

Suites classiques

1 Suite définie implicitement

Principe

Les termes de la suite sont définie comme solution d'une fonction dépendant de n .

Il faut commencer par démontrer l'existence de la suite, cette existence ne peut être que théorique ; c'est à dire qu'il est impossible d'exprimer simplement (ou analytiquement) la solution du problème. Le théorème utilisé est donc ici : le *théorème de la bijection* ou *théorème des valeurs intermédiaires monotone*. Rappelons les hypothèses : la fonction est continue, monotone. Ce sont finalement nos seules connaissances, il faut les utiliser à de multiples reprises. . .

L'utilisation de tableau de variations et d'un bout de schéma peut s'avérer très pratique. . .

▷ Exercice 1.1.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction numérique $f_n(x) = x^n + 16x^2 - 4$.

Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}^+$.

On note x_n cette racine. Étudier la suite (x_n) .

On pourra commencer par tracer sur un même graphe $y = f_n(x)$ et $y = f_{n+1}(x)$, puis localiser x_{n+1} et x_n . . .

Comment étudier une suite définie par une équation (implicitement) ?

On suppose que f_n est une application monotone sur I , continue et que $0 \in f_n(I)$.

On note alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = f_n^{-1}(0)$ (il s'agit d'un ensemble à un seul élément).

↪ Encadrement.

On a nécessairement $x_n \in I$, et donc si I est borné, il en est de même de (x_n) .

Étude de la dynamique (c'est le plus subtil).

Il faut comparer $f_{n+1}(x_n)$ à $f_{n+1}(x_{n+1}) = 0$, puis utiliser la monotonie de f_{n+1} .

Ainsi par exemple, si l'on sait que $f_{n+1}(x_n) > 0 = f_{n+1}(x_{n+1})$

puis que f_{n+1} est décroissante, alors $x_n < x_{n+1}$ et donc (x_n) croissante.

Pour faire cette comparaison, on est souvent amené à faire $f_{n+1}(x_n) = f_{n+1}(x_n) - f_n(x_n)$.

Très souvent, on exploite le tableau de variations.

↪ Convergence.

On applique tout simplement le théorème de la limite monotone.

↪ Recherche de la limite.

Ici, il faut montrer toutes nos qualités d'analyste mathématicien : il faut **savoir élimer les termes négligeables** pour garder le meilleur qui donne alors une première approximation puis la valeur ℓ de la limite visée.

↪ Recherche d'un développement limité.

Même chose que précédemment, en considérant $v_n = x_n - \ell$. C'est le début du D.L. . .

▷ Exercice 1.2.

Soit $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} - e$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists ! x_n \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $f_n(x_n) = 0$.

On définit ainsi parfaitement une suite (x_n)

2. Étudier les variations de la suite (x_n)

3. En déduire que la suite (x_n) converge.

Pour continuité le DL, il faut en savoir un peu plus sur les séries. Ici la limite est 1

▷ **Exercice 1.3.**

Soit f une fonction définie et continue sur $[0; 1]$ telle que $f(0) = f(1)$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists x_n \in [0, 1] \text{ tel que } f\left(x_n + \frac{1}{n}\right) = f(x_n).$$

La suite (x_n) est-elle convergente ?

▷ **Exercice 1.4.**

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère le polynôme

$$P_n = X^n + X^{n-1} + \dots + X - 1.$$

Etudier la fonction polynomiale associée et en déduire que P_n n'admet qu'une seule racine positive. On la note r_n .

Etudier les variations de (r_n) puis déterminer sa limite ℓ .

Chercher un équivalent de $(r_n - \ell)$

▷ **Exercice 1.5.**

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un réel > 0 et un seul, noté u_n , tel que $(u_n)^n \ln(u_n) = 1$. Montrer que la suite (u_n) est décroissante et converge, déterminer sa limite.

