Devoir surveillé n°8
CORRECTION

Formules de quadrature pour le calcul approché d'intégrale

I. Généralités sur les formules de quadrature

Dans cette sous-partie, on se place dans le cas $I = [0,1]$ et $\forall x \in I$, $w(x) = 1$. On cherche donc à approcher $\int_0^1 f(x)dx$ lorsque f est une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

1. Déterminer l'ordre de la formule de quadrature $I_0(f) = f(0)$.

Pour $f : t \mapsto a$, polynôme de degré 0 (a constante de $\mathbb{R}$) :

$$\int_0^1 a\mathrm{d}t = [at]_0^1 = a = f(0)$$

Donc l'ordre est supérieur ou égal à 0. Pour $f : t \mapsto t$, polynôme de degré 1 :

$$\int_0^1 t\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}t\right]_0^1 = \frac{1}{2} \neq f(0)$$

Donc l'ordre est strictement inférieur à 1.

$$\boxed{\text{L'ordre de la formule de quadrature } I_0(f) = f(0) \text{ est } m = 0.}$$

---

2. Faire de même avec la formule de quadrature $I_0(f) = f(1/2)$.

Pour $f : t \mapsto a + bt$, polynôme de degré 1 (a, b constante de $\mathbb{R}$) :

$$\int_0^1 a + bt\mathrm{d}t = \left[at + \frac{b}{2}t^2\right]_0^1 = a + \frac{b}{2} = f\left(\frac{1}{2}\right)$$

Donc l'ordre est supérieur ou égal à 1. Pour $f : t \mapsto t^2$, polynôme de degré 2 :

$$\int_0^1 t^2\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^1 = \frac{1}{3} \neq \frac{1}{4} = f\left(\frac{1}{2}\right)$$

Donc l'ordre est strictement inférieur à 2.

$$\boxed{\text{L'ordre de la formule de quadrature } I_0(f) = f(1/2) \text{ est } m = 1.}$$

---

3. Déterminer les coefficients $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ pour que la formule $I_2(f) = \lambda_0 f(0) + \lambda_1 f(1/2) + \lambda_2 f(1)$ soit exacte sur $\mathbb{R}_2[X]$. Cette formule de quadrature est-elle d'ordre 2 ?

Soit $f : t \mapsto a + bt + ct^2$, une fonction polynomiale quelconque de degré 2.

$$I_2(f) = \int_0^1 (a + bt + ct^2)\mathrm{d}t = a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{3}c$$

$$\lambda_0 f(0)+\lambda_1 f(1/2)+\lambda_2 f(1) = \lambda_0 a+\lambda_1(a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{4}c)+\lambda_2(a+b+c) = (\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2)a+(\frac{1}{2}\lambda_1+\lambda_2)b+(\frac{1}{4}\lambda_1+\lambda_2)c$$

On a l'égalité $I_2(f) = \lambda_0 f(0) + \lambda_1 f(1/2) + \lambda_2 f(1)$, pour toute fonction f polynomiale si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} \lambda_0 & +\lambda_1 & +\lambda_2 & = & 1 \\ & \frac{1}{2}\lambda_1 & +\lambda_2 & = & \frac{1}{2} \\ & \frac{1}{4}\lambda_1 & +\lambda_2 & = & \frac{1}{3} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrrcl} \lambda_0 & +\lambda_1 & +\lambda_2 & = & 1 \\ & \frac{1}{2}\lambda_1 & +\lambda_2 & = & \frac{1}{2} \\ & \frac{1}{4}\lambda_1 & & = & \frac{1}{6} \end{array}\right. \left| \begin{array}{l} \\ \\ L_2 - L_3 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} \lambda_0 & = & \frac{1}{6} \\ \lambda_1 & = & \frac{2}{3} \\ \lambda_2 & = & \frac{1}{6} \end{array}\right.$$

