

## Majorations, minorations, inégalités & encadrements...

Pour l'ensemble de ce TD, nous nous plaçons dans un ensemble ordonné.  
Dans la plupart des exercices, il s'agit de comparer des éléments de  $\mathbb{R}$ .

### 1 Réflexes de manipulations algébriques

#### 1.1 Comparaisons et manipulations grossières

Les règles de calculs suivantes correspondent aux premiers réflexes à avoir.

On notera que les premières règles ne donnent pas des équivalences entre inégalités. Elles sont parfois suffisantes mais souvent elles doivent être localement améliorées.

Ainsi, lorsqu'après une série de calculs, on obtient une inégalité pas assez précise, il faut penser à revenir aux exploitations de telles règles : c'est toujours là qu'on peut faire mieux !

$$- \begin{cases} a \leq b \\ a' \leq b' \end{cases} \implies a + a' \leq b + b'$$

$$- \begin{cases} a \leq b \\ \lambda > 0 \end{cases} \implies \lambda a \leq \lambda b.$$

$$- \text{ Si } a, b > 0, \text{ alors : } a < b \iff \sqrt{a} < \sqrt{b}.$$

$$\text{ Si } a, b > 0, \text{ alors : } a < b \iff a^2 < b^2.$$

$$\text{ Si } a, b < 0, \text{ alors : } a < b \iff a^2 > b^2.$$

$$\text{ Si } a, b > 0, \text{ alors : } a < b \iff \frac{1}{a} > \frac{1}{b}.$$

$$\text{ Si } a, b < 0, \text{ alors : } a < b \iff \frac{1}{a} > \frac{1}{b}.$$

En revanche, on ne peut rien dire entre  $\frac{1}{a}$  et  $\frac{1}{b}$  si  $a < 0 < b$ .

Ces dernières inégalités seront généralisées plus loin...

▷ **Exercice 1.1.**

1. Si on veut majorer  $a - b$ , quelles majorations/minoration cherche-t-on à exploiter ?
2. Si on veut majorer  $\lambda a$ , avec  $\lambda < 0$ , quelles majorations/minoration cherche-t-on à exploiter ?
3. Si on veut majorer  $\frac{a}{b}$ , quelles majorations/minoration cherche-t-on à exploiter ?

▷ **Exercice 1.2.**

$$1. \text{ Démontrer que } \begin{cases} 2 \leq a \leq 3 \\ 1 \leq b \leq 2 \end{cases} \implies 2 \leq a^2 - \frac{2}{b} \leq 8$$

2. Ordonner les nombres  $x, x^2, \sqrt{x}$ .

3. Donner l'exemple de nombres  $a, b \in \mathbb{R}$  tel que  $a < b$  et  $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

▷ **Exercice 1.3.**

1. Donner les propositions équivalentes à  $a \leq \sqrt{b}$  et à  $\sqrt{b} \leq a$ .
2. Démontrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}, x - \sqrt{x^2 + a^2} \leq 0$ .
3. Quel est le signe de  $x + \sqrt{x^2 + a^2}$  ?
4. Résoudre les inéquations  $x - 2 \leq \sqrt{x - 1}$  et  $\sqrt{x^2 - 4} \leq x - 4$ .

#### 1.2 Comparaison à zéro

Une première idée, simple, mais à laquelle on ne pense pas souvent : revenir à une comparaison à zéro. Cette règle peut se présenter dans les deux situations suivantes (avec équivalence)

$$- a \leq b \iff 0 \leq b - a$$

— Si  $\forall i \in \mathbb{N}_k, a_i \geq 0$ , alors  $\sum_{i=1}^k a_i = 0 \iff \forall i \in \mathbb{N}_k, a_i = 0$

▷ **Exercice 1.4.** Montrer que pour tout  $x, y \in \mathbb{R}_+$ ,  $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$ .

▷ **Exercice 1.5.** Montrer que pour tout  $x, y \in \mathbb{R}_+$ ,  $\frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} \leq \sqrt{xy}$ .

▷ **Exercice 1.6.** Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (a_i^2 + b_i^2) \geq \sum_{i=1}^n a_i b_i$ .

A quelle(s) condition(s) y a-t-il égalité ?

### 1.3 Inégalités et manipulation de valeurs absolues

On rappelle que pour  $a$  réel :  $|a| = \max(a, -a)$ .

1. En premier réflexe, on peut commencer par se débarrasser des valeurs absolues :

$$|a| \leq h \iff -h \leq a \leq h$$

2. On peut aussi rencontrer des problèmes du type  $|f(x)| \leq |g(x)|$ , il suffit alors de faire une étude par intervalles : trouver les intervalles  $I_{+,+}$  où  $f \geq 0$  et  $g \geq 0$ ,  $I_{+,-}$  où  $f \geq 0$  et  $g < 0$ ,  $I_{-,+}$  où  $f < 0$  et  $g \geq 0$  et  $I_{-,-}$  où  $f < 0$  et  $g < 0$ . On réalise ensuite une étude sur chacun des intervalles  $I$  où l'on remplace  $|f|$  par  $f$  ou  $-f$ ...

3. Pour une addition (ou soustraction) de plusieurs nombres dans une même valeur absolue, on exploite souvent l'inégalité triangulaire

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad ||a| - |b|| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|$$

4. Pour un produit, la règle est simple :  $|a \times b| = |a| \times |b|$

▷ **Exercice 1.7.** Pour  $x = (x_i) \in \mathbb{R}^n$ , on note  $N_1(x) = \sum_{i=1}^n |x_i|$ ,  $N_2(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$  et  $N_\infty(x) = \max_{i \in \mathbb{N}_n} |x_i|$ .

Démontrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $N_\infty(x) \leq N_2(x) \leq N_1(x) \leq nN_\infty(x)$ .

▷ **Exercice 1.8.** Résoudre  $|x^2 + 2x - 3| + |x + 1| \leq |x - 3|$

▷ **Exercice 1.9.** On suppose que  $2 \leq |a| \leq 4$  et  $5 \leq |b| \leq 6$ .

Encadrer  $|a + b|$ ,  $|a + 2b|$ ,  $|a - 2b|$ ,  $\frac{a^2|b+1|}{|a-2b|}$ .

### 1.4 Inégalités et parties entières

On note  $[x]$  la partie entière de  $x$ , c'est-à-dire le plus grand parmi les entiers plus petit que  $x$ .

