x)$ et $(f \times g)(x)$

▷ **Exercice 1.2.**
Soient $f : x \mapsto a_0 + a_1x + \cdots a_nx^n$ et $g : x \mapsto b_0 + b_1x + \ldots b_mx^m$ définies sur $\mathbb{R}$.

1. Evaluer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(f + g)(x)$ et $(f \times g)(x)$.
2. Exprimer alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $[f + g]_k$ en fonction des $[f]_i$ et $[g]_j$.
3. Exprimer alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $[f \times g]_k$ en fonction des $[f]_i$ et $[g]_j$.

▷ **Exercice 1.3.**

1. Calculer « rapidement »$\big(f(x)\big)^4$ si $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3$.
2. Calculer « rapidement »$[f(x)]^2 \times g(x)$ si $f(x) = 1 - x$ et $g(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \ldots 11x^{10}$.

1.2 Composition et troncature de polynôme

La composition de deux fonctions polynomiales donne une fonction polynomiale.
Il n'existe pas de jolie formule explicitant le résultat d'une composition de polynômes en fonction des coefficients initiaux. Il faut juste savoir le faire dans la pratique (on voit qu'on exploite les puissances de polynômes).

Les calculs devenant vite compliqués, on considère l'application τ_n, appelé troncature d'ordre n et définie sur l'ensemble des fonctions polynomiales telle que :

pour tout $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{m} a_kx^k$, $\tau_n(f) : x \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_kx^k$.

Si $\deg f \leqslant n$, alors $\tau_n(f) = f$. τ_n permet d'arrêter les calculs au degré *nécessaire*.

▷ **Exercice 1.4.** Soient $f : x \mapsto 2 + x - x^2$ et $g : x \mapsto 1 + x - x^2$ définies sur $\mathbb{R}$.
Evaluer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(f \circ g)(x)$ et $(g \circ f)(x)$

▷ **Exercice 1.5.** Considérons f et g deux applications polynomiales de degré n et m respectivement.
Soit $k \leqslant \min(n, m)$.
Comment évaluer le plus simplement possible (avec le moins de calcul possible)

— $\tau_k(f + g)$,
— $\tau_k(f \times g)$
— $\tau_k(f \circ g)$.

Quelle stratégie proposez-vous si l'on doit calculer $\tau_k(f \circ g)$?

▷ **Exercice 1.6.** Evaluer $\tau_3((1 + x + x^2 + x^3) \circ (1 - x^2))$ et $\tau_3((1 - x^2) \circ (1 + x + x^2 + x^3))$. (avec un abus de notation toléré, ici)

▷ **Exercice 1.7.** Evaluer $\tau_3((1 - x + x^2 - x^3) \circ (1 + x^2))$ et $\tau_3((1 + x^2) \circ (1 - x + x^2 - x^3))$. (avec un abus de notation toléré, ici)

2 Approximation polynomiale d'une fonction en un point !

Le calcul algébrique avec des fonctions polynomiales n'est pas toujours facile, mais il est faisable.
On aimerait profiter de cette possibilité pour effectuer des calculs plus simples avec des fonctions.
On va commencer par voir comment remplacer une fonction par un polynôme.

2.1 Approximation polynomiale d'une fonction

Nos fonctions usuelles ne sont pas des polynômes, on ne cherche par à remplacer une fonction usuelle par une fonction polynomiale sur un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant une infinité de points.
Mais on peut faire des comparaison au voisinage d'un point.
La définition de Weierstrass de la dérivabilité de φ en x_0 avec pour valeur $A(=\varphi'(x_0))$ exprime :

$$\exists\ A \in \mathbb{R}, \exists\ \epsilon : I \to \mathbb{R} \text{ continue en } x_0 \text{ avec } \epsilon(x_0) = 0 \quad |\ \forall\ x \in I, \varphi(x) = \varphi(x_0) + A(x - x_0) + (x - x_0)\epsilon(x)$$

On va donc chercher une fonction polynomiale f de degré n tel que

$$\varphi(x) = f(x) + (x - x_0)^n \epsilon(x) \qquad \text{avec } \epsilon(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0$$

On commence par étudier les cas $x_0 = 0$.

