23. Espaces vectoriels de dimension finie

Dans toute la liste K désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Espaces de dimension finie

N° 449
Soient n un entier naturel tel que $n \geqslant 3$ et $E = \mathbb{K}_{n-1}[X]$. Soient a et b deux éléments de $\mathbb{K}$ distincts.
Montrer que $F_a = \{P \in E | P(a) = 0\}$, $F_b = \{P \in E | P(b) = 0\}$, $F = \{P \in E | P(a) = P(b) = 0\}$ sont des sous-espaces vectoriels de E
Montrer que la famille des polynômes $\Big((X-a), X(X-a), X^2(X-a), \cdots, X^{n-2}(X-a)\Big)$ forme une base de F_a. Déterminer une base de F

N° 450
Déterminer pour quelle(s) valeurs de a et b la famille $u_1 = (a, b)$, $u_2 = (b, -a)$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Lorsque c'est le cas, déterminer les coordonnées du couple (x, y) dans cette base.

N° 451
Déterminer pour quelles valeurs de m la famille $u_1 = (1, 1, 2)$, $u_2 = (2, 1, 1)$, $u_3 = (1, m, 1)$ est une base de $\mathbb{R}^3$

N° 452
Montrer que la famille $(X^k(1-X)^{n-k})_{k\in\{0,\dots,n\}}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Quelles sont les coordonnées du polynôme constant $P = 1$ dans cette base ?

N° 453
Dans $\mathbb{R}^4$, soient $F = \mathrm{vect}((1, 2, -1, 0), (0, 2, 0, 1))$ et $G = \mathrm{vect}((2, 0, 0, 1), (1, 0, 0, 1))$. F et G sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?

N° 454
$E = \mathbb{R}_5[X]$. Soit $F = \{P \in E \,|\, P(0) = P(1) = 0\}$. Montrer que F est un s.e.v. de E et en trouver un supplémentaire dans E.

N° 455
Soient n un entier et $E = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \,|\, P(1) = P'(1) = P'(0) = 0\}$. Montrer que E est un s.e.v. de $\mathbb{R}_n[X]$, en déterminer une base ainsi qu'un supplémentaire dans $\mathbb{R}_n[X]$.

Dimension finie

N° 456
On désigne par a et b deux réels distincts et soit ϕ l'application de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}^4$ qui à tout polynôme P associe le quadruplet $(P(a), P'(a), P(b), P'(b))$.

1. Montrer que ϕ est un isomorphisme.
2. Déterminer l'image réciproque de la base canonique de $\mathbb{R}^4$.
3. Déterminer tous les polynômes P vérifiant :
   $P(2) = 3, P'(2) = 1, P(1) = 2, P'(1) = 4$
   (on pourra commencer par chercher un polynôme de degré inférieur ou égal à trois vérifiant ces conditions.)

N° 457
Soit a un élément de K, montrer que la famille de formes linéaires de $E = K_n[X]$ $(\phi_i)_{i=0,1,..,n}$ où $\phi_i(P) = P^{(i)}(a)$ est une base de E^*.

N° 458
Soit u l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^4$ défini par

$$u(e_1) = e_1 - e_3 + e_4,\ u(e_2) = -e_1 + e_2 + e_3,$$
$$u(e_3) = -e_1 + 3e_2 + e_3 + 2e_4,\ u(e_4) = -3e_1 + e_2 + 3e_3 - 2e_4$$

où (e_1, e_2, e_3, e_4) est la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

1. Déterminer une base de $\mathrm{Im}\,(u)$ et de $\mathrm{Ker}\,(u)$.
2. Montrer que $E = \mathrm{Im}\,(u) \oplus \mathrm{Ker}\,(u)$.
3. u est-il un projecteur ?
4. Soit $\mathscr{B}'$ une base de E obtenu par juxtaposition d'une base de $\mathrm{Im}\,(u)$ et d'une base de $\mathrm{Ker}\,(u)$. Que peut-on dire des images des vecteurs de $\mathscr{B}'$ par un endomorphisme v de E tel que $v \circ u = 0$?

