Intégrale KH sur un intervalle. Théorèmes de convergence.

Objectifs

Le but de ce problème est d'anticiper les résultats très importants de seconde année, afin de faciliter leur apprentissage et surtout de voir comment les résultats se présentent (et de démontrent) dans le cas de l'intégrale de K-H.

Nous commençons par démontrer le résultat important de convergence monotone pour une suite de fonction croissante sur un compact K. C'est le théorème qui est à la base de tous les résultats de *convergence* seconde année.

Il faut ensuite l'étendre sur des intervalles I non nécessairement compact (i.e. non [fermé et bornée]).
Pour se faire, nous commençons par définir la notion de fonctions intégrables sur I en nous concentrant sur les fonctions positives selon la même stratégie que nous suivrons pour construire les familles sommables (en première année).

On conclura par le théorème phare de seconde année : le théorème de convergence dominée.

1 Théorème de convergence monotone.

▷ **1.1.**
On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 2n^2\left(\frac{1}{n} - x\right)$ si $x \in [0, \frac{1}{n}]$ et $f_n(0) = 0$ sinon.

1. Montrer que pour tout $x \in]0,1]$ (fixé !!), $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \to 0$.
   On dit que la suite f_n converge simplement vers 0 sur $]0,1]$.
2. Soit $\epsilon > 0$. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_\epsilon^1 f_n(t)\mathrm{d}t$
3. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 f_n(t)\mathrm{d}t$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(t)\mathrm{d}t$ et $\int_0^1 \lim f_n(t)\mathrm{d}t$.
4. Qu'en pensez-vous ?

Il n'est donc pas du tout évident que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_K f_n(t)\mathrm{d}t = \int_K \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t$.
On notera par la suite K un compact (i.e. un segment ou un intervalle fermé et borné) de $\mathbb{R}$.
$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sera une suite de fonctions définies sur K qui converge (simplement) vers f, i.e.

$$\forall\, x \in K, \qquad (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)$$

▷ **1.2.**
Rappeler le lemme d'Henstock pour une fonction φ intégrable sur K

▷ **1.3.**
Considérons (f_n) une suite de fonctions définies sur $K = [a,b]$, croissante et convergente vers une fonction f,

$$\forall\, x \in K, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}, f_{n+1}(x) \geqslant f_n(x) \qquad \text{et} \qquad (f_n(x)) \to f(x)$$

On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \in \mathcal{I}(K)$ et qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_K f_n \leqslant M$.

On cherche à montrer f est intégrable et que $\int_K f = \lim\left(\int_K f_n(t)\mathrm{d}t\right)$.
Pour cela on fixe $\epsilon > 0$. On note $\ell(K) = b - a > 0$.

1. On note $J_n = \int_K f_n(t)\mathrm{d}t$. Montrer que que (J_n) est une suite croissante, convergente.
   On note $J = \lim(J_n)$. On note $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\, n \geqslant N_0$, $J - \epsilon \leqslant J_n \leqslant J$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe $\delta_n : \mathbb{K} \to \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall\, \sigma_p$, δ_n-fine, $|J_n - S(f_n, \sigma_p)| \leqslant \frac{\epsilon}{2^{n+1}}$

3. Montrer que pour tout $t \in K$, il existe $\underline{N_t \geqslant N_0}$ tel que $\forall\ n \geqslant N_t$, $0 \leqslant f(t) - f_n(t) \leqslant \dfrac{\epsilon}{\ell(K)}$
4. Considérons $\delta : K \to \mathbb{R}_+^*$, $t \mapsto \delta_{N_t}(t)$. Montrer qu'il s'agit bien d'une jauge sur K.
5. Soit σ_p, une subdivision δ-fine.
   On suppose que $\sigma_p = (([x_{i-1}, x_i], t_i), i \in \mathbb{N}_p)$. Montrer que

$$|J - S(f, \sigma_p)| \leqslant \left|J - \sum_{i=1}^{p} \int_{x_{i-1}}^{t_i} f_{N(t_i)}(x)\mathrm{d}x\right| + \left|\sum_{i=1}^{p} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(f_{N(t_i)}(x) - f_{N(t_i)}(t_i)\right) \mathrm{d}x\right| + \left|\sum_{i=1}^{p} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(f_{N(t_i)}(t_i) - f(t_i)\right) \mathrm{d}x\right|$$

   et majorer cette somme par 3ϵ.
   Pour la majoration du milieu par ϵ, on exploitera le lemme d'Henstock (et la question 2).
6. Conclure

En réalité, on a une convergence uniforme de (f_n) vers 0, dès que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue (Lemme de Dini).

2 Fonctions intégrables

On dit que f est *localement intégrable* sur I, si pour tout compact $K \subset I$, $f \in \mathcal{I}(K)$ (même si f n'est pas positive).

On considère une fonction f positive sur I, un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$.
On dit que f est intégrable sur I si pour tout segment $K \subset I$, $f \in \mathcal{I}(K)$ et $\{\int_K f, K \subset I, K \text{ compact}\}$ est borné.
Dans ce cas, on note $\int_I f = \sup\{\int_K f, K \subset I, K \text{ segment}\}$.

▷ **2.1.**
Montrer que si f est localement intégrable sur I, alors
• ou bien f est intégrable sur I
• ou bien $\sup\{\int_K f, K \subset I, K \text{ segment}\} = +\infty$

Par la suite, nous ne considérons que des fonctions localement intégrables sur I.
Dans le cas où f est positive, on pourra alors toujours écrire $\int_I f$. Celle-ci valant $+\infty$ si f n'est pas intégrable et sa « vraie » valeur si f est intégrable. Il suffira donc de calculer cette valeur pour savoir si f est intégrable.