▷ **Exercice 2.1.** On considère la fonction $\varphi : x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

1. Evaluer précisément, pour tout $x \neq 1$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(x) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k$
2. En déduire qu'il existe $\epsilon :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ (à préciser) tel que

$$\forall\ x \in]-1, 1[, \qquad \varphi(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k + x^n \epsilon(x)$$

   avec $\epsilon(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$

▷ **Exercice 2.2.** On considère une fonction polynomiale f de degré n.

1. Montrer que $[f]_k = \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}$
2. Quel est le polynôme de degré 3 tel que $f(0) = 1$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$, $f^{(3)}(0) = -1$?
3. Que vaut $(x \mapsto x^n)^{(i)}(0)$, pour $i \in \mathbb{N}$?

▷ **Exercice 2.3.** On considère φ de classe C^∞ sur I, contenant 0.
On fixe $n \in \mathbb{N}^*$.
On considère une fonction polynomiale f de degré n. On note $T : x \mapsto \varphi(x) - f(x)$.

1. Soit $k \in \mathbb{N}$, exprimer $T^{(k)}(0)$ en fonction des dérivées de φ et des coefficients $[f]_i$.
2. En déduire la valeur nécessaire à donner à $[f]_k$ pour que $T^{(k)}(0) = 0$.
3. En exploitant la règle de L'Hospital évaluer

$$\lim_{x \to 0} \frac{\varphi(x) - f(x)}{x^n}$$

2.2 Développement limité de fonctions usuelles en des points bien selectionnés

En reprenant les conclusions de cet exercice, on trouve qu'avec $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} x^k$, il existe $\epsilon : I \to \mathbb{R}$, continue et nulle en 0 tel que

$$\varphi(x) = f(x) + x^n \epsilon(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} x^k + x^n \epsilon(x)$$

On appelle cette écriture, le développement limite de φ en 0. On le note plus rapidement $DL_n(0)$.

Il est unique, d'après l'exercice précédent.
Le développement limité d'ordre n de φ en a est

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k (x-a)^k + (x-a)^n \overline{\epsilon}(x)$$

Par exemple, le $DL_n(0)$ de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ est $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k$.

On a trouvé une première méthode pour calculer un développement limité : exploiter les dérivées. Si, on trouve (grâce aux équations différentielles, ou la formule de Leibniz) une expression simple entre les dérivées, le calcul des termes du DL est grandement facilité.

▷ **Exercice 2.4.**

1. Donner une équation différentielle simple vérifiée par exp
2. En déduire le $DL_n(0)$ de exp.
3. En déduire le $DL_n(0)$ de ch et sh
4. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la dérivée n-ième de $x \mapsto e^{ix}$.
5. En déduire le $DL_n(0)$ de cos et sin

▷ **Exercice 2.5.**

1. Montrer par récurrence, que pour tout $k \geqslant 1$, $\ln^{(k)}(x) = \dfrac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^k}$
2. En déduire le $DL_n(1)$ de ln.
   On fera attention que le calcul n'est pas en 0 *cette fois-ci.*

▷ **Exercice 2.6.**

1. Donner le $DL_{2n}(0)$ de $g : x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$.
2. Quel est le lien entre arctan et g ?
3. En déduire le $DL_{2n+1}(0)$ de arctan

On exploite l'unicité d'un $DL_n(0)$

▷ **Exercice 2.7.** Soit $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^∞.
Montrer que $(fg)^{(k)}(0) = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f^{(i)}(0) g^{(k-i)}(0)$.

2.3 Développement limité de fonctions usuelles en d'autres points

En d'autres points que les points usuels associés aux fonctions usuelles, on exploite des savoir-faire vue en cours. En résumé, il faut exploiter les propriétés de morphismes (ou presque) en 1 pour ln et en 0 pour toutes les autres.

▷ **Exercice 2.8.**

1. Donner le $DL_n(a)$ de exp (sans exploiter la dérivée, mais directement un changement de variable.)
2. Donner le $DL_n(a)$ de ch (sans exploiter la dérivée, mais directement un changement de variable.)
3. Donner le $DL_n(a)$ de cos et sin (sans exploiter la dérivée, mais directement un changement de variable.)

