26. Dénombrement

Choix du modèle...

N° 509

On tire simultanément 5 cartes d'un jeu de 32 cartes.

1. Combien de tirages différents peut-on obtenir ?
2. Combien de tirages différents peut-on obtenir contenant :
   (a) 5 carreaux ou 5 cœurs.
   (b) 2 cœurs et 3 piques ;
   (c) au moins 1 roi ;
   (d) au plus 1 roi ;
   (e) 2 rois et 3 cœurs

N° 510

Trouver le nombre de diviseurs de 1800.

N° 511

Combien de rondes différentes peut-on faire avec 2n personnes ? Même question en supposant qu'on alterne filles et garçons ?(il y a n filles et n garçons)

N° 512

On forme un mur sans trou ni surplomb à l'aide de n cubes identiques : tous les cubes sont donc disposés dans un même plan vertical, soit sur le sol à côté d'un autre (sans espace), soit sur un autre cube.
Déterminer le nombre de murs distincts de n cubes que l'on peut ainsi construire.

N° 513

Un jeu de cartes contient 32 cartes. On en prend 3 successivement sans remise.
Comment peut-on décrire l'ensemble des résultats possibles ?
Combien existe-t-il de tel tirage donnant au moins un coeur ? Combien existe-t-il de tel tirage donnant exactement un coeur ?

N° 514

Un jeu comporte 32 cartes dont 8 par couleur. Une main est constituée de 8 cartes non ordonnées.

1. Quel est le nombre de mains possibles ?
2. Combien de mains contiennent au moins un as ?
3. Combien comprennent au moins un coeur ou une dame ?
4. Combien ne contiennent que des cartes de deux couleurs au plus ?

N° 515

On considère une main de 13 cartes prises dans un jeu de 52 cartes.

1. Combien y a-t-il de mains distinctes comportant 5 coeurs, 3 carreaux, 3 piques et 2 tréfles ?
2. Combien y en a t-t-il comportant exactement 3 couleurs ?
3. Combien y en a-t-il comportant au moins 5 coeurs ?

N° 516

On dispose 4 pions numérotés de 1 à 4 sur 3 cases numérotées de 1 à 3. Une case peut éventuellement contenir plusieurs pions. De combien de façons peut-on opérer :

1. de sorte qu'une case au moins soit vide ?
2. de sorte qu'aucune case ne soit vide ?

N° 517

Une urne contient 5 boules blanches indiscernables et 8 boules noires indiscernables.
On tire successivement 6 boules de l'urne en remettant à chaque fois la boule tirée.

1. Quel est le nombre de résultats possibles ?
2. Combien de résultats amènent :
   (a) 5 boules noires et 1 boules blanches dans cet ordre ?
   (b) 1 boule noire au plus ?
   (c) 3 boules blanches et 3 boules noires ?
   (d) 1 boule blanche au moins

N° 518

Une urne contient 5 boules blanches numérotées de 1 à 5 et 8 boules noires numérotées de 6 à 13.
On tire successivement 6 boules de l'urne en remettant à chaque fois la boule tirée.

1. Quel est le nombre de résultats possibles ?
2. Combien de résultats amènent :
   (a) 5 boules noires et 1 boules blanches dans cet ordre ?
   (b) 1 boule noire au plus ?
   (c) 3 boules blanches et 3 boules noires ?
   (d) 1 boule blanche au moins

Ensembles

N° 519

La ville V posséde trois clubs. Le club de tennis comprend 20 membres, celui des collectionneurs de lustres 15 et les adhérents du club d'égyptologies sont au nombre de 8.
Il y a 2 joueurs de tennis et 3 collectionneurs de lustre parmi les égyptologues.
6 joueurs de tennis collectionnent les lustres. Et il existe 1 passionné qui fait partie des trois clubs.
Combien la ville V a-t-elle d'habitant faisant partie d'au moins un club ?

N° 520

Soient E, F, G des ensembles finis. Montrer que

$$\begin{aligned}\text{Card }(E\cup F\cup G) &= \text{Card }(E)+\text{Card }(F)+\text{Card }(G)-\text{Card }(E\cap F)\\ &\quad -\text{Card }(E\cap G)-\text{Card }(F\cap G)+\text{Card }(E\cap F\cap G)\end{aligned}$$

Etablir la formule :

$$\text{Card }(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}(\sum_{1\leq i_1<\ldots<i_k\leq n} \text{Card }(A_{i_1}\cap A_{\ i_2}\cap\cdots\cap A_{i_k}))$$

N° 521

Soit E un ensemble de cardinal n.