Elle est d'ordre au moins d'ordre 2.
Soit $n \in \mathbb{N}$, voyons si la formule est vraie pour le monôme X^n. Notons $f_n : t \mapsto t^n$

$$I_2(t^n) = \frac{1}{n+1}$$

$$S_2(f_n) := \frac{1}{6}f_n(0) + \frac{2}{3}f_n(\frac{1}{2}) + \frac{1}{6}f_n(1) = \frac{1}{6} + \frac{2}{32^n}$$

Pour $n = 3$, on trouve $I_2(f_3) = \dfrac{1}{4}$ et $S_2(f_3) = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$.
Elle est d'ordre au moins d'ordre 3, par linéarité.
Pour $n = 4$, on trouve $I_2(f_4) = \dfrac{1}{5}$ et $S_2(f_4) = \frac{1}{6} + \frac{1}{24} = \frac{5}{24}$.
Elle est d'ordre strictement inférieur à 4.

$$\boxed{\text{L'ordre de la formule de quadrature } I_2(f) = \tfrac{1}{6}(f(0) + f(1)) + \tfrac{2}{3}f(1/2) \text{ est } m = 3.}$$

On revient au cas général. Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère $n+1$ points distincts de I, notés $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$, et une fonction continue f de I dans $\mathbb{R}$.

4. Montrer que l'application $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \mapsto & (P(x_0), P(x_1), \dots, P(x_n)) \end{array} \right.$ est un isomorphisme.

Nous allons montrer que φ est linéaire, injectif (en regardant le noyau) puis bijectif (avec les dimensions).
Soient $P_1, P_2 \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) &= \big((\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)(x_0), (\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)(x_1), \dots, (\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)(x_n)\big) \\ &= \big(\lambda_1 P_1(x_0) + \lambda_2 P_2(x_0), \lambda_1 P_1(x_1) + \lambda_2 P_2(x_1), \dots, \lambda_1 P_1(x_n) + \lambda_2 P_2(x_n)\big) \\ &= \lambda_1(P_1(x_0), P_1(x_1), \dots, P_1(x_n)) + \lambda_2(P_2(x_0), P_2(x_1), \dots, P_2(x_n)) \end{aligned}$$

Donc φ est une application linéaire.
Soit $P \in \text{Ker } \varphi$.
Alors $P(x_0) = 0 = P(x_1) = \cdots = P(x_n)$.
Donc P est un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ qui admet au moins $n+1$ racines.
Ainsi $P = 0$. Donc Ker $\varphi \subset \{0\}$
L'inclusion réciproque est (toujours) vraie (pour des applications linéaires) : φ est injective.
$\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n + 1 = \dim(\mathbb{R}^{n+1})$.
Ainsi φ est une application linéaire entre deux espaces de même dimension.

$$\boxed{\text{Donc } \varphi \text{ est un isomorphisme de } \mathbb{R}_n[X] \text{ sur } \mathbb{R}^{n+1}.}$$

---

5. Montrer que, pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, il existe un unique polynôme $L_i \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que

$$\forall j \in [\![0, n]\!], \quad L_i(x_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq i, \\ 1 & \text{si } j = i. \end{cases}$$

Notons E_i, le vecteur de $\mathbb{R}^n$, dont tous les coefficients sont nuls, excepté celui en position i qui vaut 1.
Alors, on l'équivalence :

$$\forall j \in [\![0, n]\!], \quad L_i(x_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq i, \\ 1 & \text{si } j = i. \end{cases} \iff \varphi(L_i) = E_i$$

Or φ est bijective. Donc E_i admet un et un seul antécédent par φ :

$$\boxed{\text{pour tout } i \in [\![0, n]\!], \text{ il existe un unique polynôme } L_i \in \mathbb{R}_n[X] \text{ tel que } \forall j \in [\![0, n]\!], \quad L_i(x_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq i, \\ 1 & \text{si } j = i. \end{cases}}$$

---

6. Montrer que $(L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
Cette base est appelée *base de Lagrange associée aux points* $(x_0, \dots, x_n)$.

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Notons $T = P - \sum_{i=0}^{n} P(x_i)L_i$.