▷ **Exercice 2.9.** Donner le $DL_n(a)$ de ln (sans exploiter la dérivée, mais directement un changement de variable.)

3 Synthèse calculatoire

3.1 Produit

Il s'agit de exploiter de ce qu'on vient de voir. La stratégie est :

1. On reconnait les fonctions (qui opèrent)
2. On reconnait les points autour duquel vers le développement
3. On remplace par le polynôme, tronqué à la bonne puissance
4. On pratique le calcul polynomial (tronqué)

5. On garde l'expression polynomiale obtenue

Pour le moment, on ne fait pas de composition de DL (et donc pas de division).

▷ **Exercice 3.1.** — Calculer le $DL_5(0)$ de $\ln(3x+1)$
— Calculer le $DL_3(0)$ de $\exp(3x+x^2)$
— Calculer le $DL_5(\frac{pi}{2})$ de $\cos(3x)$

▷ **Exercice 3.2.** — Calculer le $DL_5(0)$ de $\exp(2+3x)$
— Calculer le $DL_3(2)$ de $\sin(\pi x)$
— Calculer le $DL_4(e)$ de $\ln(x)$.

3.2 Division

La division des DL est en fait un cas particulier de la composition qu'on étudiera ensuite. C'est la composition avec $x \mapsto \frac{1}{1+x}$.
La visée est donc de mettre le terme dominant en facteur, au dénominateur. Mais évidemment, il faut commencer par simplifier la fraction.
Ainsi, sur cet exemple, on fait les opérations suivantes :

$$\frac{x^2-x^4+x^5+x^5\epsilon_1(x)}{2x+x^3-x^4+x^5\epsilon_2(x)} = \frac{x-x^3+x^4+x^4\epsilon_1(x)}{2+x^2-x^3+x^4\epsilon_2(x)} = (x-x^3+x^4+x^4\epsilon(x))\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x^3+x^4\epsilon_3(x))^{-1}$$

On se trouve au final en présence d'un calcul du type $(1+u)^{-1}$ pour $u \to 0$, on rappelle que

$$(1+u)^{-1} = 1-u+u^2-u^3+\cdots+(-1)^n u^n + u^n\epsilon(u)$$

▷ **Exercice 3.3.** Donne le $DL_5(0)$ de tan

▷ **Exercice 3.4.** Donner le $DL_3(1)$ de $x \mapsto \frac{x^3-1}{x^4-1}$

3.3 Dans tous les sens !

En posant $u = \frac{1}{x}$, on peut généraliser la notion de DL au voisinage de $+\infty$

▷ **Exercice 3.5.** Calculer les développements limités suivants :

1. $\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}}$, à l'ordre 3 en $+\infty$.
2. $\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\ln x$, à l'ordre 4 en $+\infty$.

On peut chercher par système à inverser le DL_n d'une fonction réciproque

▷ **Exercice 3.6.** On pose $f(x) = x\exp(x^2)$.

1. Démontrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
2. Justifier que f^{-1} admet un développement limité à l'ordre 4 en 0
3. Donner ce développement

▷ **Exercice 3.7.** Trouver le DL à l'ordre 5 de tan, en exploitant celui de arctan

▷ **Exercice 3.8.** Calculer les DL suivants :

1. $\ln\frac{\sin x}{x}$ à l'ordre 4 en 0
2. $\exp(\sin x)$ à l'ordre 4 en 0
3. $(\cos x)^{\sin x}$ à l'ordre 5 en 0
4. $x(\text{ch}x)^{1/x}$ à l'ordre 4 en 0

Correction des exercices

▷ Corrigé de l'exercice 1.1
$f+g : x \mapsto 3+2x-2x^2+3x^3+x^4$.
$f\times g : x \mapsto 2+3x-2x^2+x^3+6x^4$.

▷ Corrigé de l'exercice 1.2

1.
2. On trouve $[f+g]_k = [f]_k + [g]_k$, et de manière générale, cette opération est linéaire.
3. On a le produit de Cauchy : $[f\times g]_k = \displaystyle\sum_{i=0}^{k}[f]_i[g]_{k-i} = \sum_{i+j=k}[f]_i[g]_j$, valable même si les coefficients sont nuls.