2 Suite définie par une récurrence fixe : $u_{n+1} = f(u_n)$

Principes de base

Soit f une fonction continue d'une partie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et (u_n) la suite définie par u_0 et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

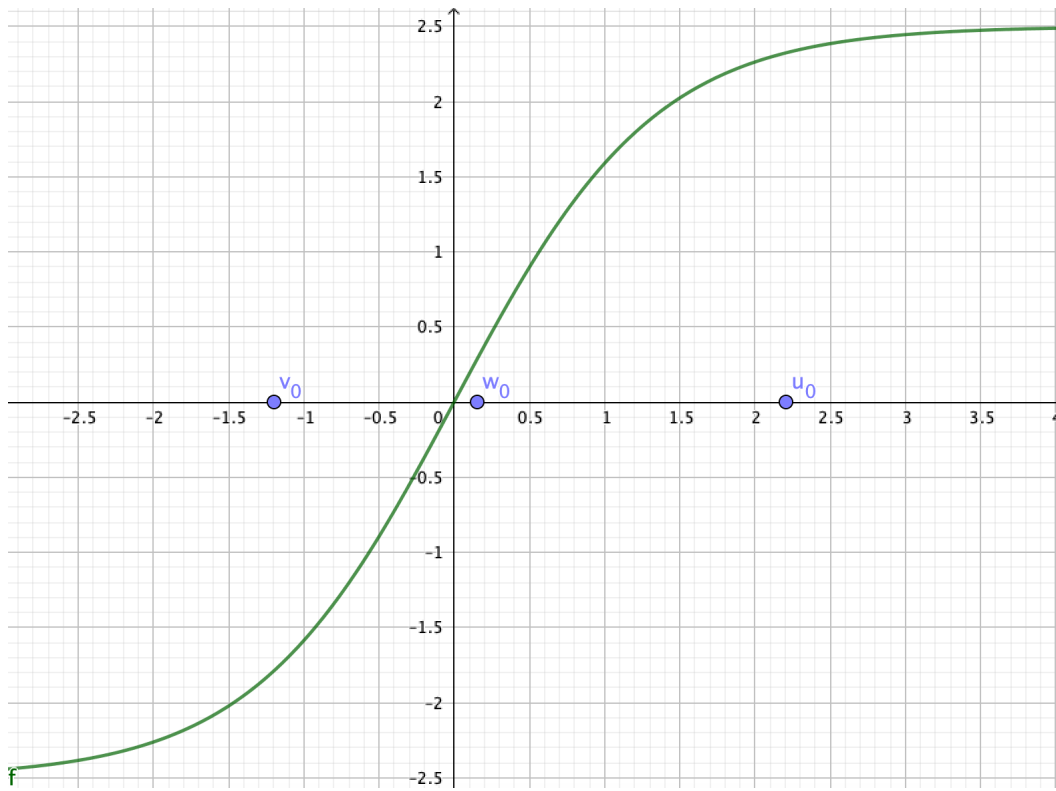
- Il faut commencer par s'assurer de l'existence de la suite : suivant le domaine de définition D_f de f , il faut prendre garde à ce qu'une telle suite soit bien définie ; si $f(D_f) \subset D_f$ et $u_0 \in D_f$ cela ne pose pas de problème.
- On admet (momentanément) le résultat suivant (cela dépend d'une propriété sur f , non encore définie) : *Soit (u_n) une suite réelle définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f continue. SI la suite converge vers ℓ ALORS $f(\ell) = \ell$.*

Insistons :

- f est bien indépendante de n .
- ce théorème ne donne donc absolument pas la convergence de la suite, simplement les éventuelles limites. Toutefois si f n'admet pas de point fixe, la suite est nécessairement divergente.

▷ **Exercice 2.1.**

On a représenté une fonction f quelconque sur un graphe et plusieurs valeurs initiales (u_0, v_0, w_0) . Représentez les valeurs de u_k pour $k \leq 5$, v_k pour $k \leq 5$ et w_k pour $k \leq 5$



▷ **Exercice 2.2.**

Etudier la suite définie par $u_0 \in [0, 2]$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{2 - u_n}$.