Comme $\mathbb{R}_n[X]$ est un espace vectoriel : $T \in \mathbb{R}_n[X]$.

Puis, pour tout $k \in \{0, 1, \dots n\}$,

$$T(x_k) = P(x_k) - \sum_{i=0}^{n} P(x_i) \underbrace{L_i(x_k)}_{=\delta_{i,k}} = P(x_k) - P(x_k) = 0$$

Donc T admet $n+1$ racines distinctes, il est de degré $\leqslant n$, donc $T = 0$.

Ainsi $P = \sum_{i=0}^{n} P(x_i)L_i$.

La famille $(L_0, L_1, \dots L_n)$ est génératrice de $\mathbb{R}_n[X]$, constituée de $n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$ vecteurs.

$$\boxed{(L_0, \dots, L_n) \text{ est une base de } \mathbb{R}_n[X].}$$

---

7. On suppose que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $x \mapsto x^k w(x)$ est intégrable sur I. Montrer que la formule de quadrature $I_n(f) = \sum\limits_{j=0}^{n} \lambda_j f(x_j)$ est exacte sur $\mathbb{R}_n[X]$ si, et seulement si,

$$\forall j \in [\![0, n]\!], \quad \lambda_j = \int_I L_j(x)w(x)dx.$$

Si la formule est exacte, elle l'est pour $f_j : t \mapsto L_j(t)$ (de degré $\leqslant n$).

Dans ce cas, pour tout $j \in [\![0, n]\!]$:

$$I_n(f_j) = \int_I f_j(t)w(t)\mathrm{d}t = \int_I L_j(t)w(t)\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_j(x_k) = \lambda_j$$

Réciproquement, supposons que pour tout $j \in [\![0, n]\!]$: $I_n(f_j) = \displaystyle\int_I f_j(t)w(t)\mathrm{d}t = \lambda_j$,

Alors, on a pour tout polynôme P : $P = \sum_{k=0}^{n} P(x_k)L_k$,

et donc par linéarité (en égalisant polynôme et fonctions polynomiales) :

$$I_n(P) = \sum_{k=0} nP(x_k) \int_I L_k(t)w(t)\mathrm{d}t = \sum_{k=0} nP(x_k)\lambda_k$$

$$\boxed{\text{Donc } I_n(f) = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j f(x_j) \text{ est exacte sur } \mathbb{R}_n[X] \text{ ssi } \forall j \in [\![0, n]\!],\ \lambda_j = \textstyle\int_I L_j(x)w(x)dx.}$$

---

8. On se place dans le cas $I = [0, 1]$ et $\forall x \in I$, $w(x) = 1$. Déterminer la base de Lagrange associée aux points $(0, 1/2, 1)$ et retrouver ainsi les coefficients de la formule de quadrature $I_2(f)$ de la question 3.

On a donc $L_0 = \dfrac{(X - \frac{1}{2})(X - 1)}{(-\frac{1}{2}) \times (-1)} = (2X - 1)(X - 1)$,

$L_{\frac{1}{2}} = \dfrac{X(X-1)}{\frac{1}{2} \times -\frac{1}{2}} = -4X(X-1)$ et $L_1 = \dfrac{X(X - \frac{1}{2})}{1 \times \frac{1}{2}} = X(2X - 1)$.

Puis $\lambda_0 = \displaystyle\int_0^1 L_0(t)\mathrm{d}t = \left[\frac{2}{3}t^3 - \frac{3}{2}t^2 + t\right]_0^1 = \frac{1}{6}$, $\quad \lambda_{\frac{1}{2}} = \displaystyle\int_0^1 L_{\frac{1}{2}}(t)\mathrm{d}t = \left[-\frac{4}{3}t^3 + \frac{4}{2}t^2\right]_0^1 = \frac{2}{3}$

et $\lambda_1 = \displaystyle\int_0^1 L_1(t)\mathrm{d}t = \left[\frac{2}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2\right]_0^1 = \frac{1}{6}$

$$\boxed{\text{On retrouve les coefficients de la question 3. : } \lambda_0 = \lambda_1 = \tfrac{1}{6} \text{ et } \lambda_{\frac{1}{2}} = \tfrac{2}{3}.}$$