▷ Corrigé de l'exercice 1.3

1. $\big(f(x)\big)^2 = 1+2x+3x^2+4x^3+3x^4+2x^5+x^6$ et $\big(f(x)\big)^4 = 1+4x+10x^2+20x^3+31x^4+40x^5+44x^6+40x^7+31x^8+20x^9+10x^{10}+4x^{11}+x^{12}$.
2. $f(x)\times g(x) = 1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{10}-11x^{11}$, puis $f^2(x)\times g(x) = 1-12x^{11}+11x^{12}$

▷ Corrigé de l'exercice 1.4
$f\circ g : x \mapsto 2+(1+x-x^2)-(1+2x-x^2-2x^3+x^4) = 2-x+2x^3-x^4$.
$g\circ f : x \mapsto 1+(2+x-x^2)-(4+4x-3x^2-2x^3+x^4) = -1-3x+2x^2+2x^3-x^4$

▷ Corrigé de l'exercice 1.5

— $\tau_k(f+g) : x \mapsto \displaystyle\sum_{i=0}^{k}[f+g]_i(x) = \left(\sum_{i=0}^{k}[f]_i + \sum_{i=0}^{k}[g]_i\right)(x) = \left(\tau_k(f)+\tau_k(g)\right)(x)$

— $\tau_k(f\times g) : x \mapsto \displaystyle\sum_{i=0}^{k}[f\times g]_i(x) = \left(\sum_{i=0}^{k}\sum_{h=0}^{i}([f]_h[g]_{i-h}\right)(x)$ Dans ce dernier calcul, on ne trouve aucun nombre issu de f ou de g avec un indice $\geqslant k$.
On peut donc ne pas en tenir compte. Mais ce n'est pas suffisant car $\tau_k(f)\times\tau_k(g)$ est de degré $2k$. On garde donc la troncature.
$\tau_k(f\times g) = \tau_k(\tau_k(f)\times\tau_k(g))$.

— Finalement, on ne peut pas faire beaucoup mieux que $\tau_k(f\circ g) = \tau_k(\tau_k(f)\circ\tau_k(g))$

On propose de faire les calculs normalement avec $\tau_k(f)$ composé avec $\tau_k(g)$, et de faire disparaitre les x^h pour $h>k$, à chaque fois qu'on en rencontre

▷ Corrigé de l'exercice 1.6 On a

$$\tau_3((1+x+x^2+x^3)\circ(1-x^2)) = \tau_3(1+(1-x^2)+(1-2x^2+\ldots)+(1-3x^2+\ldots)) = 4-6x^2$$

$$\tau_3((1-x^2)\circ(1+x+x^2+x^3)) = \tau_3(1-(1+2x+3x^2+4x^3+\ldots)) = -2x-3x^2-4x^3$$

▷ Corrigé de l'exercice 1.7 On a

$$\tau_3((1-x+x^2-x^3)\circ(1+x^2)) = \tau_3(1-(1+x^2)+(1+2x^2+\ldots)-(1+3x^2+\ldots)) = 1-2x^2$$

$$\tau_3((1+x^2)\circ(1-x+x^2-x^3)) = \tau_3(1+(1-2x+3x^2-4x^3+\ldots)) = 2-2x+3x^2-4x^3$$

▷ Corrigé de l'exercice 2.1

1. Pour tout $x\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}$, $(1-x)\displaystyle\sum_{k=0}^{n}x^k = 1-x^{n+1}$.
   Si $x\neq 1$: $\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}x^k + \dfrac{x^{n+1}}{1-x}$
2. Avec $\epsilon : x \mapsto \dfrac{x}{1-x}$, on a la solution.

▷ Corrigé de l'exercice 2.2

1. Si $f : x \mapsto \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, alors $f^{(k)}(x) = \sum_{i=k}^{n} i(i-1)\cdots(i-k+1)a_i x^{i-k} = \sum_{j=0}^{n-k} \frac{(j+k)!}{j!} a_{j+k} x^j$.