Matrices et applications linéaires

N° 459
Soit u l'application canoniquement associée à

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Déterminer l'ensemble de départ, d'arrivée, son expression analytique, son noyau, son image.

N° 460
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 3/4 & 0 \\ 0 & 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$$

On notera $v_1 = e_1 + e_2 + e_3$.

1. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}\,(f - id)$ et montrer que (e_2, e_3) est une base de $\mathrm{Im}\,(f - id)$.
2. Établir que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}\,(f - id) \oplus \mathrm{Im}\,(f - id)$.
3. Soit p le projecteur sur $\mathrm{Ker}\,(f - id)$ de direction $\mathrm{Im}\,(f - id)$. Déterminer $p(v_1)$, puis $p(e_3), p(e_2), p(e_1)$.
4. Expliciter la matrice P associée à p dans la base $\mathscr{B}$.

N° 461
Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base (e_1, e_2) est $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$. Déterminer deux vecteurs u_1 et u_2 tel que l'on ait $f(u_1) = (a-b)u_1, f(u_2) = (b+a)u_2$.
Vérifier que (u_1, u_2) est une base de E et écrire la matrice dans cette base.
En déduire une formule simple permettant de calculer $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}^n$.

N° 462
Soit f l'application de $\mathbb{C}_3[X]$ dans $\mathbb{C}_3[X]$ qui à tout polynôme P associe le reste de la division euclidienne de $Q(X)P(X)$ par $X^4 - 1$ où Q désigne un polynôme fixé.

1. Montrer que f est un endomorphisme et déterminer sa matrice dans la base canonique lorsque $Q(X) = X + 2$.
2. Déterminer l'image des polynômes qui suivent $L_1(X) = (X-1)(X^2+1)$ $L_2(X) = (X+1)(X^2+1)$ $L_3(X) = (X+i)(X^2-1)$ $L_4(X) = (X-i)(X^2-1)$.
3. Déterminer la matrice de f relativement à la base L_1, L_2, L_3, L_4.

N° 463
Soit f l'endomorphisme de E espace vectoriel de dimension trois dont la matrice dans une base donnée est $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.
Montrer qu'il existe une base de E pour laquelle la matrice de f dans cette base soit $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

N° 464
Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et u un endomorphisme non nul de E, nilpotent d'indice (d'ordre) n (c'est-à-dire que $u^n = 0$ et $u^{n-1} \neq 0$).
Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ de E dans laquelle

la matrice de u est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Rang

N° 465

On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & \dots & a_n \\ a_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ où les a_i sont des complexes.

Quel est le rang de A^2 ?

N° 466

Soient A et B deux matrices non nulles de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $AB = 0$. Déterminer les rangs de A et B.

N° 467

Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer le rang de A ainsi que des matrices inversibles U et V telles que $UAV = J_r$, et des matrices inversibles P et Q telles que $A = PJ_rQ$.

N° 468

Soient E et F deux K-e.v. de dimension finie.

1. Soient $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $v \in \mathscr{L}(E,F)$.
   Montrer que $|\mathrm{rg}\,(u) - \mathrm{rg}\,(v)| \leqslant \mathrm{rg}\,(u+v) \leqslant \mathrm{rg}\,(u) + \mathrm{rg}\,(v)$.
2. Soient u, v deux endomorphismes de E tels que $u \circ v = 0$ et $u + v$ inversible.
   Montrer que $\mathrm{rg}\,(u) + \mathrm{rg}\,(v) = n$.

Problèmes

N° 469

Suites récurrentes d'ordre 3 (d'ordre n ?)

On désigne par W l'espace vectoriel des suites complexes vérifiant la relation : $u_{n+3} = -2u_{n+2} + 5u_{n+1} + 6u_n$

1. Montrer que W est un $\mathbb{C}$-e.v et que l'application de W dans $\mathbb{C}^3$ qui à toute suite (u_n) de W associe (u_0, u_1, u_2) est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
2. En déduire la dimension de W.
3. Déterminer les suites géométriques éléments de W. En déduire un moyen pour déterminer une expression de v_n en fonction de n sachant que

$$v_0 = 1, v_1 = 0, v_2 = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+3} = -2v_{n+2} + 5v_{n+1} + 6v_n$$

N° 470

(*)**Matrice de matrice...**

Soit $\mathscr{B} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Soit f_A l'application définie sur $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ par :
pour tout $X \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, $f_A(X) = XA$.