On note  $\theta(x) = x - [x]$  sa partie décimale (ou fractionnaire). On exploite très souvent l'encadrement :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x - 1 < [x] \leq x < [x] + 1$$

Parfois, il est plus pratique de raisonner sur la partie décimale :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \theta(x) \in [0, 1[$$

Notons l'identification possible (par unicité d'écriture) : si  $x = a + b$  avec  $a \in \mathbb{Z}$  et  $b \in [0, 1[$ , alors  $a = [x]$  et  $b = \theta(x)$ .

▷ **Exercice 1.10.**

1. Montrer que pour tous réels  $x$  :  $[x + 1] = [x] + 1$ .
2. Montrer que pour tous réels  $x, y$  :  $[x] + [y] \leq [x + y]$ .
3. Montrer que pour tous réels  $x, y$  :  $[x] + [y] + [x + y] \leq [2x] + [2y]$ .

▷ **Exercice 1.11.** Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{[x] + [2x] + \dots + [nx]}{n^2}$ .

## 2 Manipulations fonctionnelles

### 2.1 Croissance de $f$

Si  $f$  est croissante sur  $I$  alors :  $a \leq b (\in I) \implies f(a) \leq f(b)$

Si  $f$  est strictement croissante sur  $I$  alors :  $a < b (\in I) \implies f(a) < f(b)$

On peut améliorer en comparant deux fonctions :

Si  $(f - g)' \geq 0$  sur  $I = [a, b]$  et pour  $x_0 \in I$ ,  $f(x_0) = g(x_0)$

alors  $f(x) \leq g(x)$  sur  $[a, x_0]$  et  $f(x) \geq g(x)$  sur  $[x_0, b]$ .

Pour démontrer ce dernier résultat, on peut exploiter le premier résultat dans le cas  $f - g$  croissante sur  $[a, b]$ , nulle en  $x_0$ , donc négative sur  $[a, x_0]$  et positive sur  $[x_0, b]$ .

▷ **Exercice 2.1.** A-t-on l'équivalence :  $f$  est croissante sur  $I \iff a \leq b (\in I) \implies f(a) \leq f(b)$

▷ **Exercice 2.2.** Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ ,  $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$

Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ ,  $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$ .

### 2.2 Inégalité des accroissements finis, ou inégalité de la moyenne

Si  $f$  est continue sur  $I = [a, b]$ . Alors  $\min_{[a,b]} f \times (b-a) \leq \int_a^b f(t) dt \leq \max_{[a,b]} f \times (b-a)$

Nous verrons en cours, que si  $f$  est continue sur  $[a, b]$ , alors les notations  $\min_{[a,b]} f$  et  $\max_{[a,b]} f$  ont bien un sens

De manière presque équivalente :

Si  $f$  dérivable sur  $]a, b[$ , continue sur  $[a, b]$ , et que  $m \leq f' \leq M$ , alors  $m \times (b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$ .

Avec des valeurs absolues :

Si  $f$  dérivable sur  $]a, b[$ , continue sur  $[a, b]$ , et que  $|f'| \leq M$ , alors  $|f(b) - f(a)| \leq M|b-a|$ .

▷ **Exercice 2.3.** Démontrer que  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}$ .

▷ **Exercice 2.4.** Démontrer que  $\forall a, b \in \mathbb{R}$ ,  $|\sin a - \sin b| \leq |a - b|$ .

▷ **Exercice 2.5.** Démontrer que si  $0 < a < b$ ,  $\sqrt[3]{1+b} - \sqrt[3]{1+a} \leq \frac{1}{3}(b-a)$ .

▷ **Exercice 2.6.** En utilisant l'inégalité des accroissements finis, démontrer qu'il existe un réel  $C$  tel que :

$$\forall u \in [0, 1[, \left| \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} - \frac{1}{\sqrt{2(1-u)}} \right| \leq C\sqrt{1-u}$$

### 2.3 Convexité de $f$

Si  $f$  est convexe (dont une condition suffisante est  $f'' > 0$ ) sur  $I$  :

alors  $\forall a \leq b (\in I)$ ,  $\lambda \in [0, 1]$ , on a  $f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b)$  (Inégalité des cordes)

Si  $f$  est convexe, dérivable, on a également l'inégalité des tangentes :

alors  $\forall a, b \in I$ , on a  $f'(a) \times (b-a) \leq f(b) - f(a)$  (Inégalité des tangentes)

▷ **Exercice 2.7.** Montrer que pour tout  $x \in ]-1, +\infty[$ ,  $x \geq \ln(1+x)$

Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x \leq e^x$

Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ ,  $x \leq \operatorname{sh} x$ .

▷ **Exercice 2.8.** Encadrer  $x^2$  sur  $[0, 1]$  par sa tangente en 1 et sa corde. Encadrer  $\sqrt{1+x}$  sur  $[0, 1]$  par sa tangente et sa corde en 0 et en 1.

### 3 Inégalités avec des suites

#### 3.1 Retour du télescopage

On rappelle l'inégalité suivante vu sur la fiche du télescopage :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n \leq \alpha_n \quad \implies \quad u_n \leq u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k$$

▷ **Exercice 3.1.** En exploitant une égalité vue plus haut (exercice ??), calculer la limite de  $(P_n) = \left( \prod_{k=1}^n \left( 1 + \frac{k}{n^2} \right) \right)_n$ .

#### 3.2 Conservation de l'inégalité par passage à la limite

$(u_n)$  et  $(v_n)$  convergentes et  $\forall n \geq N : u_n \leq v_n \implies \lim(u_n) \leq \lim(v_n)$ .

▷ **Exercice 3.2.** On pose pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ .

1. Démontrer que la suite  $(S_n)$  est croissante.
2. Démontrer que pour tout entier  $k \geq 2 : \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$
3. La suite  $(S_n)$  est-elle convergente ?

#### 3.3 Exploiter une inégalité

Cette dernière règle est plutôt « l' » exploitation des inégalités qu'une façon de les démontrer.

$(u_n)$  et  $(w_n)$  convergentes et  $\forall n \geq N : u_n \leq v_n \leq w_n$

Et  $\lim(u_n) = \lim(w_n) \implies (v_n)$  converge et  $\lim(v_n) \leq \lim(u_n)$ .