Comment étudier une suite définie par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$

On procède dans l'ordre suivant :

- ↪ *Etude des variations de f et/ou du signe de $f(x) - x$ (ce qui donne aussi les solutions de $f(\ell) = \ell$).*
- ↪ *Recherche des intervalles J de $\mathbb{R}$ stables par f (i.e. tels que $f(J) \subset J$) : on montre par récurrence que si $u_0 \in J$, alors $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in J$.*
- ↪ *Cas où f est croissante sur J stable par f : on montre par récurrence que si $u_0 \in J$ alors (u_n) est monotone. Son sens de variation dépend du signe de $u_1 - u_0 = f(u_0) - u_0$.*
- ↪ *Cas où f est décroissante sur J stable par f :
On se ramène au cas précédent en posant $v_n = u_{2n}$, $w_n = u_{2n+1}$. Les suites (v_n) et (w_n) vérifient :*

$$v_0 = u_0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = f \circ f(v_n)$$

$$w_0 = u_1, \quad \forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = f \circ f(w_n)$$

La fonction $g = f \circ f$ est croissante, J est stable par g , les suites (v_n) et (w_n) sont monotones de sens contraire, il reste à étudier leur convergence.

- ↪ *Nous verrons des méthodes complémentaires avec l'inégalité des accroissements finis. Souvent, on exploite également les formules bien connues des développements limités. L'usage des séries peut également aider (trouver des équivalents par la méthode dite « des petits pas »).*

▷ **Exercice 2.3.**

Etudier la suite définie par $u_0 \geq 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$.

En exploitant la comparaison logarithmique, on pourra montrer que, pour tout $\epsilon > 0$: $u_n = 2 + O\left(\left(\frac{1}{4} + \epsilon\right)^n\right)$

Comparaison logarithmique

Si on arrive à montrer que pour $n \geq N$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} < \ell (< 1)$.

Alors pour tout $\epsilon > 0$ (on prend aussi $\epsilon < 1 - \ell$), à partir d'un certain rang : $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$, où v_n est une suite géométrique de raison $\ell + \epsilon$.

Et donc par comparaison logarithmique : $u_n = O(v_n) = O((\ell + \epsilon)^n)$, pour tout $\epsilon > 0 \dots$

▷ **Exercice 2.4.**

Etudier la suite définie par $u_0 \in [0, 2]$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{2 - u_n}$

▷ **Exercice 2.5.**

Etudier la suite définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n^2 + \frac{2}{u_n}$.

▷ **Exercice 2.6.**

On pose, pour $x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = 1 + \frac{\sin(\frac{1}{x})}{2}$.

1. Montrer que si $x \in \mathbb{R}^*$, alors $f(x) \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ et que $f \circ f(x) \geq 1$.
2. Montrer que f est $\frac{1}{2}$ -lipschitzienne sur $[1, +\infty[$.
3. Montrer que : $\exists ! \ell \in [1, +\infty[$ tel que $f(\ell) = \ell$.
4. Soit (u_n) telle que $u_0 = 1 \in \mathbb{R}^*$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.
Montrer que : $\forall n \geq 2, u_n \geq 1$ et que $(u_n) \rightarrow \ell$

▷ **Exercice 2.7.**

Etudier la suite définie par $u_{n+1} = \arctan(u_n)$. Déterminer toutes les applications continues telle que $f(x) = f(\arctan(x))$.

Peut-on "alléger" les hypothèses de l'exercice ?

▷ **Exercice 2.8.**

Soit la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = u_n + u_n^2$. Etudier le comportement de la suite suivant les cas :

- a) $u_0 \in]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$
- b) $u_0 \in [-1, 0]$

▷ **Exercice 2.9.** On note I l'intervalle $]0; \frac{1}{\sqrt{6}}[$.