   Donc $f^{(k)}(0) = \frac{k!}{0!} a_k$ $(j=0)$.

   Ainsi $[f]_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$.

2. C'est $f : x \mapsto 1 + x - \frac{1}{6}x^3$.

3. $(x \mapsto x^n)^{(i)}(0) = \frac{[x^n]_i}{n!} = \frac{1}{n!}$ si $i = n$ et 0 sinon.

▷ Corrigé de l'exercice 2.3

1. $T^{(k)}(x) = \varphi^{(k)}(0) - f^{(k)}(0)$.
   D'après l'exercice précédent : $T^{(k)}(0) = \varphi^{(k)}(0) - k![f]_k$.

2. Il est nécessaire de donner la valeur $[f]_k = \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}$

3. Si $\{k \leqslant n \mid [f]_k \neq \frac{varphi^{(k)}(0)}{k!}\}$ est non vide, il admet un plus petit élément k_0.
   On a alors pour tout $i < k_0$, $(\varphi - f)^{(i)}(0) = 0$ et $(x \mapsto x^n)^{(i)}(0) = 0$ Ainsi la limite pour $x \to 0$ de $\frac{T^{(i)}(x)}{(x \mapsto x^n)^{(i)}(x)}$ est une forme indéterminée.
   Et en revanche $\frac{T^{(k_0)}(x)}{(x \mapsto x^n)^{(k_0)}(x)}$ admet une limite infinie pour $x \to 0$. Donc, avec la règle de L'Hospital :

$$\forall\ i \leqslant k_0 \lim_{x\to 0} \frac{\varphi(x) - f(x)}{x^n} = \lim_{x\to 0} \frac{T^{(i)}(x)}{(x \mapsto x^n)^{(i)}(x)} = \infty$$

   Mais, si $\{k \leqslant n \mid [f]_k \neq \frac{varphi^{(k)}(0)}{k!}\}$ est vide, alors

$$\lim_{x\to 0} \frac{\varphi(x) - f(x)}{x^n} = \lim_{x\to 0} \frac{\varphi^{(n)}(0) - a_n}{n!} = 0$$

▷ Corrigé de l'exercice 2.4

1. On note $y = \exp$, on a $y' = y$.
2. Par récurrence immédiate : $y^{(n)} = y = \exp$ et donc $\exp^{(n)}(0) = e^0 = 1$.

   Donc pour x proche de 0, $\exp(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k + x^n \epsilon(x)$.

3. Par linéarité de la dérivation (ou du calcul polynomial) ou par périodicité des dérivées :

   Pour x proche de 0, $\operatorname{ch}(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{1}{(2k)!} x^{2k} + x^n \epsilon(x)$

   Pour x proche de 0, $\operatorname{sh}(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1} + x^n \epsilon(x)$

4. Notons $E : x \mapsto e^{ix}$, on a $E^{(n)} = i^n e^{ix} = e^{ix + n\frac{\pi}{2}} = \cos(x + n\frac{\pi}{2}) + i\sin(x + n\frac{\pi}{2})$.
   En prenant les parties réelles et imaginaires :

   Pour x proche de 0, $\cos(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \frac{1}{(2k)!} x^{2k} + x^n \epsilon(x)$

   Pour x proche de 0, $\sin(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1} + x^n \epsilon(x)$

▷ Corrigé de l'exercice 2.5

1. Par récurrence immédiate. Attention, on commence à $k = 1$

2. On a ensuite $\ln^{(k)}(1) = (-1)^{k-1}(k-1)!$ et donc $\frac{\ln^{(k)}(1)}{k!} = \frac{(-1)^{k-1}}{k}$. Donc pour x proche de 1, $\ln(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k}(x-1)^k + (x-1)^n \epsilon(x)$. On préfère : pour $u (= x-1)$ proche de 0, $\ln(1+u) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k} u^k + u^n \overline{\epsilon}(u)$