▷ **Exercice 3.3.** Soit  $u_n = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$ , pour  $n \in \mathbb{N}$ .

Encadrer  $u_n$  et en déduire la convergence de  $(u_n)$  et sa limite.

### 4 Inégalités avec plusieurs variables inconnues

Ce qui caractérise les inégalités suivantes c'est qu'elles reposent sur un grand nombre de points  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , sans que l'un ne soit particulièrement spécifié.

#### 4.1 Retour de la convexité

Si  $f$  est convexe sur  $I \subset \mathbb{R}$  (cf 2.4.), on a

$$\forall x_1 < x_2 < \dots < x_n \in I, \forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in [0, 1]^n \text{ tel que } \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, \quad f \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$$

On appelle cette inégalité, l'inégalité de Jensen.

Elle peut se démontrer, par récurrence à partir de l'inégalité de convexité simple.

On rappelle que si  $f$  est dérivable deux fois, il faut et il suffit que  $f'' \geq 0$  sur  $I$  pour affirmer que  $f$  est convexe.

▷ **Exercice 4.1.** Démontrer l'inégalité de Jensen

▷ **Exercice 4.2.** Soient  $p, r \in \div R_+^*$  tels que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .

1. En exploitant la concavité du logarithme, démontrer l'inégalité de Hölder :

$$\forall (a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}_+^{2n} \quad \sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left( \sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{1/p} \left( \sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{1/q}$$

2. En déduire, par récurrence sur  $n$  l'inégalité de Minkowski :

$$\forall (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}_+^{2n} \quad \left( \sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^p \right)^{1/p} \leq \left( \sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{1/p} + \left( \sum_{i=1}^n y_i^p \right)^{1/p}$$

## 4.2 Inégalités classiques

Voici trois inégalités assez classiques. La première est, d'une certaine façon la mère de toutes. Seules les deux suivantes figurent au programme de MPSI/MP.

1. Inégalité de réarrangement.

Pour tout  $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}_+^n$ ,  $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}_+^n$ , rangés dans l'ordre croissant.

$$\text{Pour tout permutation } \sigma \text{ de } \mathbb{N}_n : \sum_{k=1}^n a_k b_{n-k} \leq \sum_{k=1}^n a_k b_{\sigma(k)} \leq \sum_{k=1}^n a_k b_k.$$

2. Inégalité arithmético-géométrique.

$$\text{Pour tout } a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}_+^n, \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}.$$

3. Inégalité de Cauchy-Schwarz.

$$\text{Pour tout } a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n, b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}.$$

$$\text{Pour tout } f, g \in \mathcal{C}(I), \int_I f(t)g(t)dt \leq \sqrt{\int_I f^2(t)dt} \sqrt{\int_I g^2(t)dt}.$$

► **Exercice 4.3.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

On considère deux suites finies de réels **positifs** :  $a_1, a_2, \dots, a_n$  et  $b_1, b_2, b_n$ .

On suppose que ces suites sont ordonnées :  $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{n-1} < a_n$  et  $b_1 < b_2 < b_3 < \dots < b_{n-1} < b_n$ .

On considère une permutation de  $(b_i)$ , que l'on note  $(c_i)$ .

Autrement écrit ; à tout  $i$  de  $[1, n]$ , correspond un unique  $j$  de  $[1, n]$  tel que  $b_i = c_j$

Avec les  $(c_i)$ , nous avons perdu l'ordre de  $(b_i)$ .

Par la suite, on considère :  $S_c = \sum_{i=1}^n a_i c_i = a_1 c_1 + a_2 c_2 + \dots + a_n c_n$

1. Combien existe-t-il de telles suites  $(c_i)$  possible ?

2. On suppose que  $i$  et  $j$  sont tels que  $b_n = c_j$  et  $b_i = c_n$ .

Quel est le signe de  $a_j c_j + a_n c_n - a_n b_n - a_j b_i$  ?

3. On considère la permutation  $(c'_i)$  obtenue à partir de  $(b_i)$  par :  $\forall h \notin \{j, n\}, c'_h = c_h, c'_j = b_i$  et  $c'_n = b_n$ .  
(Il s'agit bien d'une permutation, car comme  $h \neq n, c_h \neq c_n = b_i$ . On peut prendre  $c'_j = b_i$ ).

$$\text{Montrer que } \sum_{k=1}^n a_k c_k < \sum_{k=1}^n a_k c'_k$$

4. (\*) Démontrer alors, par récurrence sur  $n \geq 2$ , le résultat suivant :

pour toute permutation  $(c_i)$  de  $(b_i)$ , on a

$$\underbrace{\sum_{i=1}^n a_i b_{n-i+1}}_{=S_b} < \underbrace{\sum_{i=1}^n a_i c_i}_{=S_c} < \underbrace{\sum_{i=1}^n a_i b_i}_{=S_b}$$

► **Exercice 4.4.** Démontrer l'inégalité de Tchebychev :  $\frac{\sum_{k=1}^n a_k b_k}{n} \leq \frac{\sum_{k=1}^n a_k}{n} \times \frac{\sum_{k=1}^n b_k}{n}$ , pour  $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $(b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ , rangés dans l'ordre croissant

► **Exercice 4.5.** Démontrer l'inégalité arithmético-géométrique à partir de l'inégalité de réarrangement, en prenant  $c = \sqrt[n]{x_1 \dots x_n}$ , puis  $a_k = \frac{x_1 x_2 \dots x_k}{c^k}$  et  $b_k = \frac{1}{a_k}$ .

► **Exercice 4.6.** Démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz à partir de l'inégalité de réarrangement

On verra une démonstration plus classique au cours de l'année.

## 5 Problèmes d'application

▷ **Exercice 5.1.** Montrer que pour tout  $(t, x) \in [0, 1] \times [-1, 1]$ ,  $2 - x - xt^2 \geq \frac{3}{2}(1 - x)$

▷ **Exercice 5.2.** Soit  $(u_n)$  une suite réelle. On définit la suite  $(v_n)$  par :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $v_n = \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{n}$ .

1. Montrer que si  $(u_n)$  est croissante, alors  $(v_n)$  est également croissante.
2. Montrer que si  $(u_n)$  est majorée, alors  $(v_n)$  est également majorée.
3. Montrer que si  $(u_n)$  est bornée, alors  $(v_n)$  est également bornée.