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel non nul n par $u_{n+1} = u_n - 2u_n^3$ et $u_1 = \frac{1}{10}$.

On note f la fonction définie sur I par $f(x) = x - 2x^3$.

1. Déterminer les variations de f , comparer $f(I)$ et I .
2. Déterminer la monotonie de la suite (u_n) .
3. Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite

▷ **Exercice 2.10.** Soit $u_0(a) = a$ et $u_{n+1}(a) = \ln(1 + u_n(a))$.

1. Montrer l'inégalité suivante dans $\mathbb{R}^+$:

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1 + x) \leq x.$$

2. $u_n(a)$ est-elle définie sur $\mathbb{R}^+$?

Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(a) = 0$.

3. Montrer que $u_n(1) \geq \frac{1}{n+1}$.

Pour les 5/2, en déduire la nature de $\sum u_n(1)$.

4. Pour $a \geq 1$, a-t-on $u_n(a) \geq u_n(1)$?

Quelle est la nature de $\sum u_n(a)$?

Correction des exercices

▷ Corrigé de l'exercice 1.1

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. La fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}^+$, c'est une fonction polynôme.
2. La fonction f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

On peut le démontrer avec la dérivée.

Ou bien, on peut le démontrer directement :

$x \mapsto x^n$, $x \mapsto 16x^2$ sont croissantes sur $\mathbb{R}^+$ (elle sont bien connues)
et $x \mapsto -4$ est constante (donc croissante).

Une somme de fonctions croissantes est croissante.

3. donc la fonction f_n établit une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur $[f(0); \lim_{+\infty} f[$.

Or $f(0) = -4$ et $\lim_{+\infty} f = +\infty$.

Donc f réalise une bijection de $[0; +\infty[$ sur $[-4; +\infty[$.

Comme $0 \in [-4; +\infty[$, $\exists ! x_n \in \mathbb{R}^+$ tel que $f_n(x_n) = 0$

(Remarque : $x_0 = \frac{\sqrt{3}}{4} \approx 0,433$, $x_1 = \frac{-1 + \sqrt{257}}{32} \approx 0,470$, $x_2 = \frac{2}{\sqrt{17}} \approx 0,485 \dots$) $f_n(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2^n} > 0 = f_n(x_n)$ et

par croissance de f_n , on a $x_n < \frac{1}{2}$.

puis $f_{n+1}(x_n) = x_n^{n+1} + 16x_n^2 - 4 = x_n^n(x_n - 1) < 0$ car $x_n \in]0, 1[$.

Donc $f_{n+1}(x_n) < f_{n+1}(x_{n+1})$, par croissance de $f_{n+1} : x_n < x_{n+1}$.

Ainsi la suite (x_n) est croissante.

Elle est majorée par $\frac{1}{2}$ donc elle est convergente vers ℓ avec $\ell \leq \frac{1}{2}$.

Par croissance, $0 < x_n^n \leq \frac{1}{2^n}$ et donc par encadrement : $(x_n^n) \rightarrow 0$.

Et donc $16x_n^2 - 4$ converge vers 0 mais aussi vers $16\ell^2 - 4$.

par unicité : $\ell = \sqrt{\frac{4}{16}} = \frac{1}{2} \dots$

On note $y_n = \ell - x_n (> 0)$, alors $y_n \rightarrow 0$. Connaître y_n est le début de la connaissance de x_n .

$f_n(x_n) = 0 = f_n(\ell - y_n) = (\ell - y_n)^n + 16(\ell - y_n)^2 - 4 = (\ell - y_n)^n + 16y_n^2 - 16y_n$ car $\ell = \frac{1}{2}$.

Puis, comme $y_n \rightarrow 0$, $16y_n^2 = o(y_n)$, donc $\sim (\ell - y_n)^n \sim 16y_n$.

