28. Déterminant

Calculs directs

N° 552

A l'aide de combinaisons linéaires de lignes ou de colonnes, déterminer, sous forme factorisée, les déterminants qui suivent où $(a,b,c) \in K^3$ ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a+b & b & b \\ b & a+b & b \\ b & b & a+b \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ bc & ca & ab \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & a & 1 & b \\ a & 1 & b & 1 \\ 1 & b & 1 & a \\ b & 1 & a & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{vmatrix}$$

N° 553

Soit (a,b,c,d) un quadruplet de $\mathbb{K}^4$, déterminer les déterminants qui suivent :

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & b+c+d \\ 1 & b & b^2 & a+c+d \\ 1 & c & c^2 & d+a+b \\ 1 & d & d^2 & a+b+c \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \cos(2a) & \cos(a+b) & \cos(a+c) & \cos(a+d) \\ \cos(b+a) & \cos(2b) & \cos(b+c) & \cos(b+d) \\ \cos(c+a) & \cos(c+b) & \cos(2c) & \cos(c+d) \\ \cos(d+a) & \cos(d+b) & \cos(d+c) & \cos(2d) \end{vmatrix}$$

N° 554

Calculer les déterminants qui suivent :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} S_1 & S_1 & S_1 & \dots & S_1 \\ S_1 & S_2 & S_2 & \dots & S_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ S_1 & S_2 & S_3 & \dots & S_n \end{vmatrix}$$

avec $S_i = \sum_{k=1}^{i} k$

N° 555

Calculer le déterminant $2p \times 2p$ suivant :

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \dots & 0 & b \\ 0 & a & 0 & \dots & b & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & b & 0 & \dots & a & 0 \\ b & 0 & 0 & \dots & 0 & a \end{vmatrix}$$

N° 556

Pour tous entiers n et p, calculer le déterminant

$$D(n,p) = \begin{vmatrix} n^2 & (n+1)^2 & \dots & (n+p)^2 \\ (n+1)^2 & (n+2)^2 & \dots & (n+p+1)^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (n+p)^2 & (n+p+1)^2 & \dots & (n+2p)^2 \end{vmatrix}$$

N° 557

Calculer $D_n = \det(|i-j|)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

N° 558

Soit $A = (a_{i,j})_{i,j \in \mathbb{N}_n}$ où $a_{i,j} = (-1)^{\max\{i,j\}}$. Calculer $\det(A)$.

CCP 2009

N° 559

Calculer le déterminant de la matrice $A = (a_{i,j})_{i,j}$ carrée d'ordre $n \geqslant 3$ où $a_{i,j} = \cos(i-j)$. (Oral CCP PC 2007)

N° 560

1. Soit $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\det(C+M) = \det M$.
   Montrer que $C = 0$.
2. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\det(A+M) = \det(B+M)$.
   Montrer que $A = B$.
3. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\det(A+M) = \det(B+{}^tM)$.
   Montrer que $A = {}^tB$.

CCP 2009

Relation de récurrence

N° 561

Déterminer le déterminant qui suit en recherchant une relation de récurrence :

$$\begin{vmatrix} a+b & b & b & \cdots & b & b \\ a & a+b & b & \cdots & b & b \\ a & a & a+b & \cdots & b & b \\ & & & & & \\ a & a & a & \cdots & a & a+b \end{vmatrix};$$

N° 562

Déterminer la valeur de

$$D_n(t) = \begin{vmatrix} 2\cos(t) & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos(t) & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 2\cos(t) & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & 2\cos(t) \end{vmatrix}$$

N° 563

Calculer le déterminant $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 5 & 3 & \ddots & \vdots \\ 0 & 2 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 3 \\ 0 & \dots & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}$ puis en général

$$\begin{vmatrix} a+b & b & 0 & \dots & 0 \\ a & a+b & b & \ddots & \vdots \\ 0 & a & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b \\ 0 & \dots & 0 & a & a+b \end{vmatrix}$$

Produit et déterminants

N° 564

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$ où $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$.

En s'intéressant au produit de A par la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j^4 \end{pmatrix}$ où $j = \exp(i\frac{2\pi}{3})$, calculer $\det A$ sous forme factorisée.
Comment généraliser ce que l'on vient de démontrer ?

N° 565
Résoudre sur $\mathbb{C}$ le système :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \alpha x_1 + x_2 + \cdots + x_n & = & 1 \\ x_1 + \alpha x_2 + \cdots + x_n & = & \beta \\ \ldots & & \\ x_1 + x_2 + \cdots + \alpha x_n & = & \beta^{n-1} \end{array}\right.$$

N° 566
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tMM = I_n$.

1. Montrer que M est inversible et déterminer son inverse. Donner les valeurs possibles de $\det M$.
2. On suppose n impair et $\det M = 1$. Montrer que $\det(M - I_n) = 0$. Qu'en déduit-on pour le système d'écriture matriciel $MX = X$ d'inconnue $X \in \mathbb{R}^n$?