1. Quel est le nombre de couples (A, B) de parties de E ?
2. Quel est le nombre de couples (A, B) de parties de E tels que $A\cup B = E$?
3. Quel est le nombre de couples (A, B) de parties de E tels que $A\cap B = \emptyset$?

N° 522

Soit E un ensemble fini de cardinal n.

1. Dénombrer les relations binaires sur E.
2. Dénombrer les relations binaires reflexives.
3. Dénombrer les relations binaires symétriques.

N° 523

On pose $\sigma_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{2^k}\binom{k}{n}$ et $\lambda_n = \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=j}^{n}\binom{i}{j}\binom{2n-i}{n}$.

1. Montrer que $\lambda_n = 2^{2n}\sigma_n$.
2. Soit $j\in [\![0, n]\!]$ fixé.

(a) Soit i un entier naturel vérifiant $j \leqslant i \leqslant n$. On note Γ_{ij} l'ensemble des parties de $[\![1, 2n+1]\!]$ ayant $n+1+j$ éléments, et telles que le $(j+1)$-ième élément, lorsqu'on range les $n+1+j$ éléments dans l'ordre croissant, soit égal à $i+1$.
Déterminer le cardinal de Γ_{ij}.

(b) Quelle égalité obtient-on en calculant de deux manières différentes $\mathrm{Card}\,(\bigcup_{i=j}^{n} \Gamma_{ij})$?

3. Calculer alors λ_n et en déduire σ_n.

Factorielles et coefficients binomiaux

N° 524

Combien existe-t-il d'anagramme du mot "abracadabra" ?

N° 525

Montrer les relations suivantes concernant les coefficients binomiaux (par calcul direct, dénombrement ou autres) :

— $\binom{r}{k} = \frac{r}{k}\binom{r-1}{k-1}$ $(k \neq 0)$

— $\binom{r}{k} = \binom{r-1}{k} + \binom{r-1}{k-1}$ (Pascal)

— $\binom{r}{m}\binom{m}{k} = \binom{r}{k}\binom{r-k}{m-k}$

N° 526

Calculer (on peut exploiter les résultats des questions précédentes) :

- $\sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k}$ - $\sum_{k=0}^{r} k\binom{r}{k}$
- $\sum_{m=k}^{r} \binom{r}{m}\binom{m}{k}$ - $\sum_{k=0}^{n} \binom{r+k}{k}$
- $\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{m}$

N° 527

Montrer que $\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{r}{k}\binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{n}$, en

— développant le polynôme $(1+x)^r(1+x)^s$

— raisonnant sur des ensembles (ou des chemins dans un arbre)

On appelle cette relation : identité de Vandermonde

N° 528

Soient r et $n \in \mathbb{N}$ tels que $1 \leq r \leq n$. On forme toute les parties à r éléments de l'ensemble $[[1;n]]$.
On cherche à calculer $f(r,n)$, la moyenne des minimums de ces parties.

1. On note, pour tout $k \in [[1, n-r+1]]$, A_k, l'ensemble des parties de $[[1,n]]$ à r éléments et dont le minimum est k.
Montrer que $\mathrm{card}(A_k) = \binom{n-k}{r-1}$
2. Comment exprimer $f(r,n)$ en fonction des $\mathrm{card}(A_k)$?
3. Montrer, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que : $\forall\ r \leqslant n$, $\sum_{k=1}^{n-r+1} k\binom{n-k}{r-1} = \binom{n+1}{r+1}$.
Est-il possible possible de montrer ce résultat uniquement par un raisonnement combinatoire ?
4. Montrer que $f(r,n) = \binom{n+1}{r+1} / \binom{n}{r} = \frac{n+1}{r+1}$

Problèmes

N° 529

Formule de Vandermonde

En considérant deux ensembles disjoints E et F de cardinaux respectifs p et q, montrer que pour tout entier n, $0 \leqslant n \leqslant p+q$, on a

$$\binom{p+q}{n} = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k}\binom{q}{n-k}.$$

N° 530

Nombre de surjections

Soit E et F deux ensembles finis non vides. On pose $n = \mathrm{Card}(E)$ et $p = \mathrm{Card}(F)$. On notera dans toute la suite $S_{n,p}$ le nombre de surjections de E dans F.

