

Sommes, produits & coefficients binomiaux

1 Problème 1 : Inégalité des réarrangement

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On considère deux suites finies de réels **positifs** : $a_1, a_2, \dots, a_n$ et b_1, b_2, b_n .

On suppose que ces suites sont ordonnées : $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{n-1} < a_n$ et $b_1 < b_2 < b_3 < \dots < b_{n-1} < b_n$.

On considère une permutation de (b_i) , que l'on note (c_i) .

Autrement écrit ; à tout i de $[1, n]$, correspond un unique j de $[1, n]$ tel que $b_i = c_j$

Avec les (c_i) , nous avons perdu l'ordre de (b_i) .

Par la suite, on considère : $S_c = \sum_{i=1}^n a_i c_i = a_1 c_1 + a_2 c_2 + \dots + a_n c_n$

1. Combien existe-t-il de telles suites (c_i) possible ?
2. On suppose que i et j sont tels que $b_n = c_j$ et $b_i = c_n$.
Quel est le signe de $a_j c_j + a_n c_n - a_n b_n - a_j b_i$?
3. On considère la permutation (c'_i) obtenue à partir de (b_i) par : $\forall h \notin \{j, n\}, c'_h = c_h, c'_j = b_i$ et $c'_n = b_n$.
(Il s'agit bien d'une permutation, car comme $h \neq n, c_h \neq c_n = b_i$. On peut prendre $c'_j = b_i$).

Montrer que $\sum_{k=1}^n a_k c_k < \sum_{k=1}^n a_k c'_k$

4. (*) Démontrer alors, par récurrence sur $n \geq 2$, le résultat suivant :
pour toute permutation (c_i) de (b_i) , on a

$$\underbrace{\sum_{i=1}^n a_i b_{n-i+1}}_{=S_{-b}} < \underbrace{\sum_{i=1}^n a_i c_i}_{=S_c} < \underbrace{\sum_{i=1}^n a_i b_i}_{=S_b}$$

5. Application 1.

On considère $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+$.

En notant $m = \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$, puis $A_i = \frac{x_1 x_2 \dots x_i}{m^i}$,

$(a_i) = (A_k)$ ordonnée par ordre croissant et enfin (b_i) tel que $b_i = \frac{1}{a_i}$,

montrer l'inégalité arithmético-géométrique :

$$\text{pour tout } x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+^* \quad \sqrt[n]{x_1 \times x_2 \times \dots \times x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

6. Application 2.

Démontrer l'inégalité de Tchebychev :

$$\forall (a_i), (b_i) \in (\mathbb{R}_+^*)^n \text{ croissantes} : \frac{a_1 b_1 + \dots + a_n b_n}{n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \times \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{n}$$

7. Application 3.

Démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$(a_1 b_1 + \dots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) \times (b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)$$

2 Problème 2 : Inversion de Pascal

On suppose que (a_n) est connue et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k$.

Le but de ce problème est d'exprimer, pour tout entier n , a_n et fonction de la famille des nombres (b_k) ?

1. Cas $n = 3$. On suppose que l'on a le système suivant :

$$(S) \begin{cases} a_0 & & & = b_0 \\ a_0 & +a_1 & & = b_1 \\ a_0 & +2a_1 & +a_2 & = b_2 \\ a_0 & +3a_1 & +3a_2 & +a_3 = b_3 \end{cases}$$

(a) Résoudre (S)

(b) Quel conjecture pouvez-vous faire liant a_n à $(b_k)_k$?

2. Montrer que si pour tout entier h : $b_h = \sum_{i=0}^h \binom{h}{i} a_i$,

$$\text{alors pour tout entier } k, a_k = \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} b_j.$$

On fera bien attention au fait que la formule du binôme de Newton est fausse pour $n = 0$ et $a + b = 0$.

3. Application. Le nombre $S(n, p)$ de surjections d'un ensemble de n éléments dans un ensemble de p éléments ($p \geq n$) vérifie

$$p^n = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} S(n, k)$$

(On a pas besoin de savoir que $S(n, k)$ est le nombre de surjections de $\mathbb{N}_n$ sur $\mathbb{N}_k$).

(a) Exprimer $S(n, k)$ sous forme d'une somme.

(b) Donner les valeurs de $S(n, 1)$, $S(n, 2)$, $S(n, n)$ et $S(n, n-1)$.

4. Au XVII^e siècle, on s'est intéressé à résoudre le problème suivant :

Etant donnés $n+1$ points $y_0, y_1, \dots, y_n$, quel est la fonction polynomiale f de degré le plus petit possible telle que

$$f(0) = y_0 \quad f(1) = y_1 \dots \quad \dots f(n) = y_n$$

Etant donnée une suite (y_n) de nombres, on note $\delta y_k = y_{k+1} - y_k$ (dérivée en y_k). Puis par récurrence sur $h \in \mathbb{N}$:

$$\delta^0 y_k = y_k, \quad h \geq 1 : \delta^h y_k = \delta^{h-1} y_{k+1} - \delta^{h-1} y_k$$

(a) Exprimer en fonction des y_k , les expressions de $\delta^3 y_2$ et $\delta^4 y_0$.
Qu'en pensez-vous ?

(b) Montrer la formule de Briggs-Newton : le polynôme de degré n (minimal) passant par les points $y_0, y_1, \dots, y_n$ (en $0, 1, \dots, n$ respectivement) est donné par la formule :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \delta^k y_0 \frac{x(x-1)\dots(x-k+1)}{k!}$$

(c) Trouver la fonction polynomiale de degré 5 qui interpole $y_k = \sum_{i=0}^k i^4$.

Si $P_4(n) = \sum_{k=0}^n k^4$, est un polynôme. Il est facile de calculer $P_4(0), P_4(1), P_4(2) \dots$. Combien suffisent ?

On pourra exploiter l'écriture selon le schéma de Newton :

y_0						
	δy_0			4		
y_1		$\delta^2 y_0$			1	
	δy_1		$\delta^3 y_0$			-4
y_2		$\delta^2 y_1$		$\delta^4 y_0$ parexemple :	-3	10
	δy_2		$\delta^3 y_1$		2	6
y_3		$\delta^2 y_2$			3	
	$\delta^1 y_3$				5	
y_4						