▷ **Exercice 5.3.** 1. Démontrer que pour tout  $x \in [0, 1]$ ,  $x(1 - x) \in [0, \frac{1}{4}]$ .

2. Soit  $a$  un réel positif. Quel est le maximum du produit  $xy$ , où  $x$  et  $y$  sont deux réels positifs dont la somme vaut  $a$  ?

3. Soient  $a \in \mathbb{N}^*$ ,  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in [0, a]^n$ . Montrer que l'un au moins des produits  $P_n = \prod_{i=1}^n x_i$  et  $Q_n =$

$$\prod_{i=1}^n (a - x_i) \text{ est inférieur à } \left(\frac{a}{2}\right)^n$$

▷ **Exercice 5.4.** On note pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \frac{x^n}{n!} - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ .

1. Calculer  $M_n = \sup_{x \in \mathbb{R}} f_n(x)$ . Quelle est la limite de  $(M_n)$  ?
2. On fixe  $A > 0$ . Calculer  $R_n = \sup_{x \in [0, A]} f_n(x)$ . Quelle est la limite de  $(R_n)$  ?

▷ **Exercice 5.5.** 1. Démontrer que pour tout réel positif  $x$  et pour tout entier  $n \in \mathbb{N}^*$  :  $0 \leq x - n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) \leq \frac{x^2}{2n}$ .

2. Démontrer que, pour tout couple  $(u, v)$  de réels tels que  $u \leq v$ ,  $0 \leq e^v - e^u \leq (v - u)e^v$ .

3. En déduire que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , et pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $0 \leq e^x - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq \frac{x^2}{2n} e^x$ .

4. En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ .

▷ **Exercice 5.6.** Minimiser  $f(x, y, z) = \frac{xyz}{(x+y)(y+z)(x+z)}$  sur  $(\mathbb{R}_+^*)^3$ .

▷ **Exercice 5.7.** Montrer que, pour  $a, b, c, d > 0$ ,  $\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{4}} \geq \sqrt[3]{\frac{abc + abd + acd + bcd}{4}}$ .

## 6 Exercices supplémentaires

# Correction des exercices

## ▷ Corrigé de l'exercice 1.1

1. Il faut majorer  $a$  et minorer  $b$  afin de majorer  $-b$ .  
Puis on applique la règle de l'addition.
2. Comme  $\lambda < 0$ , le sens de l'inégalité sera inversé lors de la multiplication par  $\lambda$ .  
Donc on cherche à minimiser  $a$ .
3. L'application  $b \mapsto \frac{a}{b}$  est décroissante donc, il faut minorer  $b$  par  $b^{\text{prime}}$  (par exemple) et majorer  $a$  par  $B$ .  
On a alors  $\frac{a}{b} \leq \frac{a}{b'} \leq \frac{A}{b'}$ .

## ▷ Corrigé de l'exercice 1.2 emph

1. On a donc, puisque  $a$  est positif ( $a \geq 2 > 0$ ) :  $4 \leq a^2 \leq 9$ .  
De même :  $b$  est positif ( $b \geq 1 > 0$ ) :  $1 \geq \frac{1}{b} \geq \frac{1}{2}$  et donc  $-2 \leq -\frac{2}{b} \leq -\frac{2}{2} = -1$ .  
Par addition :  $4 - 2 = 2 \leq a^2 - \frac{2}{b} \leq 9 - 1 = 8$
2. Si  $x > 1$  :  $x^2 > x > \sqrt{x}$ .  
Si  $x \in ]0, 1[$  :  $x^2 < x < \sqrt{x}$ .  
Si  $x < 0$ , alors  $x < 0 < x^2$  et  $\sqrt{x}$  n'a pas de sens.
3. Par décroissance de  $t \mapsto \frac{1}{t}$  sur  $\mathbb{R}_-$  et sur  $\mathbb{R}_+$ , pour trouver une solution, nous ne pouvons pas nous placer uniquement sur l'un ou l'autre de ces intervalles.  
Donc prenons  $a < 0 < b$ , on a alors  $\frac{1}{a} < 0 < \frac{1}{b}$

## ▷ Corrigé de l'exercice 1.3

1. Sans information supplémentaire sur le signe de  $a$  et  $b$ , on peut supposer  $b > 0$ , sinon on ne pourrait pas écrire  $\sqrt{b}$ .  
On a alors la première équivalence :  $a \leq \sqrt{b} \iff a^2 \leq b$  ou  $a < 0$ .  
En effet, il suffit que  $a < 0$  pour avoir  $a \leq \sqrt{b}$  et sinon, on peut composer par  $x \mapsto x^2$ , croissante sur  $\mathbb{R}_+$ .  
Et la seconde équivalence :  $\sqrt{b} \leq a \iff b \leq a^2$  et  $0 \leq b$  et  $0 \leq a$ .  
En effet, ces deux dernières conditions sont nécessaires. Et elles sont suffisantes pour pouvoir composer par  $\sqrt{\cdot}$ .
2. Si  $x < 0$ , alors  $x - \sqrt{x^2 + a^2}$  est l'addition de deux nombres négatifs. Donc ce nombre est négatif.  
Si  $x \geq 0$ , alors  $\sqrt{x^2 + a^2} \geq \sqrt{x^2} = x$ , donc  $x - \sqrt{x^2 + a^2} \leq 0$ .
3.  $\sqrt{x^2 + a^2} \geq \sqrt{x^2} = |x|$ , donc  $\sqrt{x^2 + a^2} + x \geq |x| + x \geq -x + x = 0$
4. • Pour la première équation, l'ensemble de définition est  $[1, +\infty[$ .  
Si  $x > 2$ , alors  $x - 2 < 0$  et donc nécessairement  $x - 2 \leq \sqrt{x - 1}$ .  
Si  $1 \leq x \leq 2$ , on a l'équivalence :  $x - 2 \leq \sqrt{x - 1} \iff (x - 2)^2 \leq x - 1$ ,  
par composition avec  $u \mapsto u^2$ , croissante sur  $\mathbb{R}_+$ . Et donc :

$$\begin{aligned} x - 2 \leq \sqrt{x - 1} &\iff x^2 - 4x + 4 \leq x - 1 \iff x^2 - 5x + 5 = \left(x - \frac{5 - \sqrt{5}}{2}\right) \left(x - \frac{5 + \sqrt{5}}{2}\right) \leq 0 \\ &\iff x \in \left[\frac{5 - \sqrt{5}}{2}; \frac{5 + \sqrt{5}}{2}\right] \cap [1, 2] = \left[\frac{5 - \sqrt{5}}{2}; 2\right] \end{aligned}$$

$$\text{car } \frac{5 - \sqrt{5}}{2} \leq 2 \iff 5 - \sqrt{5} \leq 4 \iff 1 \leq \sqrt{5} \leq \text{VRAI}$$

$$\text{car } \frac{5 + \sqrt{5}}{2} \geq 2 \iff 5 + \sqrt{5} \geq 4 \iff 1 \geq -\sqrt{5} \leq \text{VRAI}$$