1. Donner la valeur de $S_{n,p}$ quand $n < p$.
2. On suppose ici $n \geqslant 2$. Calculer $S_{n,1}, S_{n,2}, S(n, n+1)$. (Pour le calcul de $S_{n,2}$, on pourra dénombrer d'abord les applications non surjectives.)
3. En considérant un ensemble $E' = E \cup \{b\}$ où $b \notin E$, montrer que pour $p \geq 2$
$$S_{n+1,p} = p(S_{n,p-1} + S_{n,p}).$$
4. Construire un tableau donnant les $S_{n,p}$ pour n et p compris entre 1 et 5.

N° 531

Dénombrement et probabilité

Une cours fermée est limitée par m murs, avec $m \geqslant 2$. On repeint chacun des murs avec une couleur tirée au hasard parmi un stock de p couleurs différentes ($p \geqslant 2$). Les choix des couleurs sont mutuellement indépendants.

1. De combien de façons différentes peut-on repeindre l'ensemble de ces murs ?
2. On note $a_{m,p}$ le nombre de façons de repeindre les m murs de sorte que deux murs consécutifs quelconques ne soient jamais de la même couleur. Montrer que l'on a, pour tout $m \geqslant 2$:
$$a_{m+2,p} = (p-2)a_{m+1,p} + (p-1)a_{m,p}.$$
En déduire que :
$$a_{m,p} = (p-1)^m + (-1)^m(p-1).$$
Calculer alors la probabilié $\pi_{m,p}$ que deux murs consécutifs ne soient jamais de la même couleur, lorsqu'on dispose de p couleurs et m murs.

N° 532

Sur un damier

On considère un damier rectangulaire ayant n cases dans un sens et p cases dans l'autre sens, donc np cases en tout. Deux cases de ce damier seront dites **voisines** si elles se touchent par l'un de leurs côtés.

1. On note $u(n,p)$ le nombre de choix de 2 cases voisines sur un damier de $n \times p$ cases.
Établir une relation de la forme $u(n, p+1) = u(n,p) + a_n$, le nombre a_n ne dépendant que de n.
En déduire $u(n,p)$.
2. (*) Déterminer le nombre de choix de q cases deux à deux non voisines sur un damier $n \times 1$

N° 533

Coefficients trinomiaux

Soient n et p des éléments de N^*. On désigne par $E_{n,p}$ le nombre de solutions $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ dans $\mathbb{Z}^n$ de l'équation :

$$\max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|) = p.$$

1. Déterminer les nombres $E_{1,p}$ et $E_{2,p}$.
2. Déterminer, en fonction de n et p, le nombre de solutions dans $\mathbb{Z}^n$ de l'inéquation

$$\max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|) \leqslant p.$$

En déduire l'expression de $E_{n,p}$ en fonction de n et p.

3. Déterminer une constante C telle que $\lim_{n\to+\infty} \frac{E_{n,n}}{(2n)^n} = C$.
4. (*)Développer $(a+b+c)^n$.
Déterminer en fonction des paramètres n, p et q dans $\mathbb{N}^*$, le nombre de solutions dans $\mathbb{Z}^n$ du système :

$$\begin{cases} \min(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|) = q \\ \max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|) = p \end{cases}$$

(On pourra commencer par les cas $n = 1$ et $n = 2$ puis, dans le cas général, raisonner sur le nombre de fois où le minimum et le maximum sont atteints).

N° 534

Cribles

A. Crible de Poincaré

Soit E un ensemble fini. On note $A, B, A_1, \dots A_n$ des parties de E.