▷ **2.2.**
Soit f, positive sur I, localement intégrable.

1. On suppose que f est intégrable.
   (a) Soit $\epsilon > 0$. Montrer qu'il existe un segment $K \subset I$, tel que $\forall\ J$, segment tel que $K \subset J \subset I$, $\left|\int_J f - \int_I f\right| < \epsilon$.
   (b) Montrer qu'il existe une suite de segment (K_n) tel que $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $K_n \subset K_{n+1} \subset I$ et $\left|\int_{K_n} f - \int_I f\right| \leqslant \dfrac{1}{n}$
2. On suppose que f n'est pas intégrable.
   Montrer qu'il existe une suite de segment (K_n) tel que $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $K_n \subset K_{n+1} \subset I$ et $\left(\int_{K_n} f\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$

On pourra considérer l'opération suivante définie sur les segments : $K := \overline{K_1 \cup K_2}$ tel que si $K_1 = [a_1, b_1]$ et $K_2 = [a_2, b_2]$, alors $K = [\min(a_1, a_2), \max(b_1, b_2)]$.
K est bien un segment, il contient à la fois K_1 et K_2. Et si $K_1, K_2 \subset I$, alors $K \subset I$.

▷ **2.3.**
Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$, localement intégrables sur I.

1. On suppose que $0 \leqslant f \leqslant g$ et que g est intégrable sur I.
   Montrer que f est intégrable sur I.
2. On suppose que $|f|$ est intégrable sur I. On note $f_+ : x \mapsto \max(f(x), 0)$ et $f_- : x \mapsto \max(-f(x), 0)$.
   Montrer que f_+ et f_- sont positives et intégrables sur I.

▷ **2.4.**
Soient f, g, positives et intégrables sur I. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+$.

1. Montrer que $\displaystyle\int_I f \geqslant 0$.
2. Montrer que $\displaystyle\int_I (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_I f + \mu \int_I g$.
   Le résultat reste-t-il vrai si $\mu < 0$?

On suppose maintenant que f n'est pas nécessairement positive.
Mais, on considère toujours que f est localement intégrable sur I.
On dit que f *est intégrable sur* I si $|f|$ est intégrable sur I.

▷ **2.5.**
Montrer que la relation $\mathcal{R}$ définie par : $f \,\mathcal{R}\, g \iff \displaystyle\int_I |f-g| = 0$ est une relation d'équivalence.
Les fonctions f de la classe d'équivalence de la fonction identiquement nulle sont qualifiées de fonctions négligeables.
On dit pour f et g deux fonctions dans la même classe d'équivalence, qu'elles sont égales presque partout (ou presque sûrement).

▷ **2.6.**
On considère une suite de fonctions (f_n) intégrables sur I, croissante (la suite !) et convergente simplement vers f (sur I). On supposera également que $f_n \geqslant 0$ $(\star)$.
Montrer que f est intégrable sur I si et seulement si $\lim(\displaystyle\int_I f_n)$ existe, et dans ce cas, $\displaystyle\int_I f = \lim(\int_I f_n)$.
L'hypothèse $(\star)$ n'est pas nécessaire : il suffit en effet de soustraire f_0 à la suite (f_n) pour obtenir $(\star)$, mais elle est bien pratique.

Extension forte : au cas convergent simplement presque partout.
On peut résumer en si (f_n) est monotone, alors $\lim \displaystyle\int_I f_n = \int_I \lim f_n$, dès lors que l'un des deux nombres est fini.

3 Théorème de Hacke. Critère de convergence de l'intégrale sur un intervalle

On commence par une observation pour des fonctions non bornées

▷ **3.1.**
Est-ce que $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{|x|}}$ si $x \neq 0$, $f(0) = 0$ est intégrable sur $[-1, 1]$?

On s'intéresse maintenant à des fonctions quelconques définies sur I.
Supposons que $I = [a, b[$ (on se concentre sur b, qui peut valoir $+\infty$!)
On dit, pour une fonction f localement intégrable, que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge si $F : x \mapsto \displaystyle\int_{[a,x]} f$ admet une limite lorsque $x \to b$. On note alors $\displaystyle\int_a^{\to b} f$ cette limite.

▷ **3.2.**
Montrer que si $f \geqslant 0$ sur I, alors f est intégrable sur I ssi l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ converge.
Montrer alors que l'on a $\displaystyle\int_I f = \int_a^{\to b} f$.
Application : Montrer que $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ ssi $\alpha > 1$.

On peut aussi s'intéresser à un critère de $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ sur $]0, 1]$.

Dans l'exercice qui suit, le résultat est propre à l'intégrale de Kurzweil-Henstock. Pour l'intégrale de Riemann, il n'y a que les intégrales impropres qui peuvent exister. Pour l'intégrale de Lebesgue, tout ceci n'a pas de sens

dès qu'une fonction n'est pas intégrable.
S'inspirant du résultat obtenu précédemment, et pour les fonctions non nécessairement à valeurs positives, on dit que :

f est intégrable sur l'intervalle I de valeur d'intégrale A noté $\displaystyle\int_I f$

si pour tout $\epsilon > 0$, il existe un segment $K \subset I$, une jauge $\delta : I \to \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\forall\ \sigma_p = \big(([x_{i-1}, x_i], t_i), i \in \mathbb{N}_p\big) \text{subdivision pointée } \delta_{|[x_0,x_n]}\text{-finie avec } K \subset [x_0, x_p] \subset I, |S(f, \sigma_p) - A| < \epsilon$$

On notera que cette définition généralise bien la définition habituelle dans le cas où I est un intervalle compact, i.e. un segment.