N° 567
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Montrer que $\det(I_n + AB) = \det(I_n + BA)$.
Etablir que $\det(I_n + A\overline{A}) \in \mathbb{R}$.
On pourra considérer $M = \begin{pmatrix} I_n & A \\ -B & I_n \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ B & I_n \end{pmatrix}$

N° 568
Soient $X, Y \in \mathbb{R}^n$.
Simplifier la valeur du déterminant de $A = I_n + X\,{}^tY$ en utilisant les matrices $M = \begin{pmatrix} I_n & X \\ -{}^tY & 1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ {}^tY & 1 \end{pmatrix}$.
CCP 2010

N° 569
(*) On pose $\Omega = (w^{k\ell})_{0 \leq k,\ell \leq n-1}$ où $w = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.

1. Calculer $\overline{\Omega}\Omega$ et en déduire le module de $\det\Omega$.
2. Montrer que
$$\arg\det\Omega = \sum_{j<k}\left(\frac{(k+j)\pi}{n} + \frac{\pi}{2}\right)[2\pi].$$
3. Calculer $\det\Omega$

Déterminant de Vandermonde

N° 570
Calculer $M = \det\begin{pmatrix} 1 & 2a+3 & 3a^2+4a & 4a^3+5a^2 \\ 1 & 2b+3 & 3b^2+4b & 4b^3+5b^2 \\ 1 & 2c+3 & 3c^2+4c & 4c^3+5c^2 \\ 1 & 2d+3 & 3d^2+4d & 4d^3+5d^2 \end{pmatrix}$.

N° 571
Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.
On s'intéresse dans cet exercice au calcul de $\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^n \\ 1 & b & b^2 & b^n \\ 1 & c & c^2 & c^n \\ 1 & d & d^2 & d^n \end{vmatrix}$.

1. Calculer Δ_0, Δ_1, Δ_2 et Δ_3.
2. Calculons Δ_n. Soit $P = X^n + \alpha + \beta X + \gamma X^2$ un polynôme de degré n.
   (a) Montrer que $\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & P(a) \\ 1 & b & b^2 & P(b) \\ 1 & c & c^2 & P(c) \\ 1 & d & d^2 & P(d) \end{vmatrix}$.
   (b) Montrer qu'en exploitant le reste de la division euclidienne de X^n par $T = (X-a)(X-b)(X-c)$, on peut trouver Δ_n sous la forme d'un calcul simple (avec plein de zéros).
   (c) Conclure que $\Delta_n = Q(d) \times (d-a)(d-b)(d-c) \times \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$.
   (d) Que vaut Δ_4 ?

Déterminant comme polynôme

N° 572
Soit $(r_1, \ldots, r_n, a, b) \in \mathbb{C}^{n+2}$ avec $a \neq b$.

1. Montrer que $P(x) = \begin{vmatrix} r_1+x & b+x & \ldots & b+x \\ a+x & r_2+x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b+x \\ a+x & \ldots & a+x & r_n+x \end{vmatrix}$ est un polynôme de degré au plus 1
2. Calculer $P(-a)$ et $P(-b)$
3. Expliciter ainsi $P(x)$ et en déduire les valeurs de $\Delta_1 = \begin{vmatrix} r_1 & b & \ldots & b \\ a & r_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ a & \ldots & a & r_n \end{vmatrix}$ et $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & b & \ldots & b \\ a & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ a & \ldots & a & 0 \end{vmatrix}$
4. Comment déterminer $P(x)$ si $a = b$?

N° 573
Calculer le déterminant *matrice compagnon* :
$$\begin{vmatrix} -x & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & -x & \ddots & \vdots & -a_1 \\ 0 & 1 & -x & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -a_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -x-a_n \end{vmatrix}$$

N° 574
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer le déterminant $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1-x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \ldots & 1 & n-x \end{vmatrix}$

(CCP)

Déterminant par blocs

N° 575
Soit $M \in \mathcal{M}_n(K)$. On suppose que M peut s'écrire par blocs $M = \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}$ où A et B sont des matrices carrées.
Montrer que $\det M = \det A \det B$

N° 576
(*) Soient $A, B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. Montrer que $\det\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \geq 0$.

Problèmes

N° 577
Rang de la comatrice
Soit A une matrice carrée d'ordre m à coefficients dans $\mathbb{K}$, avec $m \geq 2$.
On note $\mathrm{Com}A$ la comatrice de A. Montrer successivement que :

1. Si $\text{rg } A = m$, alors $\text{rg Com}A = m$.
2. Si $\text{rg } A = m-1$, alors $\text{rg Com}A = 1$ (utiliser des applications linéaires.)
3. Si $\text{rg } A \leq m-2$, alors $\text{rg Com}A = 0$

N° 578

Application multiplicative

Soit $\varphi : \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ non constante et telle que : $\forall\ A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, $\varphi(A \times B) = \varphi(A) \times \varphi(B)$.