L'ensemble des solutions est donc  $\left[\frac{5 - \sqrt{5}}{2}; 2\right] \cup [2; +\infty[ = \left[\frac{5 - \sqrt{5}}{2}; +\infty[$

- Pour la seconde équation, l'ensemble de définition est  $] -\infty, -2] \cup [2, +\infty[$ .

Si  $x < 4$ , alors  $x - 4 < 0$  et donc nécessairement  $\sqrt{x^2 - 4} \geq x - 4$ .

Si  $x \geq 4$ , on a l'équivalence :  $\sqrt{x^2 - 4} \leq x - 4 \iff x^2 - 4 \leq (x - 4)^2 = x^2 - 8x + 16 \iff 8x \leq 20$ ,

par composition avec  $u \mapsto u^2$ , croissante sur  $\mathbb{R}_+$ . Et donc  $x \in [4, +\infty[ \cap ] -\infty; \frac{5}{2}] = \emptyset$  :

L'ensemble des solutions est donc  $\emptyset$



▷ **Corrigé de l'exercice 1.4** Pour tout  $x, y \in \mathbb{R}_+$ ,

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \iff 0 \leq x+y-2\sqrt{xy} = (\sqrt{x}-\sqrt{y})^2$$

▷ **Corrigé de l'exercice 1.5** Pour tout  $x, y \in \mathbb{R}_+$ , en composant par  $t \mapsto \frac{2}{t}$  décroissante sur  $\mathbb{R}_+$

$$\frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} \leq \sqrt{xy} \iff \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{2}{\sqrt{xy}} \iff \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{y}}\right)^2 \geq 0$$

▷ **Corrigé de l'exercice 1.6** Pour tout  $i \in \mathbb{N}_n$ ,  $a_i^2 + b_i^2 - 2a_i b_i = (a_i - b_i)^2$ .

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (a_i^2 + b_i^2) \geq \sum_{i=1}^n a_i b_i \iff \sum_{i=1}^n (a_i - b_i)^2 \geq 0$$

La somme de termes positifs est nulle si et seulement si tous les termes sont nuls :  $\forall i \in \mathbb{N}_n, a_i - b_i = 0$  i.e.  $a_i = b_i$

▷ **Corrigé de l'exercice 1.7** Pour tout  $i \in \mathbb{N}_n$ ,  $|x_i| \leq N_\infty(x)$  et donc en sommant :  $N_1(x) = \sum_{i=1}^n |x_i| \leq$

$$\sum_{i=1}^n N_\infty(x) = nN_\infty(x).$$

$$N_1(x)^2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|\right)^2 = \sum_{i=1}^n |x_i|^2 + 2 \sum_{i < j} |x_i| |x_j| \geq \sum_{i=1}^n |x_i|^2 = N_2(x)^2.$$

On peut composer par  $\sqrt{\cdot}$  croissante sur  $\mathbb{R}_+$  :  $N_2(x) \leq N_1(x)$ .

Enfin, il existe  $i_0$  tel que  $|x_{i_0}| = N_\infty(x)$ , on a donc  $N_2(x)^2 \geq |x_{i_0}|^2 = N_\infty(x)^2$ .

On peut composer par  $\sqrt{\cdot}$  croissante sur  $\mathbb{R}_+$  :  $N_\infty(x) \leq N_2(x)$ .

Notons également (mais cela n'est pas demandé) : d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz (voir 4.2.) :  $N_1(x) =$

$$\sum_{i=1}^n |x_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n 1} = \sqrt{n} N_2(x).$$

▷ **Corrigé de l'exercice 1.8** On note  $f : x \mapsto |x^2 + 2x - 3| + |x + 1| - |x - 3|$  On étudie le signe de chacune des expressions dans les valeurs absolues :

$$x^2 + 2x - 3 = (x + 3)(x - 1) \leq 0 \iff x \in [-3, 1]$$

On peut donc revenir à l'étude sur les intervalles suivants.

	$-\infty$	$-3$	$-1$	$1$	$3$	$+\infty$
$ x^2 + 2x - 3 $	$x^2 + 2x - 3$	$ $	$-x^2 - 2x + 3$	$-x^2 - 2x + 3$	$ $	$x^2 + 2x - 3$
$ x + 1 $	$-x - 1$	$-x - 1$	$ $	$x + 1$	$x + 1$	$x + 1$
$ x - 3 $	$-x + 3$	$-x + 3$	$-x + 3$	$-x + 3$	$-x + 3$	$ $
$f(x)$	$x^2 + 2x - 1$	$ $	$-x^2 - 4x + 7$	$-x^2 - 2x + 7$	$ $	$x^2 + 2x + 1$
						$ $
						$x^2 + 4x - 5$

Il reste à résoudre chacune des inéquations  $f(x) \leq 0$  sur chacun des 5 intervalles.