▷ **3.3.**
(**) Montrer le théorème de Hacke (en exploitant le lemme d'Henstock).
Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$.
Montrer que f est intégrable sur $[a, b[$ si et seulement si

f est intégrable sur tout $[a, \beta]$ avec $a < \beta < b$ et $\beta \mapsto \displaystyle\int_a^\beta f$ admet une limite pour $\beta \to b$.

Et dans ce cas $\displaystyle\int_{[a,b[} f = \int_a^{\to b} f(t)\mathrm{d}t$

▷ **3.4.**
Soit I un intervalle, fermé ou non.
On considère une suite de fonctions (f_n) définie et KH-intégrable sur I.
On suppose, en outre, que :
- cette suite est croissante,
  c'est-à-dire : $\forall\ x \in I, \forall\ n \in \mathbb{N},\ f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)$.
- cette suite est convergente vers une fonction f sur I :
  $\forall\ x \in I, \forall\ n \in \mathbb{N},\ \big(f_n(x)\big)_n \to f(x)$
- la suite $\left(\displaystyle\int_I f_n(t)\mathrm{d}t\right)_n$ est majorée par une constante M (indép. de n).

Alors f est KH-intégrable sur I et $\displaystyle\int_I f = \lim_{n\to+\infty} \int_I f_n$.
Théorème de convergence monotone sur I pour f quelconque

▷ **3.5.**

1. Démontrer le lemme de Fatou :
   Soient f_n, g des fonctions KH-intégrables, avec pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \geqslant g$.
   Si $\displaystyle\lim\inf_{n\to+\infty} \int_I f_n(x)\mathrm{d}x < +\infty$, alors $f = \lim \mathrm{Im}\ _{n\to+\infty} f_n$ est finie presque partout, HK-intégrable et on a
   $$\int_I \liminf f_n \leqslant \liminf \int_I f$$
2. En déduire le théorème de convergence dominée :
   Supposons que (f_n) est une suite de fonctions intégrables sur I et pour tout $x \in I$, $|f_n(x)| \leqslant g(x)$. On suppose que g est intégrable et que (f_n) converge simplement vers f.
   Alors f est intégrable sur I et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_I f_n(t)\mathrm{d}t = \int_I f(t)\mathrm{d}t$.

Correction des exercices

▷ Corrigé de l'exercice 1.1

1. $x > 0$ est fixé. $(\frac{1}{n}) \to 0$.
   Donc il existe $N > 0$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $x > \frac{1}{n}$ $(N = \lfloor \frac{1}{x} \rfloor + 1)$.
   Donc pour tout $n \geqslant N$, $f_n(x) = 0$ et donc $(f_n(x)) \to 0$.
2. Soit $\epsilon > 0$, d'après la question précédente,
   il existe N tel que pour tout $n \geqslant N$ et tout $t > \epsilon$, $f_n(t) = 0$, donc $\displaystyle\int_\epsilon^1 f_n(t)\mathrm{d}t = 0$
   et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_\epsilon^1 f_n(t)\mathrm{d}t = 0$
3. $\displaystyle\int_0^1 f_n(t) = \int_0^{\frac{1}{n}} 2n^2 \left(\frac{1}{n} - x\right) \mathrm{d}x = \left[2n^2 \left(\frac{1}{n}x - \frac{x^2}{2}\right)\right]_0^{\frac{1}{n}} = 2n^2 \times \frac{1}{2n^2} = 1.$
   C'est une valeur constante, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(t)\mathrm{d}t = 1$.

   La fonction f n'est pas bien définie en 0. Mais on a dit que la valeur d'une intégrale d'une fonction n'était pas modifiée par sa valeur en un point, donc on peut penser pouvoir calculer $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 0$
4. Ou bien la valeur en un point fait changer, ou bien l'interversion entre lim et $\displaystyle\int$ n'est pas immédiat.
   Ou bien les deux...

▷ Corrigé de l'exercice 1.2

Soit $\varphi \in \mathcal{I}(K)$.
Soit $\epsilon > 0$, il existe $\delta : K \to \mathbb{R}_+^*$, jauge tel que :

pour tout $\sigma_p = \big(([x_{i-1}, x_i], t_i), i \in \mathbb{N}_n\big)$ δ-fine, on a bien évidemment $\left|\displaystyle\int_K \varphi - S(\varphi, \sigma_p)\right| \leqslant \epsilon$,

mais aussi pour toute sous-subdivision s_p de σ_p, ayant $\mathcal{D}(s_p)$ comme support : $\left|\displaystyle\int_{\mathcal{D}(s_p)} \varphi - S(\varphi, s_p)\right| \leqslant 2\epsilon$.