1. Montrer que f_A est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et déterminer M sa matrice associée dans la base $\mathscr{B}$.
2. Montrer que f_A est un automorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et déterminer f_A^{-1}.

N° 471

Forme linéaire sur $\mathbb{C}_2[X]$

Soit E_2 le sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ constitué des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 2. Soient a, b, c trois réels distincts.

1. Montrer que les applications $P \mapsto P(a)$, $P \mapsto P(b)$, $P \mapsto P(c)$ sont linéairement indépendantes dans $E_2^* = \mathscr{L}(E_2, \mathbb{R})$.
2. En déduire qu'il existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\forall P \in E_2, \int_a^b P(t)\,dt = \alpha P(a) + \beta P(b) + \gamma P(c).$$

N° 472

Endormorphisme nilpotent

Soient E un e.v. de dimension n et $u \in \mathscr{L}(E)$ vérifiant $u^p = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

1. Justifier que pour tout $q > p$, $u^q = 0$.
   On note désormais p_0 le plus petit entier tel que $u^{p_0} = 0$ (donc $\mathrm{Im}\ u^{p_0-1} \neq \{\vec{0}\}$). On dit que u est nilpotent d'ordre p_0.
2. Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que la famille $(x, u(x), \cdots, u^{p_0-1}(x))$ soit libre. En déduire que $p_0 \leqslant n$ et que $u^n = 0$.

N° 473

(*)**Noyau de forme linéaire**

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$ et E^* l'ensemble des formes linéaires sur E. Soient $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$ trois formes linéaires non nulles de E^*. Montrer que

$$\varphi \in \mathrm{vect}(\varphi_1, \varphi_2) \Leftrightarrow \mathrm{Ker}\,(\varphi_1) \cap \mathrm{Ker}\,(\varphi_2) \subset \mathrm{Ker}\,(\varphi).$$

N° 474

Croissance des noyaux

Soient E, F, G trois espaces vectoriels de dimension finie, $f \in \mathscr{L}(E,F)$, $g \in \mathscr{L}(F,G)$.

1. Comparer $\mathrm{Ker}\ f$ et $\mathrm{Ker}\,(g \circ f)$.
2. Montrer que

$$\dim \mathrm{Ker}\,(g \circ f) \leq \dim \mathrm{Ker}\ g + \dim \mathrm{Ker}\ f.$$

3. Montrer que si f et g sont deux endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension n, on a :

$$\mathrm{rg}(g \circ f) \geqslant \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) - n$$

N° 475

Noyau réciproque

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies. Soit V un sous-espace vectoriel de E.
Montrer que $\{u \in \mathscr{L}(E,F) | V \subset \mathrm{Ker}\ u\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E,F)$.
Déterminer sa dimension en fonction des dimensions de E, F et V.

N° 476

Endomorphisme nilpotent d'ordre petit

Soit f endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension $3n$, de rang $2n$, nilpotent d'ordre 3 ($f^3 = 0$).

1. Donner l'exemple d'une telle application f pour $n = 2$.
2. Montrer que $\dim \mathrm{Im}\ f = \dim \mathrm{Im}\ f^2 + \dim \mathrm{Im}\ f \cap \mathrm{Ker}\ f$ et en déduire que $\dim \mathrm{Im}\ f^2 = n$ puis que $\mathrm{Im}\,(f^2) = \mathrm{Ker}\,(f)$ et $\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Ker}\,(f^2)$.
3. Montrer que l'on peut trouver une base relativement à laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} O_n & O_n & O_n \\ I_n & O_n & O_n \\ O_n & I_n & O_n \end{pmatrix}$. (les matrices blocs O_n et I_n sont respectivement la matrice nulle d'ordre n et l'identité d'ordre n.)