Donc $\frac{y_n}{\frac{1}{2^{n-4}}} = \frac{16y_n}{\ell^n} \sim \left(1 - \frac{y_n}{\ell}\right)^n$. Il ne faut pas conclure trop vite : rappel $(1 + \frac{x}{n})^n \rightarrow e^x$.

Ici $(y_n \geq 0)$, $0 \leq \ln\left(1 - \frac{y_n}{\ell}\right)^n = n \ln\left(1 - \frac{y_n}{\ell}\right) \leq -n \times \frac{y_n}{\ell} \sim 2n(\ell - y_n)^n \rightarrow 0$. $\left(1 - \frac{y_n}{\ell}\right)^n \rightarrow e^0 = 1$

Ainsi $y_n \sim \frac{1}{2^{n-4}}$ et $x_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n-4}} + o\left(\frac{1}{2^n}\right)$.

▷ Corrigé de l'exercice 1.2

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $x \mapsto x^k$ est croissante et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Alors par somme de fonctions, $x \mapsto f_n(x)$ est croissante et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Enfin, comme $f_n(0) = 1 - e < 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$, le théorème de la bijection permet d'affirmer qu'il existe un unique $x_n \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $f_n(x_n) = 0$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$, nous avons vu que f_n est croissante.

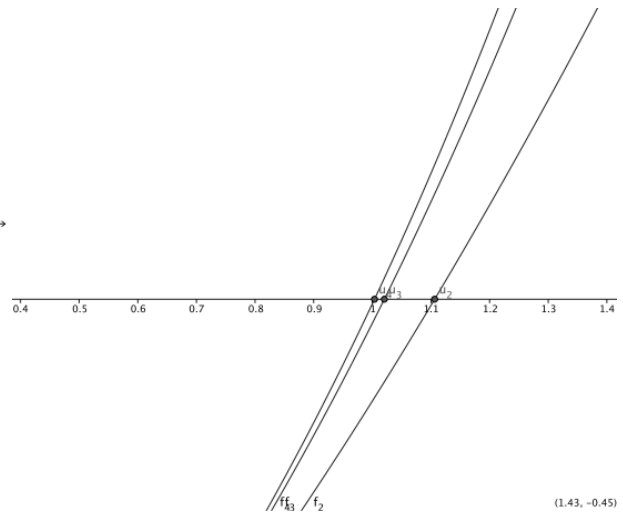
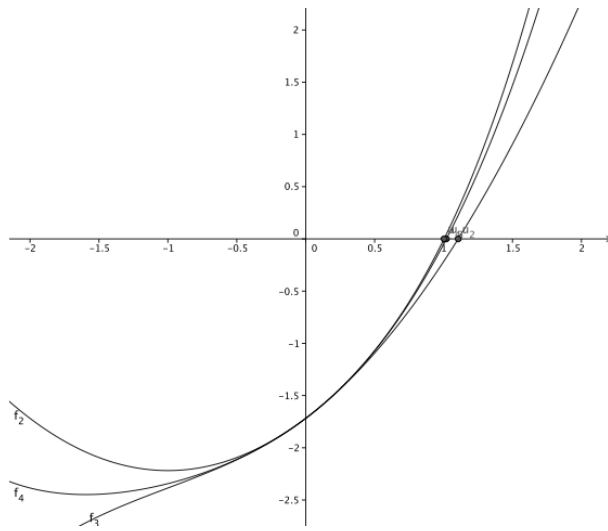
De plus $f_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{x^k}{k!} - e = f_n(x) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$.

Donc $f_n(x_{n+1}) = \underbrace{f_{n+1}(x_{n+1})}_{=0} - \frac{x_{n+1}^{n+1}}{(n+1)!} < 0$, car $x_{n+1} > 0$, d'après ce que l'on a vu précédemment.

Donc on a le tableau suivant :

	x	0	x_{n+1}	x_n	$+\infty$
$f_n(x)$				0	$+\infty$
			< 0		
		$1 - e$			

Donc $x_{n+1} < x_n$, ceci est vrai pour tout entier n . Donc (x_n) est décroissante.