1. Montrer que $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$ et que $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A\cap B}$
2. En déduire que $1 - \mathbb{1}_{A\cup B} = (1-\mathbb{1}_A)(1-\mathbb{1}_B)$.
3. Montrer que $\mathbb{1}_{\cup_{i=1}^n A_i} = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1-\mathbb{1}_{A_i})$
4. Développer ce dernier facteurs, en déduire la formule du crible de Poincaré :

$$\#\Big(\bigcup_{k=1}^n A_k\Big) = \sum_{h=1}^{n}(-1)^{h-1} \sum_{\{i_1\dots i_h\}\in\binom{\mathbb{N}_n}{h}} \#(A_{i_1}\cap\dots\cap A_{i_h})$$

B. Crible d'Erathosténe

Connaissez-vous le crible d'Erathosténe ? Il s'agit d'écrire les nombres de 2 à 100 (ou $1000\dots$) et de barrer les multiples de 2, de 3, de 5... de tous les nombres qui restent non barrés. On fait apparaître ainsi les nombres premiers

1. écrire le crible pour les nombres de 2 à 30

On note $\forall\ k \in \mathbb{N}$, $E_k = \{n \in \mathbb{N} \mid k \text{ divise } n\}$.
Ainsi, E_2 est l'ensemble des nombres pairs, E_3, l'ensemble des nombres divisibles par 3...

2. En utilisant la formule du crible de Poincaré, calculer le nombre de nombre qu'il reste dans l'ensemble $[\![2;100]\!]$ une fois que l'on a barré les multiples de 2, 3, 5 et 7.

N° 535

Combinaisons avec répétition

On commence par une observation.

A. Petit jeu...

Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$.
Considérons donc un jeu de m balles et n cloisons que l'on peut répartir entre les balles. On cherche à calculer le nombre de combinaisons possibles.
Par exemple pour $m = 5$ et $n = 4$: •|•|•••|| ou |••||•••|

1. Montrer qu'il existe $\begin{pmatrix} m+n \\ n \end{pmatrix}$ combinaisons possibles.
2. Soient r et $M \in \mathbb{N}^*$
Quel est le nombre de r-listes (ordonnées) d'entiers $i_1, i_2, \dots i_r$ solution de l'équation :

$$i_1 + i_2 + \dots i_r = \sum_{k=1}^{r} i_k = M$$

B. Combinaison avec répétition

Le probléme du tirage avec remise et sans tenir compte de l'ordre est peu fréquent.
On appelle nombre de combinaisons avec répétition de m éléments pris n à n, le nombre d'ensembles de n éléments obtenu en tirant avec remise à partir d'un ensemble de m éléments.
Considérons donc les m éléments initiaux, on peut numéroter ces éléments : x_1, $x_2 \dots x_m$.
Alors notons i_j le nombre de fois que l'élément x_j est tiré.
En utilisant le résultat de la partie précédente, montrer que le nombre de combinaisons avec répétition de m éléments pris n à n est $\binom{n+m-1}{m-1} = \binom{m+n-1}{n}$

N° 536

Résultats binomiaux (2)

Soient $n, p \in \mathbb{N}$ tels que $n \geqslant 2$ et $p \leqslant n$.
Dans cet exercice on démontre le résultat suivant :

$$\sum_{i=0}^{p}\left(\begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} n-i \\ p-i \end{pmatrix}\right) = 2^p \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} \quad (*)$$

1. On cherche à montrer $(*)$ par une méthode numérique.
   (a) Montrer : $\forall\ i \in [\![0, p]\!]$, $\binom{n}{i}\binom{n-i}{p-i} = \binom{n}{p}\binom{p}{i}$.
   (b) En déduire la relation $(*)$ recherchée.
2. On cherche à montrer $(*)$ par une méthode combinatoire.
Soient N un ensemble de n éléments. On cherche à dénombrer par deux méthodes le nombre de couples (X, Y) tels que $Y \subset X \subset N$ et $\mathrm{card}(X) = p$ (et pas de contraintes sur le cardinal de Y).
   (a) Première méthode.
   Combien existe-t-il de sous ensembles de N de cardinal p (on note ce choix X).
   PUIS combien existe-t-il de sous-ensemble de X (on note ce choix Y) ?
   Ainsi, combien existe-t-il de couples (X, Y) tels que $Y \subset X \subset N$ et $\mathrm{card}(X) = p$?
   (b) Seconde méthode.
   Quelles sont les valeurs limites que peut prendre le cardinal de Y, on le note i ?
   Combien existe-t-il de sous-ensembles Y (de cardinal i) obtenu à partir de N ?
   PUIS combien existe-t-il d'ensemble X (de cardinal p) tel que $Y \subset X \subset N$ et $\mathrm{card}(X) = p$ (sachant que $\mathrm{card}(Y) = i$) ?
   Alors, combien existe-t-il de couples (X, Y) tels que $Y \subset X \subset N$ et $\mathrm{card}(X) = p$?
   (c) Montrer alors $(*)$.
3. Applications :
   (a) Montrer qu'en prenant $p = n-1$, puis $h = n-i$ dans $(*)$, on a : $\sum_{h=1}^{n} h\binom{n}{h} = n2^{n-1}$
   (b) Qu'obtient-on avec $p = n-2$, puis $h = n-i$
   (*le résultat final doit être de la même forme que pour la question précédente*)
   (c) En déduire : $\sum_{h=1}^{n} h^2 \begin{pmatrix} n \\ h \end{pmatrix} = n(n+1)2^{n-2}$.
   (on utilisera $h^2 = h(h-1)+h$)