▷ **Corrigé de l'exercice 2.6**

1. Vu plus haut : $\dfrac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + x^{2n}\epsilon(x)$.
   Notons pour la suite $a_k = (-1)^{k/2}$ si k est pair et $a_k = 0$ sinon.
2. $\arctan' = g$
3. $\arctan^{(k+1)}(0) = g^k(0)$.
   Donc par unicité d'écriture (puisque g et arctan sont $\mathcal{C}^\infty$:

$$\arctan(x) = \arctan(0) + \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k!}\arctan^{(k)}(0)x^k + x^{2n+1}\epsilon(x) = 0 + \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k!} g^{(k-1)}(0)x^k + x^{2n+1}\epsilon(x) = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(k-1)!}{k!} a_{k+1}x^k + x^{2n+}$$

$$\arctan(x) = \sum_{h=1}^{n} \frac{(-1)^h}{2h} x^{2h+1} + x^{2n+1}\epsilon(x)$$

▷ **Corrigé de l'exercice 2.7** Par unité du $DL_k(0)$ de $f \times g$, on a :

$$(fg)(x) = \sum_{i=0}^{k} \frac{(fg)^{(i)}(0)}{i!} + x^k\epsilon(x) = \tau_k\left(\left(\sum_{h=0}^{k} \frac{f^{(h)}(0)}{h!}x^h\right)\left(\sum_{h=0}^{k} \frac{g^{(h)}(0)}{h!}x^h\right)\right) + x^k\epsilon_1(x) = \sum_{i=0}^{k}\sum_{h=0}^{i} \frac{f^{(h)}(0)}{h!}\frac{g^{(i-h)}(0)}{(i-h)!}x^i + x^k\epsilon_2(x)$$

Par unicité, on peut identifier :

$$(fg)^{(k)}(0) = k!\sum_{i=0}^{k} \frac{f^{(i)}(0)g^{(k-i)}(0)}{i!(k-!)!} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f^{(i)}(0)g^{(k-i)}(0)$$

▷ **Corrigé de l'exercice 2.8**

1. Pour h proche de 0 :
$$e^{a+h} = e^a e^h = e^a\left(1 + h + \frac{1}{2}h^2 + \cdots + \frac{1}{n!}h^n\right) + h^n\epsilon(h)$$
   Ou bien, en posant $h = x - a$: $e^x = e^a + e^a(x-a) + \dfrac{e^a}{2}(x-a)^2 + \cdots + \dfrac{e^a}{n!}(x-a)^n + (x-a)^n\overline{\epsilon}(x)$.
2. $\mathrm{ch}(a+h) = \mathrm{ch}(a)\mathrm{ch}(h) + \mathrm{sh}(a)\mathrm{sh}(h) = \mathrm{ch}(a) + \mathrm{sh}(a)h + \dfrac{\mathrm{ch}(a)}{2}h^2 + \cdots + \dfrac{\mathrm{ch}(a)}{(2k)!}h^{2k} + \dfrac{\mathrm{sh}(a)}{(2k+1)!}h^{2k+1} + h^{2k+1}\epsilon(h)$
3. $\cos(a+h) = \cos(a)\cos(h) + \sin(a)\sin(h) = \cos(a) + \sin(a)h - \dfrac{\cos(a)}{2}h^2 + \cdots + \dfrac{(-1)^k\cos(a)}{(2k)!}h^{2k} + \dfrac{(-1)^k\sin(a)}{(2k+1)!}h^{2k+1} + h^{2k+1}\epsilon(h)$

▷ **Corrigé de l'exercice 2.9** Soit $a > 0$ et h tel que $a + h > 0$.

$$\ln(a+h) = \ln(a(1+\frac{h}{a}) = \ln a + \ln(1+\frac{h}{a}) = \ln a + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{ka^k}h^k + h^n\epsilon(h)$$

Ou bien, en posant $h = x - a$: $\ln(x) = \ln a + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{ka^k}(x-a)^k + (x-a)^n\overline{\epsilon}(x)$.