3. (x_n) est décroissante et minorée par 0, donc elle converge.

Ainsi $y_n \sim \frac{1}{2^{n-4}}$ et $x_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n-4}} + o\left(\frac{1}{2^n}\right)$.

▷ Corrigé de l'exercice 1.3

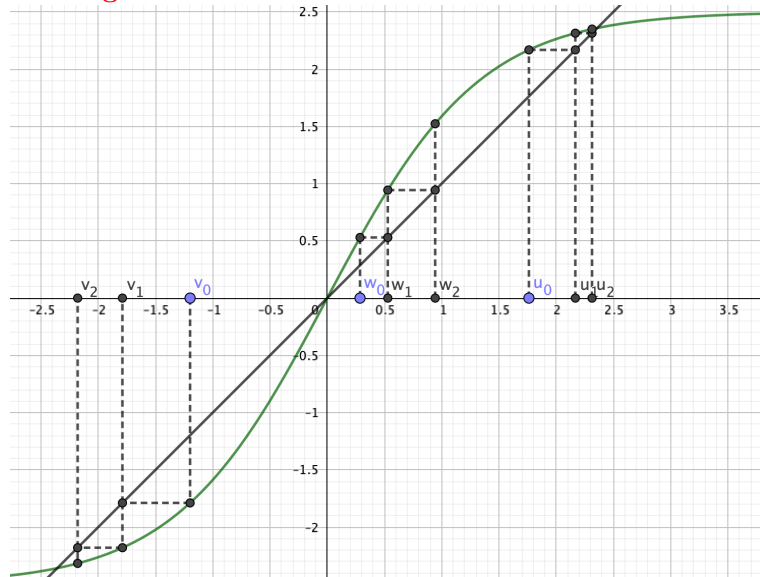
▷ Corrigé de l'exercice 1.4

▷ Corrigé de l'exercice 1.5

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n(x) = x^n \ln(x)$.

1. Etudier la fonction f
2. Montrer qu'il existe un unique u_n tel que $f_n(u_n) = 1$.
3. Déterminer le sens de variation de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
4. Montrer que la suite converge vers 1.

▷ Corrigé de l'exercice 2.1



▷ Corrigé de l'exercice 2.2

$f : x \mapsto \sqrt{2-x}$. $\mathcal{D}_f =]-\infty, 2]$, f décroissante et $f([0, 2]) = [f(2), f(0)] = [0, \sqrt{2}] \subset [0, 2]$.

$\ell > 0$ et $f(\ell) = \ell \iff \ell > 0$ et $\ell^2 + \ell - 2 = 0 \iff \ell = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$.

Les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont adjacentes et convergent vers $\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$.

▷ **Corrigé de l'exercice 2.3**

Soit $f : x \mapsto \sqrt{2+x}$. Il s'agit d'une translation de la fonction $\sqrt{\cdot}$.

Donc, on peut affirmer directement que $\mathcal{D}_f = [-2, +\infty[$, (même si $\mathcal{D}_{f'} =]-2, +\infty[$).

et $f([-2, +\infty[) = \mathbb{R}_+ \subset \mathcal{D}_f$. $u_0 \in \mathcal{D}_f$.

Ainsi (u_n) est parfaitement définie et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$.

Par ailleurs, f est strictement croissante, donc (u_n) est strictement monotone.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, (comme $u_n \geq 0$) :

$$u_{n+1} \geq u_n \Leftrightarrow 2 + u_n \geq u_n^2 \Leftrightarrow (u_n - 2)(u_n + 1) \leq 0 \Leftrightarrow u_n \in [0, 2]$$

Donc (u_n) est croissante si $u_0 \in [0, 2[$, constante si $u_0 = 2$ et décroissante si $u_0 > 2$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, (par croissance de $\sqrt{\cdot}$) :

$$u_n \geq 2 \Leftrightarrow u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n} \geq \sqrt{4} = 2$$

Ainsi si $u_0 > 2$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 2$ (récurrence) et si $u_0 < 2$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < 2$ (récurrence).