- Sur  $] -\infty, -3]$  :  $x^2 + 2x - 1$  a pour discriminant  $\Delta = 8$ , les racines sont  $-1 - \sqrt{2}$  et  $1 + \sqrt{2}$ .  
Les solutions acceptables, ici sont les éléments de  $] -\infty, -3] \cap [-1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}] = \emptyset$ .
- Sur  $[-3, -1]$  :  $-x^2 - 4x + 7$  a pour discriminant  $\Delta = 16 + 28 = 44$ , les racines sont  $-2 - \sqrt{11}$  et  $-2 + \sqrt{11}$ .  
Les solutions acceptables, ici sont les éléments de  $[-3, -1] \cap (]-\infty, -2 - \sqrt{11}] \cup [-2 + \sqrt{11}, +\infty[) = \emptyset$ .
- Sur  $[-1, 1]$  :  $-x^2 - 2x + 7$  a pour discriminant  $\Delta = 32$ , les racines sont  $-1 - 2\sqrt{2}$  et  $-1 + 2\sqrt{2}$ .  
Les solutions acceptables, ici sont les éléments de  $[-1, 1] \cap (]-\infty, -1 - 2\sqrt{2}] \cup [-1 + 2\sqrt{2}, +\infty[) = \emptyset$ .
- Sur  $[1, 3]$  :  $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2 \geq 0$   
Les solutions acceptables, ici sont les éléments de  $[1, 3] \cap \{-1\} = \emptyset$
- Sur  $[3, +\infty[$  :  $x^2 + 4x - 5$  a pour discriminant  $\Delta = 36$ , les racines sont  $-5$  et  $1$ .  
Les solutions acceptables, ici sont les éléments de  $[3; +\infty[ \cap [-5; 1] = \emptyset$ .

Finalement, il n'y a pas de solution à cette inéquation.

▷ **Corrigé de l'exercice 1.9** • Par inégalité triangulaire :  $|a + b| \leq |a| + |b| \leq 4 + 6 = 10$  (exact pour la situation possible  $a = 4$  et  $b = 6$ ).

Et de même  $|a + b| = |b - (-a)| \geq |b| - |-a| = |b| - |a| \geq 5 - 4 = 1$  (exact pour la situation possible  $b = 5$  et  $a = -4$ ). • Par inégalité triangulaire :  $|a + 2b| \leq |a| + 2|b| \leq 4 + 12 = 16$  (exact pour la situation possible  $a = 4$  et  $b = 6$ ).

Et de même  $|a + 2b| = |2b - (-a)| \geq 2|b| - |a| \geq 10 - 4 = 6$  (exact pour la situation possible  $b = 6$  et  $a = 2$ ). • Par inégalité triangulaire :  $|a - 2b| \leq |a| + 2|b| \leq 4 + 12 = 16$  (exact pour la situation possible  $a = 4$  et  $b = -6$ ).

Et de même  $|a - 2b| = |2b - a| \geq 2|b| - |a| \geq 10 - 4 = 6$  (exact pour la situation possible  $b = 6$  et  $a = -2$ ). • Pour le dénominateur, on exploite le résultat précédent.

Pour le numérateur :  $16 = 4 \times \underline{4}_{b=-5} \leq a^2|b+1| \leq 16 \times 7 = 112$ .

$$\text{On trouve donc } 1 = \frac{16}{16} \leq \frac{a^2|b+1|}{|a-2b|} \leq \frac{112}{6} = \frac{56}{3}.$$

On notera que cet encadrement n'est pas optimal, puisque le numérateur est maximal lorsque  $b$  est maximal alors que le dénominateur est minimal pour  $b$  minimal. Il doit donc exister une situation optimale pour une valeur intermédiaire de  $b$ . On pourrait faire une étude de fonction  $f_a : t \mapsto \frac{a^2(t+1)}{a-2t} \dots$

▷ **Corrigé de l'exercice 1.10**

1. Soit  $x \in \mathbb{R}$ .  $x = [x] + \theta(x)$  et donc  $x + 1 = [x] + 1 + \theta(x)$ .

Or  $[x] + 1 \in \mathbb{Z}$  et  $\theta(x) \in [0, 1[$ .

On a donc écrit la décomposition de  $x + 1$  en partie entière plus partie décimale.

Ainsi pour tout réel  $x$  :  $[x + 1] = [x] + 1$ .

2. Soient  $x, y \in \mathbb{R}$ .  $x = [x] + \theta(x)$  et  $y = [y] + \theta(y)$ .

Donc  $x + y = [x] + \theta(x) + [y] + \theta(y) = [x] + [y] + \theta(x) + \theta(y)$  Or  $[x] + [y] \in \mathbb{Z}$  et  $\theta(x) + \theta(y) \in [0, 2[$ .

Donc si  $\theta(x) + \theta(y) < 1$ , on a  $[x + y] = [x] + [y]$ .

et si  $\theta(x) + \theta(y) \in [1, 2[$ , on a  $[x + y] = [x] + [y] + 1$  Dans tous les cas : pour tout réel  $x, y$  :  $[x] + [y] \leq [x + y]$ .

3. Comme précédemment :  $[x] = x - \theta(x)$ ,  $[y] = y - \theta(y)$ ,  $[x + y] = x + y - \theta(x + y)$ ,

$[2x] = 2x - \theta(2x)$  et  $[2y] = 2y - \theta(2y)$  On a alors l'équivalence :  $[x] + [y] + [x + y] \leq$

$[2x] + [2y] \iff \theta(2x) + \theta(2y) \leq \theta(x) + \theta(y) + \theta(x + y)$ .

Montrer que pour tout réel  $x, y$  :  $[x] + [y] + [x + y] \leq [2x] + [2y]$ .

▷ **Corrigé de l'exercice 1.11** Notons  $x = [x] + \theta(x)$ .

Soit  $h \in \mathbb{N}_n$ ,  $hx = h[x] + h\theta(x)$ . Or  $h[x] \in \mathbb{Z}$  et  $h\theta \in [0, h[$ .

Donc  $[hx] = h[x] + m$  avec  $m \in \llbracket 0, h - 1 \rrbracket$ .

Par conséquent :

$$\sum_{h=1}^n (h[x]) = \frac{n(n+1)}{2} [x] \leq \sum_{h=1}^n [hx] \leq \sum_{h=1}^n (h[x] + h - 1) = \frac{n(n+1)}{2} [x] +$$

AMELIORER LA MAJORATION

▷ **Corrigé de l'exercice 2.1** Oui, à condition d'associer nécessairement un  $\forall a, \forall b$  dans la partie de droite (sinon, il n'y a pas équivalence)

▷ **Corrigé de l'exercice 2.2**

▷ **Corrigé de l'exercice 2.3**

▷ **Corrigé de l'exercice 2.4**

▷ **Corrigé de l'exercice 2.5**

▷ **Corrigé de l'exercice 2.6**

▷ **Corrigé de l'exercice 2.7**

▷ **Corrigé de l'exercice 2.8**

▷ **Corrigé de l'exercice 3.1**

▷ **Corrigé de l'exercice 3.2**

▷ Corrigé de l'exercice 3.3

▷ Corrigé de l'exercice 4.1

▷ Corrigé de l'exercice 4.2

▷ Corrigé de l'exercice 4.3

1. Il existe autant de suite  $c_i$  que de permutation de  $\{1, 2, \dots, n\}$ , les indices de  $(b_i)$ .

Donc il y a  $n!$  suites  $(c_i)$  possible.