▷ **Corrigé de l'exercice 3.1**

— Pour x proche de 0 :

$$\ln(1+3x) = 3x - \frac{(3x)^2}{2} + \frac{(3x)^3}{3} - \frac{(3x)^4}{4} + \frac{(3x)^5}{5} + x^5\epsilon(x) = 3x - \frac{9}{2}x^2 + 9x^3 - \frac{81}{4}x^4 + \frac{243}{5}x^5 + x^5\epsilon(x)$$

— Pour x proche de 0 :

$$\exp(3x + x^2) = \tau_3\left(1 + (3x+x^2) + \frac{(3x+x^2)^2}{2} + \frac{(3x+x^2)^3}{6}\right) + x^3\epsilon(x) = 1 + 3x + \frac{11}{2}x^2 + \frac{15}{2}x^3 + x^3\epsilon(x)$$

— Pour x proche de $\dfrac{\pi}{2}$, ou $h(= x - \dfrac{\pi}{2})$ proche de 0 :

$$\cos(3x) = \cos(3(\frac{\pi}{2}+h)) = -\sin(h) = -h + \frac{1}{6}h^3 - \frac{1}{120}h^5 + h^5\epsilon(h) = -(x-\frac{\pi}{2}) + \frac{1}{6}(x-\frac{\pi}{2})^3 + \frac{1}{120}(x-\frac{\pi}{2})^5 + (x-\frac{\pi}{2})^5\overline{\epsilon}(x)$$

▷ Corrigé de l'exercice 3.2

— Pour x proche de 0 :

$$\exp(2+3x) = e^2\exp(3x) = e^2 + 3e^2x + \frac{9e^2}{2}x^2 + \frac{9e^2}{2}x^3 + \frac{27e^2}{8}x^4 + \frac{135e^2}{40}x^5 + x^5\epsilon(x)$$

— Pour x proche de 2, ou $h(= x-2)$ proche de 0 :

$$\sin(\pi x) = \sin(2\pi + h\pi) = \sin(h\pi) = \pi h - \frac{\pi^3}{6}h^3 + h^3\epsilon(h) = \pi(x-2) - \frac{\pi^3}{6}(x-2)^3 + (x-2)^3\overbrace{\epsilon}(x)$$

— Pour x proche de e, ou $h(= x-e)$ proche de 0 :

$$\ln(x) = \ln(h+e) = \ln(e(1+\frac{h}{e})) = 1+\ln(1+\frac{h}{e}) = 1+\frac{h}{e}-\frac{1}{2e^2}h^2+\frac{1}{3e^3}h^3-\frac{1}{4e^4}h^4+h^4\epsilon(h) = 1+\frac{1}{e}(x-e)-\frac{1}{2e^2}(x-e)^2+\frac{1}{3e^3}(x-e)^3$$

▷ Corrigé de l'exercice 3.3

Pour x proche de 0,

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + x^5\epsilon(x)}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^5\epsilon(x)} = \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + x^5\epsilon(x)\right)\left(1 + \underbrace{-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^5\epsilon(x)}_{=u}\right)^{-1}$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + x^5\epsilon(x)\right)\left(1 - (-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}) + (-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24})^2 + 0 + x^5\epsilon(x)\right)$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + x^5\epsilon(x)\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24}) + x^5\epsilon(x)\right) = x + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right)x^3 + \left(\frac{5}{24} - \frac{1}{12} + \frac{1}{120}\right)x^5 + x^5\epsilon(x)$$

$$\tan(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + x^5\epsilon(x)$$

▷ Corrigé de l'exercice 3.4

On pose $u = x-1$, on a donc

$$\frac{x^3-1}{x^4-1} = \frac{u^3-3u^2+3u}{u^4-4u^3+6u^2-4u} = \frac{3-3u+u^2}{-4+6u-4u^2+u^3} = \frac{-1}{4}(3-3u+u^2)(1-\frac{3}{2}u+u^2-\frac{1}{4}u^3)^{-1}$$

Or

$$(1-\frac{3}{2}u+u^2-\frac{1}{4}u^3)^{-1} = 1 + \frac{3}{2}u + (1+\frac{9}{4})u^2 + (-\frac{1}{4} - 3 - \frac{27}{8})u^3 + u^3\epsilon(u)$$

$$= 1 + \frac{3}{2}u + \frac{13}{4}u^2 - \frac{43}{8}u^3 + u^3\epsilon(u)$$

Et donc, pour x proche de 1 et donc u proche de 0 :

$$\frac{x^3-1}{x^4-1} = \frac{-1}{4}(3-3u+u^2)(1+\frac{3}{2}u+\frac{13}{4}u^2-\frac{43}{8}u^3+u^3\epsilon(u)) = -\frac{3}{4} - \frac{3}{8}u - \frac{25}{16}u^2 + \frac{195}{32}u^3 + u^3\epsilon(u)$$