Dans tous les cas la suite (u_n) est convergente (croissante majorée si $u_0 < 2$ et décroissante minorée si $u_0 > 2$).

La limite ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$, d'après un calcul fait plus haut, cela donne $\ell = 2$ ou $\ell = -1$.

La seconde situation est impossible donc, pour tout $u_0 > 0$, (u_n) converge vers 2.

Si l'on veut calculer une vitesse de convergence, il faut comparer $u_{n+1} - 2$ à $u_n - 2$.

On note, pour tout entier n , $v_n = u_n - 2$. On a donc $v_{n+1} = \sqrt{v_n + 4} - 2$.

On reconnaît un nombre dérivé : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+h} - \sqrt{4}}{h} = \sqrt{4}'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$.

Ainsi, comme $(v_n) \rightarrow 0$, on trouve $\frac{v_{n+1}}{v_n} \rightarrow \frac{1}{4}$.

Soit $\epsilon > 0$, si on note $w_n = (\frac{1}{4} + \epsilon)^n$. Il existe N tel que $\forall n \geq N$, $\frac{v_{n+1}}{v_n} \leq \frac{w_{n+1}}{w_n}$.

Alors $(v_n) = O(w_n)$ et en particulier, pour tout $\epsilon > 0$: $u_n = 2 + O\left(\left(\frac{1}{4} + \epsilon\right)^n\right)$

▷ **Corrigé de l'exercice 2.4**

$f : x \mapsto \sqrt{2-x}$. $\mathcal{D}_f =]-\infty, 2]$, f décroissante et $f([0, 2]) = [f(2), f(0)] = [0, \sqrt{2}] \subset [0, 2]$.

$\ell > 0$ et $f(\ell) = \ell \Leftrightarrow \ell > 0$ et $\ell^2 + \ell - 2 = 0 \Leftrightarrow \ell = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$.

Les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont adjacentes et convergent vers $\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$

▷ **Corrigé de l'exercice 2.5**

Soit $f : x \mapsto x^2 + \frac{2}{x}$. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$. $f(\mathbb{R}_+^*) \subset \mathbb{R}_+$

si $u_n \geq 1$, alors $u_n^2 \geq u_n$ et donc $u_{n+1} > u_n$.

Donc :

- Si $u_0 \geq 1$, alors (par récurrence), $u_{n+1} > u_n > 1$.
- Si $u_0 < 1$, alors $\frac{2}{u_n} > \frac{2}{1} > 2$, donc $u_1 > 1$, puis pour tout $n \geq 1$, $u_{n+1} > u_n > 1$.

La suite (u_n) est donc strictement croissante, et $u_1 > 1$.

Posons, pour tout $n \geq 1$, $\mathcal{P}_n : u_n \geq u_1^{2^{n-1}}$.

— $u_1^{2^{1-1}} = u_1^{2^0} = u_1$, donc $\mathcal{P}_1$ est vraie.

— Soit $n \geq 1$, supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = u_n + \frac{2}{u_n^2} \geq u_n. \text{ Donc } u_{n+1} \geq u_n^2 \geq (u_1^{2^{n-1}})^2 = u_1^{2 \times 2^{n-1}} = u_1^{2^{n-1+1}}, \text{ donc } \mathcal{P}_{n+1}.$$

Comme $u_1 > 0$, on a minoré par une suite qui diverge vers l'infini. Donc (u_n) également.

(Par la suite, on pourra étudier $\ln(u_n) \dots$)

▷ **Corrigé de l'exercice 2.6**

▷ **Corrigé de l'exercice 2.7**

▷ **Corrigé de l'exercice 2.8**

▷ **Corrigé de l'exercice 2.9**

▷ **Corrigé de l'exercice 2.10**