▷ Corrigé de l'exercice 1.3

1. Comme $f_{n+1} \geqslant f_n$, en intégrant cette relation sur K : $J_{n+1} \geqslant J_n$. La suite est croissante majorée par M donc convergente vers $J = \sup J_n$. Et donc N_0 existe bien.
2. C'est la définition de f_n intégrable sur K avec un ϵ bien choisi.
3. C'est la définition de la convergence croissante de $(f_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ vers $f(t)$ avec un ϵ bien choisi.
   On peut choisir à partir du rang que l'on veut. Ici supérieur à N_0.
4. Pour tout t, $\delta(t) = \delta_{N_t}(x) > 0$ car δ_{N_t} est une jauge.
5. Soit $\sigma_p = \big(([x_0, x_1], t_1), \dots ([x_{p-1}, x_p], t_p)\big)$, une subdivision δ-fine.
   On a bien évidemment :

$$J - S(f, \sigma_p) = J - \sum_{i=1}^p (x_i - x_{i-1}) f(t_i) = J - \sum_{i=1}^p \int_{x_{i-1}}^{x_i} f_{N(t_i)}(x)\mathrm{d}x +$$

$$\sum_{i=1}^p \int_{x_{i-1}}^{x_i} \big(f_{N(t_i)}(x) - f_{N(t_i)}(t_i)\big)\,\mathrm{d}x + \sum_{i=1}^p \int_{x_{i-1}}^{x_i} \big(f_{N(t_i)}(t_i) - f(t_i)\big)\,\mathrm{d}x$$

Puis, on exploite une inégalité triangulaire, pour chacun des trois morceaux.

$$|J - S(f, \sigma_p)| \leqslant \left|J - \sum_{i=1}^p \int_{x_{i-1}}^{t_i} f_{N(t_i)}(x)\mathrm{d}x\right| + \left|\sum_{i=1}^p \int_{x_{i-1}}^{x_i} \big(f_{N(t_i)}(x) - f_{N(t_i)}(t_i)\big)\,\mathrm{d}x\right| + \left|\sum_{i=1} p \int_{x_{i-1}}^{x_i} \big(f_{N(t_i)}(t_i) - f(t_i)\big)\,\mathrm{d}x\right|$$

On note $N_M = \max\big(N(t_1), N(t_2) \dots N(t_n)\big)$;
• Puisque $N(t_i) \geqslant N_0$, et par croissance de $(f_n(t))_n$:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f_n(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_{x_{i-1}}^{x_i} f_{N(t_i)}(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_{x_{i-1}}^{x_i} f_{N_M}(x)\mathrm{d}x$$

Puis en sommant pour $i \in \mathbb{N}_p$:

$$J_{N_0} = \int_a^b f_{N_0}(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{p} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f_{N_0}(x)\mathrm{d}x \leqslant \sum_{i=1}^{p} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f_{N(t_i)}(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f_{N_M}(x)\mathrm{d}x = J_{N_M} \leqslant J$$

On a donc $\left| J - \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{t_i} f_{N(t_i)}(x)\mathrm{d}x \right| = J - \sum_{i=1}^{p} \int_{x_{i-1}}^{t_i} f_{N(t_i)}(x)\mathrm{d}x = \leqslant J - J_{N_0} \leqslant \epsilon.$

- Pour le troisième terme. Soit $i \in \mathbb{N}_p$. Par croissance de $(f_n)_n$,
  $0 \leqslant f(t_i) - f_{N(t_i)}(t_i) \leqslant \dfrac{\epsilon}{\ell(K)}$.
  Donc, maintenant, on additionne ces inégalités pour chaque i (tout est positif) :

$$\left| \sum_{i=1}^{p} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(f_{N(t_i)}(t_i) - f(t_i)\right) \mathrm{d}x \right| = \sum_{i=1}^{p} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(f(t_i) - f_{N(t_i)}(t_i)\right) \mathrm{d}x \leqslant \frac{\epsilon}{\ell(K)} \int_a^b \mathrm{d}x = \epsilon$$

- Pour la dernière valeur absolue. σ_p est une subdivision δ-fine.
  Donc $\forall\, i \in \mathbb{N}_p$, $t_i - \dfrac{\delta(t_i)}{2} \leqslant x_{i-1} \leqslant t_i \leqslant x_i \leqslant t_i + \dfrac{\delta(t_i)}{2}$.
  Or $\delta(t_i) = \delta_{N_{t_i}}(t_i)$, par définition de δ.
  Ainsi il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $([x_{i-1}, x_i], t_i)$ est une sous-subdivision de subdivision pointée δ_m-fine.
  En regroupant ensemble toutes les sous-subdivisions $([x_{i-1}, x_i], t_i)$ associée à un même entier m.
  C'est-à-dire l'ensemble $I_m = \{i \in \mathbb{N}_p \mid N(t_i) = m\}$, formant la sous-subdivision $s_p(m)$,
  et en appliquant alors le lemme d'Henstock, on trouve

$$\left| \sum_{i \in I_m} \left[\int_{x_{i-1}}^{x_i} f_{N(t_i)}(x) - f_{N(t_i)}(t_i)\mathrm{d}t) \right] \right| \leqslant 2\frac{\epsilon}{2^{m+1}} = \frac{\epsilon}{2^m}$$

  Puis, chaque entier $i \in \mathbb{N}_p$ appartient à un et un seul I_m, donc (beaucoup de sommes sont vides)

$$\left| \sum_{i=1}^{p} \left[\int_{x_{i-1}}^{x_i} (f_{N(t_i)}(x) - f_{N(t_i)}(t))\mathrm{d}t \right] \right| = \sum_{m=1}^{+\infty} \left| \sum_{i \in I_m} \left[\int_{x_{i-1}}^{x_i} (f_{N(t_i)}(x) - f_{N(t_i)}(t)) \right] \right| \leqslant \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\epsilon}{2^m} = \epsilon$$

Ainsi : $|J - S(f, \sigma_p)| \leqslant 3\epsilon$.

6. La majoration précédente, étant vraie pour tout ϵ,
   on trouve que f est intégrable sur K avec $\displaystyle\int_K f = J = \lim_n \int_K f_n(t))\mathrm{d}t$.