▷ Corrigé de l'exercice 3.5

1. Il existe ϵ continue et de valeur nulle en 0 telle que : $\dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}} = 1 + \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2x^2} + \dfrac{1}{2x^3} + \dfrac{1}{x^3}\epsilon(\dfrac{1}{x})$
2. Il existe ϵ continue et de valeur nulle en 0 telle que : $\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \ln x = \ln 2 + \dfrac{1}{4x^2} - \dfrac{3}{32x^4} + \dfrac{1}{x^4}\epsilon(\dfrac{1}{x})$

▷ Corrigé de l'exercice 3.6

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (2x^2+1)\exp(x) > 0$.
   Donc f est continue, strictement croissante. Elle établit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]\lim_{-\infty} f, \lim_{+\infty} f[=]-\infty,+\infty[=\mathbb{R}$.
2. La fonction f' ne s'annule jamais, donc f^{-1} est de classe C^∞ comme f.
   Ainsi f^{-1} admet un développement limité à l'ordre 4 en 0

3. On peut supposer que $f^{-1}(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + x^4\epsilon(x)$, pour x proche de 0..
   Or $0 = f(0)$. On cherche donc un $DL_4(0)$ de f : $f(x) = x\left(1 + x^2 + x^3\epsilon(x)\right) = x + x^3 + x^4\epsilon(x)$.
   On a alors, pour x proche de 0 :

   $$x = f^{-1}(f(x)) = a_0+a_1(x+x^3)+a_2(x^2+2x^4)+a_3x^3+a_4x^4+x^4\epsilon(x) = a_0+a_1x+a_2x^2+(a_1+a_3)x^3+(2a_2+a_4-x^4+x^4\epsilon(x) =$$

   Par unicité :
   $$\left\{\begin{array}{rl} a_0 & = 0 \\ a_1 & = 1 \\ a_2 & = 0 \\ a_1 + a_3 & = 0 \\ 2a_2 + a_4 & = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ll} a_0 & = 0 \\ a_1 & = 1 \\ a_2 & = 0 \\ a_3 & = -1 \\ a_4 & = 0 \end{array}\right.$$

   Donc, pour x proche de 0, $f^{-1}(x) = x - x^3 + x^4\epsilon(x)$.

▷ Corrigé de l'exercice 3.7

$\tan(0) = 0$, donc on exploite des $DL_5(0)$ pour les deux fonctions.
On note que par imparité des ces fonctions, le DL est également impair.
Supposons que $\tan(x) = a_1x + a_3x^3 + a_5x^5 + x^5\epsilon(x)$.
Puis $\arctan(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + x^5\epsilon(x)$.
On a donc :

$$x = a_1(x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5) + a_3(x^3 - x^5) + a_5x^5 + x^5\epsilon(x) = a_1x + (a_3 - \frac{1}{3}a_1)x^3 + (a_5 - a_3 + \frac{1}{5}a_1)x^5 + x^5\epsilon(x)$$

Par identification : $a_1 = 1$, $a_3 = \frac{1}{3}$ puis $a_5 = a_3 - \frac{1}{5}a_1 = \frac{2}{15}$.
Donc $\tan(x) = x + \frac{1}{3}x + \frac{2}{15}x^5 + x^5\epsilon(x)$.

▷ Corrigé de l'exercice 3.8

1. $\ln\frac{\sin x}{x} = -\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{180} + x^4\epsilon(x)$.
2. $\exp(\sin x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + x^4\epsilon(x)$.
3. $(\cos x)^{\sin x} = 1 - \frac{x^3}{2} + x^5\epsilon(x)$.
4. $x(\text{ch}x)^{1/x} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{8} - \frac{x^4}{16} + x^4\epsilon(x)$.