Remarquons que nous pouvons également démonter cette formule en développant $(x+1+x)^n$, de deux façons...

N° 537

Dénombrement et matrices

On dispose de 9 jetons numérotés parmi 0 à 1. On considère une matrice carrée de taille 3×3 composée de ces 9 jetons. On cherche à déterminer la probabilité p pour que le déterminant de la matrice soit impair.

1. On note $\mathscr{M}$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 composées des 9 jetons. Déterminer $\mathrm{Card}(\mathscr{M})$.
2. On définit $\Omega = \{M \in \mathscr{M} \mid \det(M) \text{ impair}\}$ et Δ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 dont cinq coefficients sont égaux à 1, quatre coefficients sont nuls et de déterminant impair. Donner une relation entre $\mathrm{Card}(\Omega)$ et $\mathrm{Card}(\Delta)$.
3. Détermination de $\mathrm{Card}(\Delta)$.
   (a) On considére une matrice de Δ dont une colonne posséde trois coefficients égaux à 1.
   Déterminer le nombre K_1 de ces matrices.
   (b) On considére une matrice de Δ dont 2 colonnes possédent exactement un coefficient nul.
   Déterminer le nombre K_2 de ces matrices.
   (c) Calculer $\mathrm{Card}(\Delta)$
   (d) En déduire $\mathrm{Card}(\Omega)$
4. Déterminer la probabilité p.

CCP 2015 - MP

N° 538

Indicatrice d'Euler On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) = \mathrm{Card}\,(\{m \in \mathbb{N}^* \leqslant n \mid m \wedge n = 1\}$.

1. Que vaut $\varphi(n)$ si n est un nombre premier.
2. Montrer que si n est un nombre de la forme p^a, avec p premier, alors $\varphi(n) = n\frac{p-1}{p}$
3. On suppose que $n = p_1^{a_1}\times p_2^{a_2}\times\cdots\times p_r^{a_r}$, décomposition en produit de nombres premiers.
   On note A_i, l'ensemble des multiples de p_i.
   (a) Exprimer simplement $\varphi(n)$ en fonction de $A_1 \cup A_2 \cdots \cup A_r$.
   (b) Montrer que $\mathrm{Card}\,(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cdots\cap A_{i_k})$ se calcule facilement (une division)
   (c) Développer le produit $n(1-\frac{1}{p_1})(1-\frac{1}{p_2})\cdots(1-\frac{1}{p_r})$
   (d) En exploitant le crible de Poincaré, montrer que si $n = p_1^{a_1}\times p_2^{a_2}\times\cdots\times p_r^{a_r}$,
   $$\varphi(n) = n(1-\frac{1}{p_1})(1-\frac{1}{p_2})\cdots(1-\frac{1}{p_r})$$
4. Autre méthode (sans exploiter la question précédente).
   (a) Montrer que pour tout $n, m \in \mathbb{N}$, $\varphi(n\times m) = \varphi(n)\times\varphi(m)$.
   (b) Retrouver que si $n = p_1^{a_1}\times p_2^{a_2}\times\cdots\times p_r^{a_r}$,
   $$\varphi(n) = n(1-\frac{1}{p_1})(1-\frac{1}{p_2})\cdots(1-\frac{1}{p_r})$$
5. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\sum_{d|n}\varphi(d) = n$.