▷ Corrigé de l'exercice 2.1

Puisque f est localement intégrable sur I, pour tout segment $K \subset I$, $\displaystyle\int_K f$ est bien défini.

On se place dans $\overline{\mathbb{R}_+}$. De deux choses disjointes l'une :

- ou bien $\{\displaystyle\int_K f, K \subset I, K \text{ segment}\}$ est borné, ce qui est équivalent à f est intégrable sur I.
- ou bien $\{\displaystyle\int_K f, K \subset I, K \text{ segment}\}$ n'est pas borné, i.e. $\sup\{\displaystyle\int_K f, K \subset I, K \text{ compact}\} = +\infty$

▷ Corrigé de l'exercice 2.2

1. Comme f est intégrable, $\{\displaystyle\int_K f, K \subset I, K \text{ segment}\}$ est borné et sa borne supérieure se note $\displaystyle\int_I f$.

   On a alors : $\forall\, \epsilon > 0$, $\exists\, K \subset I$ et K segment tel que $\displaystyle\int_I f - \epsilon < \int_K f \leqslant \int_I f$.

   Soit J segment, tel que $K \subset J \subset I$.
   Alors comme $J \subset I$, $\displaystyle\int_J f \leqslant \int_I f$ (puisqu'il s'agit d'un majorant).
   Comme f est positive, elle l'est sur $J \setminus K$, et on a, d'après la relation de Chasles :

$$\int_J f = \int_K f + \underbrace{\int_{J \setminus K} f}_{\geqslant 0}$$

   Donc $\displaystyle\int_K f \leqslant \int_J f$.

   Bilan, pour tout J segment, tel que $K \Subset J \subset I$: $\displaystyle\int_I f - \epsilon < \int_K f \leqslant \int_J f \leqslant \int_I f$, donc $0 \leqslant \displaystyle\int_I f - \int_J f < \epsilon$.

2. On suppose que K_n vérifie $\left|\int_{K_n} f - \int_I f\right| \leqslant \frac{1}{n}$ (pour $n \geqslant 1$).
   On prend alors $\epsilon \leftarrow \frac{1}{n+1}$.
   Donc il existe un segment K tel que pour tout segment J tel que $K \subset J \subset I$, $\left|\int_I f - \int_J f\right| \leqslant \frac{1}{n+1}$.
   L'ensemble $\{J, \text{segment tel que } K \subset J, K_n \subset J, J \subset I\}$ n'est pas vide.
   On prend alors K_{n+1} un élément de cet ensemble.
   On a ainsi créé une suite de segment qui répond à la question posée.

3. Comme $\{\int_K f, K \subset I, K \text{ segment}\}$ n'est pas borné,
   pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un segment $J_n \subset I$ tel que $\int_{J_n} f \geqslant n$.
   Là encore, quitte à prendre (par récurrence), $K_{n+1} = \overline{J_{n+1} \cup K_n}$, on a $\left(\int_{K_n} f\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

▷ Corrigé de l'exercice 2.3

1. Comme $f \leqslant g$ sur I, pour tout $K \subset I$, $\int_K f \leqslant \int_K g$.
   Donc tout majorant de $\int_K g$ est un majorant de $\int_K f$.
   Puis, comme g est intégrable, $\{\int_K f, K \subset I, K \text{ segment}\}$ est majoré.
   Il en est donc nécessairement de même de $\{\int_K f, K \subset I, K \text{ segment}\}$.

2. On a $0 \leqslant f_+ \leqslant |f|$ et $0 \leqslant f_- \leqslant |f|$.
   On applique ensuite la question précédente.

▷ Corrigé de l'exercice 2.4

1. $f \geqslant 0$, donc pour tout segment K, $\int_K f \geqslant 0$ et donc 0 n'est pas un majorant de $\{\int_K f, K \subset I, K \text{ segment}\}$,
   ainsi $\int_I f \geqslant 0$.

2. $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+$.
   Pour tout segment K, $\int_K \lambda f + \mu g = \lambda \int_K f + \mu \int_K g \leqslant \lambda \int_I f + \mu \int_I g$.
   Donc $\lambda f + \mu g$ est intégrable sur I et $\int_I (\lambda f + \mu g) \leqslant \lambda \int_I f + \mu \int_I g$.
   Puis considérons $\epsilon > 0$.
   Alors il existe K_1 et K_2 tel que $\int_{K_1} f > \int_I f - \frac{\epsilon}{2\lambda}$ et $\int_{K_2} g > \int_I g - \frac{\epsilon}{2\mu}$.
   Considérons $K = \overline{K_1 \cup K_2}$, alors $\int_K f > \int_I f - \frac{\epsilon}{2\lambda}$ et $\int_K g > \int_I g - \frac{\epsilon}{2\mu}$.
   On a donc $\int_I (\lambda f + \mu g) \geqslant \int_K \lambda f + \mu g > \lambda \int_I f + \mu \int_I g + \epsilon$.
   Donc $\int_I (\lambda f + \mu g) \geqslant \lambda \int_I f + \mu \int_I g$.
   Par double inégalité, on a le résultat attendu. Si $\mu < 0$, on considère alors plutôt $h = \lambda f + \mu g$ et $h - \mu g$, positives ou presque (cf. partie suivante)

▷ Corrigé de l'exercice 2.5

- $f\mathcal{R}f$, car $f - f = 0$ et pour tout $K \subset I$, $\int_K 0 = 0$ donc la borne supérieure est nulle.
- Si $f\mathcal{R}g$, alors comme $|f-g| = |g-f|$, on a directement : $g\mathcal{R}f$
- Si $f\mathcal{R}g$ et $g\mathcal{R}h$.