Pour s'en convaincre, si on ne connaît pas les factorielles, il suffit de penser à la méthode de construction des suites  $(c_i)$ .

1.  $b_1$  peut être donné au  $n$   $c_i$  :  $n$  possibilités
2. puis  $b_2$  peut être donné au  $n - 1$   $c_i$  qui restent :  $n - 1$  possibilités
3. puis  $b_3$  peut être donné au  $n - 2$   $c_i$  qui restent :  $n - 2$  possibilités
- k. ...
- n. puis  $b_n$  peut être donné au dernier  $c_i$  qui reste : 1 possibilités

Le décompte total est obtenu par multiplication (puis)

2. On suppose que  $i$  et  $j$  sont tels que  $b_n = c_j$  et  $b_i = c_n$ .  
Quel est le signe de  $a_j c_j + a_n c_n - a_n b_n - a_j b_i$ ? On a donc

$$a_j c_j + a_n c_n - a_n b_n - a_j b_i = a_j b_n + a_n b_i - a_n b_n - a_j b_i = (a_j - a_n)(b_n - b_i)$$

Or par croissance :  $a_j < a_n$  et  $b_n > b_i$ , donc  $a_j - b_n < 0$ ,  $(b_n - b_i) > 0$ .

Ainsi  $a_j c_j + a_n c_n - a_n b_n - a_j b_i < 0$

3. On considère la permutation  $(c'_i)$  obtenue à partir de  $(b_i)$  par :  $\forall h \notin \{j, n\}, c'_h = c_h, c'_j = b_i$  et  $c'_n = b_n$ . (Il s'agit bien d'une permutation, car comme  $h \neq n, c_h \neq c_n = b_i$ , ce qui justifie que l'on puisse prendre  $c'_j = b_i$ ).

Alors

$$\sum_{k=1}^n a_k c_k - \sum_{k=1}^n a_k c'_k = a_j c_j + a_n c_n - a_j c'_j - a_n c'_n = a_j c_j + a_n c_n - a_n b_n - a_j b_i < 0$$

Donc  $\sum_{k=1}^n a_k c_k < \sum_{k=1}^n a_k c'_k$

4. Posons, pour tout entier  $n \geq 2$ ,

$\mathcal{P}_n$  : ' pour toute permutation  $(c_i)$  de  $(b_i)$ , alors  $S_c \leq S_b$  '.

—  $a_1 < a_2$  et  $b_1 < b_2$ , alors  $(a_1 b_2 + a_2 b_1) - (a_1 b_1 + a_2 b_2) = \underbrace{(a_1 - a_2)}_{<0} \underbrace{(b_2 - b_1)}_{>0} < 0$ .

Donc  $\mathcal{P}_2$  est vraie.

- Soit  $n \geq 3$ . On suppose que  $\mathcal{P}_{n-1}$  est vraie.

Soit  $(c_i)$ , une permutation de  $(b_i)$  et  $(c'_i)$  définie comme en question 3.

En réalité, comme  $c'_n = b_n$ ,  $(c'_1, \dots, c'_{n-1})$  est une permutation de  $(b_1, \dots, b_{n-1})$ .

Donc on peut applique  $\mathcal{P}_{n-1}$  :  $\sum_{k=1}^{n-1} a_k c'_k \leq \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_k$ .

Si on ajoute de part et d'autre  $a_n b_n = a_n c'_n$  :  $\sum_{k=1}^n a_k c'_k \leq \sum_{k=1}^n a_k b_k$ .

Puis, d'après la question précédente :  $\sum_{k=1}^n a_k c_k \leq \sum_{k=1}^n a_k c'_k$ .

Et donc par transitivité :  $S_c \leq S_b$ .

On a montré, par récurrence, une seule inégalité. Pour la seconde, nous allons exploiter la première. Notons, pour tout  $k \in \mathbb{N}_n$ ,  $\overline{b_k} = b_n - b_k$ , donc la suite  $\overline{b_k}$  est positive et strictement décroissante. Soit  $(c_i)$ , une permutation de  $(b_i)$ , alors  $(\overline{c_i} = b_n - b_i)$  est une permutation de  $(\overline{b_i})$ . Donc d'après le résultat démontré par récurrence, (comme  $(b_{n-k})_k$  est croissante) :

$$\sum_{k=1}^n a_k \overline{c_k} \leq \sum_{k=1}^n a_k b'_{n-k} = \sum_{k=1}^n a_k (b_n - b_{n-k}) = \sum_{k=1}^n a_k b_n - \sum_{k=1}^n a_k b_{n-k}$$

Donc

$$\sum_{k=1}^n a_k b_{n-k} \leq \sum_{k=1}^n a_k b_n - \sum_{k=1}^n a_k c_k = \sum_{k=1}^n a_k (b_n - \overline{c_k}) = \sum_{k=1}^n a_k c_k$$

Et ainsi  $S_{-b} \leq S_c$ .

Pour toute permutation  $(c_i)$  de  $(b_i)$ , on a  $\underbrace{\sum_{i=1}^n a_i b_{n-i+1}}_{=S_{-b}} < \underbrace{\sum_{i=1}^n a_i c_i}_{=S_c} < \underbrace{\sum_{i=1}^n a_i b_i}_{=S_b}$

▷ **Corrigé de l'exercice 4.4** On considère  $(a_i)$  et  $(b_i)$  deux suites finies de nombres réels positifs croissantes.

$$\sum_{i=1}^n a_i \times \sum_{j=1}^n b'_j = \sum_{i=1}^n a_i \times \sum_{j=1}^n b_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i b_j = a_1 \left( \sum_{j=1}^n b_j \right) + a_2 \left( \sum_{j=1}^n b_j \right) + \dots + a_n \left( \sum_{j=1}^n b_j \right)$$