1. Déterminer $\varphi(I_n)$. Montrer que si A est inversible, alors $\varphi(A) \neq 0$.
2. Montrer que $\varphi(0_n) = 0$. Montrer que si A est nilpotente alors $\varphi(A) = 0$.
3. Montrer que si A n'est pas inversible, alors $\varphi(A) = 0$.
4. Connaissez-vous une telle application φ ? Y en a-t-il d'autres ?

N° 579

Applications du Vandermonde

1. Démontrer l'existence d'un polynôme unique de degré inférieur ou égal à $n-1$ prenant des valeurs fixées en n points.
2. Soient $T_0, T_1, ..T_{n-1}$ une suite de polynômes tels que $\deg(T_i) = i$ et $x_0, x_1, .., x_{n-1}$, n éléments de K. Déterminer le déterminant de la matrice $(T_i(x_j))_{i=0,..,n-1; j=0,..,n-1}$.

N° 580

Déteminant de la matrice de Cauchy

Soient p un entier non nul, $a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_p$ des réels strictement positifs tels que, pour tout i, pour tout j, $i \neq j \Rightarrow b_i \neq b_j$.

On note $C(a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_p) = \left| \dfrac{1}{a_i + b_j} \right|_{1 \leqslant i, j \leqslant p}$.

1. Calculer de manière factorisée $C(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3)$.
2. Soit $F(X) = \dfrac{(X-a_1)\dots(X-a_{p-1})}{(X+b_1)\dots(X+b_p)}$. Déterminer la décomposition en éléments simples de F.
3. On note D le déterminant d'ordre p :
$$D = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_{p-1}} & F(a_1) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{a_p+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_p+b_{p-1}} & F(a_p) \end{vmatrix}.$$
En calculant D par deux méthodes différentes, déterminer un lien entre $C(a_1, \dots, a_{p-1}, b_1, \dots, b_{p-1})$ et $C(a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_p)$.
4. En déduire que
$$C(a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_p) = \frac{\displaystyle\prod_{1 \leq i < j \leq p} (a_j - a_i) \prod_{1 \leq i < j \leq p} (b_j - b_i)}{\displaystyle\prod_{1 \leq i, j \leq p} (a_i + b_j)}.$$
5. Que vaut le déterminant de la matrice de Hilbert : $\left(\dfrac{1}{i+j-1} \right)_{1 \leqslant i, j \leqslant n}$

N° 581

Calcul de déterminant par blocs

On considère dans cette partie A, B, C, D des éléments de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
On suppose que $D \times C = C \times D$

1. Soit la matrice définie par blocs
$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2n}(\mathbb{C})$$
A l'aide du produit $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & O_n \\ -C & I_n \end{pmatrix}$, montrer que si la matrice D est inversible alors
$$\det(M) = \det(AD - BC)$$
2. Pour tout $x \in \mathbb{C}$, on pose $D_x = D - xI_n$ et $M_x = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D_x \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2n}(\mathbb{C})$.
   (a) Montrer que $\det(M_x) = \det(AD_x - BC)$ pour tout nombre complexe $x \notin S$ où S est un sous-ensemble fini de $\mathbb{C}$.
   (b) En déduire que l'on a $\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC)$ dés que $D \times C = C \times D$.

N° 582

Avec matrice de permutation

On note $\mathbf{S}$, l'ensemble des matrices de permutation (un seul 1 par ligne et par colonnes).

1. Montrer qu'il existe une bijection $S : \mathfrak{S}_\mathfrak{n} \to \mathbf{S}$.
2. Montrer qu'avec les notations du cours :
$$\text{Coef}_{1,\sigma(1)}(A) \times \cdots \times \text{Coef}_{n,\sigma(n)}(A) = \prod_{k=1}^{n} \text{Coef}_{k,k}(AS(\sigma)^T)$$
3. En déduire une formule compacte de la définition du déterminant

N° 583

Théorème de Cayley-Hamilton(*) Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On définit pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$\chi(t) = \det(tI_n - M)$$
appelé la fonction caractéristique de M.

1. On note $\mu_p = (-1)^p \displaystyle\sum_{I \subset \binom{\mathbb{N}_n}{n-p}} \det M^{I \wedge I}$ où $M^{I \wedge I}$ est la matrice M auquel on a enlevé les lignes et les colonnes d'indices $i \in I$.
   Calculer μ_1 et μ_n.
2. Montrer que χ est une fonction polynomiale en t, de degré n.
   Plus précisément, montrer que
$$\chi_M(t) = t^n + \mu_1 t^{n-1} + \mu_2 t^{n-2} + \dots + \mu_{n-1} t + \mu_n$$
3. Montrer de la même manière que $L(t) = {}^t\text{com}(tI_n - M)$ est une fonction polynomiale en t, de degré $n-1$ et à coefficients dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
4. Calculer $L(t) \times (tI_n - M)$, montrer que l'on obtient une matrice colinéaire à I_n. Exprimer ce coefficient de colinéarité en fonction de $\chi_M(t)$.
5. En déduire la relation de Cayley-Hamilton :
$$\chi_M(M) = 0$$