Par inégalité triangulaire : $|f-h| = |f-g+g-h| \leqslant |f-g| + |g-h| := \psi$.
Puis d'après la question précédente ($\lambda = \mu = 1$) : $\int_I \psi = \int_I |f-g| + \int_I |g-h| = 0 + 0 = 0$.
Puis par l'exercice qui précède encore : $0 \leqslant \int_I |f-h| \leqslant \int_I \psi = 0$.

▷ Corrigé de l'exercice 2.6

Supposons que f est intégrable sur I. Alors $\displaystyle\int_I f$ existe, c'est un nombre réel.

Dans ce cas, comme pour tout $n\in\mathbb{N}$, par inégalité : $K_n := \displaystyle\int_I f_n \leqslant \int_I f$,

on a donc (J_n) croissante majorée donc convergente.

Donc $\lim(\displaystyle\int_I f_n)$ existe.

Réciproquement, supposons que $\lim(\displaystyle\int_I f_n)$ existe. Notons, toujours, $J_n = \displaystyle\int_I f_n$

La suite (J_n) est une suite croissante puisque $f_{n+1}\geqslant f_n$ sur I (voir questions précédentes).
Elle est majorée, par hypothèse ici, elle admet donc une limite J.
On doit montrer que f est intégrable sur I, d'intégrale J.

Soit K un compact inclus dans I. On note de même $J_K = \displaystyle\lim_{n\to+\infty}\underbrace{\int_K f_n}_{:=J_{K,n}}$, qui existe (suite croissante majorée).

D'après la première partie, f est intégrable sur K. Finalement f est localement intégrable sur I.

Et pour tout K, $\displaystyle\int_K f = J_K = \lim J_{K,n}\leqslant \lim J_n = J$, f est intégrable sur I et $\displaystyle\int_I f\leqslant J$.

Mais par ailleurs, pour tout $\epsilon>0$, il existe n, puis K tel que $J\leqslant J_n+\epsilon\leqslant J_{K,n}+2\epsilon\leqslant J_K+2\epsilon$.

Donc $J=\displaystyle\int_I f$.

▷ Corrigé de l'exercice 3.1

Fixons $\epsilon>0$.
Soit $\delta_1 : t\mapsto |t|$ si $t\neq 0$ de $\delta(0)=1$. δ_1 est une jauge sur $[-1,1]$, c'est une jauge de forçage en 0.

Notons $F : x\mapsto \left\{\begin{array}{ll} 2\sqrt{x} & \text{si } x\geqslant 0\\ -2\sqrt{-x} & \text{si } x<0\end{array}\right.$, définie sur $[-1,1]$, dérivable sur $[-1,0[$ et sur $]0,1]$.

$\forall\, t\neq 0$, $\exists\ \delta_2(t)>0$ tq $\forall\, x\in]t-\dfrac{\delta_2(t)}{2}, t+\dfrac{\delta_2(t)}{2}[\cap\left\{\begin{array}{ll}\mathbb{R}_+^* & \text{si } t>0\\ \mathbb{R}_-^* & \text{si } t<0\end{array}\right.$, $\left|\dfrac{F(x)-F(t)}{x-t}-F'(t)\right|\leqslant\epsilon$.

Or $F'(t)=f(t)$ si $t>0$ et $F'(t)=f(t)$ si $t<0$.

donc $\forall\, x\in]t-\dfrac{\delta_2(t)}{2}, t+\dfrac{\delta_2(t)}{2}[\cap\mathbb{R}_+^*$ (si $t>0$) ou $x\in]t-\dfrac{\delta_2(t)}{2}, t+\dfrac{\delta_2(t)}{2}[\cap\mathbb{R}_-^*$ (si $t>0$),

cas $x>t$: $F(x)-F(t)+\epsilon(x-t)\leqslant(F'(t)-\epsilon)\leqslant F(x)-F(t)+\epsilon(x-t)$
cas $x<t$: $F(t)-F(x)+\epsilon(t-x)\leqslant(F'(t)-\epsilon)\leqslant F(t)-F(x)+\epsilon(t-x)$

F est continue en 0. Notons, δ_3 la jauge de continuité de F, associée à ϵ..
Notons $\delta : t\mapsto\min(\delta_1(t),\delta_2(t),\delta_3(t))$. Soit σ_p une subdivision δ-fine.
Supposons que σ_p s'écrive $\big(([x_{i-1},x_i],t_i), i\in\mathbb{N}_p\big)$.
Nécessairement, 0 est un point de marquage de σ_p. Notons $h\in\mathbb{N}_p$ tel que $x_h=0$.
On a $\forall\, i\geqslant h$:

$$(x_i-x_{i-1})f(t_i)=(x_i-t)f(t_i)+(t_i-x_{i-1})f(t_i)\leqslant F(x_i)-F(t_i)+F(t_i)-F(x_{i-1})+\epsilon(x_i-t_i+t_i-x_{i-1})$$

$$\sum_{i=h+1}^{p}(x_i-x_{i-1})f(t_i)\leqslant F(x_p)-F(x_h)+\epsilon(x_p-x_h)$$

Plus largement et de la même façon :

$$F(x_p)-F(x_h)+\epsilon(x_p-x_h)\leqslant\sum_{i=h+1}^{p}(x_i-x_{i-1})f(t_i)\leqslant F(x_p)-F(x_h)+\epsilon(x_p-x_h)$$

$$F(x_{h-1})-F(x_0)+\epsilon(x_{h-1}-x_0)\leqslant\sum_{i=1}^{h-1}(x_i-x_{i-1})f(t_i)\leqslant F(x_{h-1})-F(x_0)+\epsilon(x_{h-1}-x_0)$$