Notons, pour tout  $i, k \in \mathbb{N}_n$ ,  $c_{i,k} = \begin{cases} b_i + k & \text{si } i + k \leq n \\ b_i + k - n & \text{si } i + k > n \end{cases}$   
i.e. pour tout  $i, j \in \mathbb{N}_n$ ,  $b_j = \begin{cases} c_{i,j-i} & \text{si } j > i \\ c_{i,j-i+n} & \text{si } j \leq i \end{cases}$  ( $j = i + k \Leftrightarrow k = j - i$ ) Donc,

$$\begin{aligned} a_i \sum_{j=1}^n b_j &= a_i \left( \sum_{j=1}^i b_j + \sum_{j=i+1}^n b_j \right) = a_i \left( \sum_{j=1}^i c_{i,n-i+j} + \sum_{j=i+1}^n c_{i,j-i} \right) \\ &= a_i (c_{i,n-i+1} + \dots + c_{i,n} + c_{i,1} + \dots + c_{i,n-i}) = \sum_{k=1}^n a_i c_{i,k} \end{aligned}$$

Donc

$$\sum_{i=1}^n a_i \times \sum_{j=1}^n b_j = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_i c_{i,k} = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n a_i c_{i,k}$$

Or, à  $k$  fixé,  $(c_{i,k})$  est aussi une permutation de  $(b_j)$ , donc d'après l'inégalité de réarrangement :

$$\sum_{i=1}^n a_i c_{i,k} \leq \sum_{i=1}^n a_i b_i$$

En sommant pour  $k$  de 1 à  $n$  :

$$\sum_{i=1}^n a_i \times \sum_{j=1}^n b_j \leq \sum_{i=1}^n a_i b_i \sum_{k=1}^n 1 = n \sum_{i=1}^n a_i b_i$$

En divisant par  $n^2$  :

$$\forall (a_i), (b_i) \in (\mathbb{R}_+^*)^n \text{ croissantes} : \frac{a_1 b_1 + \dots + a_n b_n}{n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \times \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{n}$$

▷ **Corrigé de l'exercice 4.5** On considère  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+$ .

En notant  $m = \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$ , puis  $A_i = \frac{x_1 x_2 \dots x_i}{m^i}$ ,

$(a_i) = (A_k)$  ordonnée par ordre croissant et enfin  $(b_i)$  tel que  $b_i = \frac{1}{a_i}$ .

Par conséquent ces suites sont à valeurs positives,  $(a_i)$  est croissant et  $(b_i)$  décroissante.  
On a donc pour toute permutation  $(c_i)$  de  $(b_i)$ ,

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \sum_{i=1}^n a_i c_i$$

Or  $a_i b_i = 1$ , donc  $\sum_{i=1}^n a_i b_i = n$ .

Puis avec  $c_i$  permutation de  $(b_i)$  tel que :

$$- \text{ si } b_i = \frac{1}{a_i} = \frac{1}{A_k} = \frac{m^k}{x_1 x_2 \cdots x_k} \quad (k \geq 2), \text{ alors } c_i = \frac{m^{k-1}}{x_1 x_2 \cdots x_{k-1}} = \frac{1}{A_{k-1}}.$$

$$\text{Et donc dans ce cas } a_i c_i = \frac{A_k}{A_{k-1}} = \frac{x_k}{m}$$

$$- \text{ si } b_i = \frac{1}{a_i} = \frac{1}{A_1} = \frac{m^1}{x_1}, \text{ alors } c_i = \frac{m^n}{x_1 x_2 \cdots x_k \cdots x_n} = 1, \text{ le dernier } b_j \text{ non considéré.}$$

$$\text{Alors, dans ce cas, } a_i c_i = A_1 \times 1 = \frac{x_1}{m}$$

$$\text{Ainsi : } \sum_{i=1}^n a_i c_i = \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{m} \geq n.$$

$$\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n \quad \sqrt[n]{x_1 \times x_2 \times \cdots \times x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

▷ **Corrigé de l'exercice 4.6** Les calculs donnent :

$$(a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n)^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i b_i a_j b_j \quad (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2) \times (b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i^2 b_j^2$$

Il faut différencier ces  $n^2$  nombres ajoutés :

$$a_i b_j = c_k \text{ avec la transformation bijective : } k - 1 = (i - 1) + n(j - 1)$$

(division euclidienne de  $k - 1$  par  $n$  :  $i - 1$  est le reste,  $j - 1$  est le quotient).

$$\text{On a : } k = 1 \Leftrightarrow (i, j) = (1, 1) / k = 2 \Leftrightarrow (i, j) = (2, 1) / \dots / k = n \Leftrightarrow (i, j) = (n, 1)$$

$$k = n + 1 \Leftrightarrow (i, j) = (1, 2) / k = n + 2 \Leftrightarrow (i, j) = (2, 2) / \dots / k = 2n \Leftrightarrow (i, j) = (n, 2)$$

⋮

$$k = n^2 - n + 1 \Leftrightarrow (i, j) = (1, n) / k = n + 2 \Leftrightarrow (i, j) = (2, n) / \dots / k = n^2 \Leftrightarrow (i, j) = (n, n)$$

Notons donc pour tout  $k \in \llbracket 1, n^2 \rrbracket$ ,  $d_k = c_k$ .

Les deux suites (identiques)  $(c_k) = (d_k)$  se rangent exactement dans le même ordre.

Donc pour toute permutation  $(d'_k)$  de  $(d_k)$  :

$$\sum_{k=1}^{n^2} c_k d'_k \leq \sum_{k=1}^{n^2} c_k d_k = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i^2 b_j^2$$

Or avec la permutation :  $d'_k = d'_{(i-1)+n(j-1)+1} = a_j b_i = d_{(j-1)+n(i-1)+1}$ ,

on a  $c_k d'_k = a_i b_j a_j b_i$ , avec  $(i, j)$  défini par la relation :  $k - 1 = (i - 1) + n(j - 1)$ .

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i b_i a_j b_j = \sum_{k=1}^{n^2} c_k d'_k \leq \sum_{k=1}^{n^2} c_k d_k = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i^2 b_j^2$$

$$(a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2) \times (b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2)$$

▷ **Corrigé de l'exercice 5.1**

▷ **Corrigé de l'exercice 5.2**

▷ **Corrigé de l'exercice 5.3**

▷ **Corrigé de l'exercice 5.4**

▷ **Corrigé de l'exercice 5.5**

▷ **Corrigé de l'exercice 5.6**

▷ **Corrigé de l'exercice 5.7**