Puis, comme $f(t_h)=f(0)=0$: On trouve :

$$F(x_{h-1})-F(x_h)-\epsilon(x_p-x_0+x_{h-1}-x_h)\leqslant S(f,\sigma_p)-(F(x_p)-F(x_0))\leqslant F(x_{h-1})-F(x_h)+\epsilon(x_p-x_0+x_{h-1}-x_h)$$

Enfin : $x_p=1$, $x_0=-1$, $F(x_p)-F(x_0)=2\sqrt{1}-(-2\sqrt{-(-1)})=4$, $x_p-x_0+x_{h+1}-x_h\leqslant 2$ (car $x_h\geqslant x_{h-1}$).

$$F(x_{h-1})-F(x_h)-2\epsilon\leqslant S(f,\sigma_p)-4\leqslant F(x_{h-1})-F(x_h)+2\epsilon$$

Enfin, comme $\delta(t_h) = \delta(0) < \delta_3(0)$: $-\epsilon < F(x_h) - F(t_h) < \epsilon$ et $-\epsilon < F(x_{h-1}) - F(t_h) < \epsilon$.
Donc

$$|S(f, \sigma_p) - 4| \leqslant 4\epsilon$$

f est intégrable sur $[-1, 1]$, de valeur d'intégrale égale à 4.

▷ Corrigé de l'exercice 3.2

On note $K = [a, x]$ et donc comme f est positif ici, donc $\lim_{x \to b} \int_{[a,x]} f = \sup\{\int_K f, K \subset I\}$.

Application. $f_\alpha : t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est bien positive, continue donc localement intégrable sur $[1, +\infty[$.

Pour tout $x > 1$, $\int_1^x f_\alpha(t)\mathrm{d}t = \left[\frac{-1}{(\alpha-1)t^{\alpha-1}}\right]_1^x = \frac{1}{\alpha-1}\left(1 - \frac{1}{x^{\alpha-1}}\right)$ qui admet une limite ssi $\alpha - 1 > 0$.

▷ Corrigé de l'exercice 3.3

Sens direct :
On suppose que $f \in \mathcal{I}([a, b])$.

Alors d'après Chasles, $\forall\, c \in [a, b[$, $f \in \mathcal{I}([a, c])$.

Puis, $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t - \int_a^c f(t)\mathrm{d}t = \int_c^b f(t)\mathrm{d}t$.

Soit $\epsilon > 0$ et δ jauge tq. pour tout subdivision pointée σ_p δ-fine, $|S(f, \sigma_p) - \int_a^b f(t)\mathrm{d}t| \leqslant \epsilon$.

Soit $C = b - \frac{\delta(b)}{2}$, donc pour tout $c \in [C, b] \cap [b - \frac{\epsilon}{|f(b)|}, b]$, $([c, b], b)$ est $\delta_{|[c,b]}$ fine.
C'est une sous-subdivision de subdivision pointée δ-fine.
Donc d'après le lemme de Henstock :

$$\left|(b-c)f(b) - \int_c^b f(t)\mathrm{d}t\right| = \left|S(f, ([c,b], b)) - \int_c^b f(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \epsilon$$

Donc $\left|\int_c^b f(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \epsilon + (b-c)|f(b)| \leqslant 2\epsilon$. Ainsi $\lim_{c \to b} \int_a^c f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.

Reste à démontrer la réciproque. On exploite deux lemmes :
Quelques idées importantes :

1. Pour faire tendre $x \to b$, on sait qu'on peut se concentrer (CNS) sur toutes les suites $(c_n) \to b$. On peut même se contenter de suites croissantes.
2. On va être amené à couper $[a, b[$ en réunion <u>dénombrable</u> $\uplus_{n\in\mathbb{N}}[c_n, c_{n+1}[$ puis exploiter l'intégrabilité sur $[c_n, c_{n+1}]$ avec une borne $\frac{\epsilon}{2^{n+1}}$
3. Lorsqu'on va additionner (Chasles) les intégrales sur $[c_n, c_{n+1}]$, on aura une majoration par une série convergente et dont la somme est majorée par ϵ
4. On applique des forçages pour passer par les c_n, pour $n \leqslant r$ (bien choisi) afin d'avoir un

Fixons quelques notations. On considère $\epsilon > 0$.
Supposons que $\forall\, c \in [a, b[$, $f \in \mathcal{I}([a, c])$ et $\int_a^c f(t)\mathrm{d}t$ admet une limite pour $c \to b$ noté L.

Soit (c_n) croissante de $c_0 = a$ et convergente vers $b = \lim(c_n)$.

Le passage à la limite de l'intégrale, donne l'existence de C_1 tel que $\forall\, c > C_1$, $|\int_a^c f(t)\mathrm{d}t - L| \leqslant \epsilon$.

Et le passage à la limite de (c_n) vers b, donne l'existence de C_2 tel que $\forall\, c > C_2$, $0 < b - c \leqslant \frac{\epsilon}{|f(b)| + 1}$.

On considère alors $r \in \mathbb{N}$ tel que $c_r \leqslant \max(C_1, C_2)$.

Pour tout $k \geqslant r$: $0 < b - c_k \leqslant \frac{\epsilon}{|f(b)|+1}$ et $\left|\int_a^t f - L\right| \leqslant \epsilon$ Fixons $n \in \mathbb{N}^*$. Concentrons nous sur $[c_{n-1}, c_n]$: f est intégrable sur $[c_{n-1}, c_n]$, il existe δ'_n jauge telle

pour tout $(\sigma_p)_n$ subdivision pointée δ'_n-fine, $|S(f, (\sigma_p)_n) - \int_{c_{n-1}}^{c_n} f| \leqslant \frac{\epsilon}{2^n}$.

Par ailleurs, si l'on prend pour $t \in]c_{n-1}, c_n[$, $\delta_n(t) = \min(\delta'_n, \frac{1}{2}(c_n - t), \frac{1}{2}(t - c_{n-1})$

et $\delta_n(c_{n-1}) = \min(\delta'_n, \frac{1}{2}(c_{n-1} - c_{n-2}, \frac{1}{2}(c_n - c_{n-1})$ (sauf cas $n = 1$) on obtient, en outre :

- $\delta_1(x_0) \leqslant \frac{1}{2}(c_1 - c_0)$.
- $\delta_{k+1}(c_k) \leqslant \min(\delta_k(c_k), \frac{1}{2}(c_k - c_{k-1}), \frac{1}{2}(c_{k+1} - c_k))$.
- $\forall\ t \in]c_{k-1}, c_k[,\ \delta_k(t) \leqslant \min(\frac{1}{2}(t - c_{k-1}), \frac{1}{2}(c_k - t))$.

Fusionnons : On définit ensuite la jauge δ sur $[a, b]$ par $\delta(t) = \delta_n(t)$ si $t \in [c_{n-1}, c_n[$ et $\delta(b) = b - c_r$.

Soit $\sigma_p = \big(([x_{k-1}, x_k], t_k), k \in \mathbb{N}_m\big)$, une subdivision δ-fine.

δ étant de marquage en b (à démontrer), nécessairement $t_m = b$.

Alors $x_{m-1} \geqslant b - \dfrac{\delta(b)}{2} \geqslant b - \delta(b) = c_r$.

Notons $s = \min\{k \in \mathbb{N} \mid c_k \geqslant x_{n-1}\}$. Cet ensemble est non vide puisque r est dedans.

Les points c_k, pour $k \leqslant s - 1$ sont également des points de marquage de δ.

Supposons que c_k soit associé à $[x_{r-1}, x_r]$, alors en remplaçant la subdivision extraite $([x_{r-1}, x_r], c_k)$ par $\big(([x_{r-1}, c_k], c_k), ([c_k, x_r], c_k)\big)$, on garde une subdivision δ-fine.

On réalise cela pour tout les points c_k de σ_p,

on obtient une nouvelle subdivision pointée σ'_p contenant des subdivisions extraites $\big([x_{r-1}, c_k], c_k)$ et $([c_k, x_r], c_k)\big)$, pour tout $k \leqslant s - 1$ (et d'autres).

On note alors $(\tau_p)_k = \sigma'_p \cap [c_{k-1}, c_k]$, pour tout $k \leqslant s - 1$,

puis $(\tau_p)_s = \sigma'_p \cap [c_{s-1}, x_{n-1}]$ et $(\tau_p)_{s+1} = \sigma_p \cap [x_{n-1}, x_n] = ([x_{n-1}, b], b)$.

Chaque subdivision $(\tau_p)_k$ est δ_k-fine, donc $\left| S(f, (\tau_p)_k) - \displaystyle\int_{c_{k-1}}^{c_k} f \right| \leqslant \dfrac{\epsilon}{2^k}$.

$(\tau_p)_s$ est une sous-subdivision δ_s-fine, donc $\left| S(f, (\tau_p)_s) - \displaystyle\int_{c_{s-1}}^{x_{n-1}} f \right| \leqslant \dfrac{\epsilon}{2^s}$ d'après le lemme de Henstock.

Et $|S(f, (\tau_p)_{s+1})| = (b - x_{n-1})|f(b)| \leqslant \epsilon$ par construction de r.

Pour finir :

$$
\begin{aligned}
|S(f, \sigma_p) - L| &= \left| \sum_{k=1}^{s-1} \left(S(f, (\tau_p)_s) - \int_{c_{k-1}}^{c_k} f \right) + S(f, (\tau_p)_s) - \int_{c_s}^{x_{n-1}} f + S(f, \tau_p)_{s+1} - L + \int_a^{x_{n-1}} f \right| \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{s-1} \left| S(f, (\tau_p)_s) - \int_{c_{k-1}}^{c_k} f \right| + \left| S(f, (\tau_p)_s) - \int_{c_s}^{x_{n-1}} f \right| + |S(f, \tau_p)_{s+1}| + \left| \int_a^{x_{n-1}} f - L \right| \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{s-1} \frac{\epsilon}{2^k} + \frac{\epsilon}{2^s} + \epsilon + \epsilon = 3\epsilon
\end{aligned}
$$

▷ Corrigé de l'exercice 3.4

On revient facilement au cas h_n positives, en considérant $h_n = f_n - f_0$.

▷ Corrigé de l'exercice 3.5

On exploite le théorème de convergence monotone à la suite croissante positive $h_n(x) = \inf\limits_{k \geqslant n} (f_k(x) - g(x))$.

Pour le théorème de convergence dominée, on encadre (f_n) (qui admet une limite) entre $\sup f_n$ et $\inf f_n$...