$I=[a,b]$, avec $a<b$.
Pour tout entier naturel m, on considère la fonction $\varphi_m : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2, \quad \varphi_m(x,t) = \begin{cases} (x-t)^m & \text{si } x \geq t, \\ 0 & \text{si } x < t. \end{cases}$$

On observe que φ_m est continue si $m \geq 1$ et discontinue si $m=0$.
On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^{m+1}$ sur I.

9. A l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral, montrer que $e(f)=e(R_m)$, où R_m est définie par
$$\forall x \in [a,b], \quad R_m(x) = \frac{1}{m!}\int_a^b \varphi_m(x,t) f^{(m+1)}(t)dt.$$

On applique la formule de Taylor avec reste intégral à f, à l'ordre m, puisque f est de classe $\mathcal{C}^{m+1}$, entre a et x.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^m}{m!} f^{(m+1)}(t)\mathrm{d}t$$

En exploitant $\varphi_m(x,t)$ qui est nulle lorsque $t>x$, on a
$$\int_a^x \frac{(x-t)^m}{m!} f^{(m+1)}(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{m!}\int_a^b \varphi_m(x,t) f^{(m+1)}(t)\mathrm{d}t = R_m(x).$$

Ainsi, en notant $p_k : x \mapsto (x-a)^k$, application polynomiale de degré k : $f = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} p_k + R_m$.

L'application e est linéaire, comme cela est rappelé en début d'énoncé :

$$e(f) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} e(p_k) + e(R_m)$$

Enfin, on a supposé que l'ordre de la formule était m ici, donc $e(p_k)=0$, car p_k est polynomiale de degré $k \leqslant m$.

$$\boxed{e(f)=e(R_m), \text{ où } R_m \text{ est définie par } \forall x \in [a,b], \quad R_m(x) = \frac{1}{m!}\int_a^b \varphi_m(x,t) f^{(m+1)}(t)dt.}$$

---

10. En déduire que, si $m \geq 1$,
$$e(f) = \frac{1}{m!}\int_a^b K_m(t) f^{(m+1)}(t)dt,$$
où la fonction $K_m : [a,b] \to \mathbb{R}$ est définie par
$$\forall t \in [a,b], \quad K_m(t) = e(x \mapsto \varphi_m(x,t)) = \int_a^b \varphi_m(x,t) w(x)dx - \sum_{j=0}^{n} \lambda_j \varphi_m(x_j,t).$$
On admet que cette expression de $e(f)$ reste valable pour $m=0$.

On suppose que $m \geqslant 1$. e est linéaire, donc

$$\begin{aligned} e(f) &= e(R_m) = \int_a^b R_m(x)\mathrm{d}x - \sum_{j=0}^{n} \lambda_j R_m(x_j) \\ &= \frac{1}{m!}\int_a^b \left(\int_a^b \varphi_m(x,t) f^{(m+1)}(t)\mathrm{d}t\right) w(x)\mathrm{d}x + \frac{1}{m!}\sum_{j=0}^{n} \lambda_j \int_a^b \varphi_m(x_j,t) f^{(m+1)}(t)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

$$\boxed{e(f) = \frac{1}{m!}\int_a^b \left(\underbrace{\int_a^b \varphi_m(x,t) w(x)\mathrm{d}x - \sum_{j=0}^{m} \lambda_j \varphi_m(x_j,t)}_{=K_m(t)} \right) f^{(m+1)}(t)\mathrm{d}t}$$

En exploitant : si $g : [a,b]^2 \to \mathbb{R}$, est continue on a $\int_a^b \left(\int_a^b g(x,t)dt\right) dx = \int_a^b \left(\int_a^b g(x,t)dx\right) dt$.
Or ici φ_m est bien continue ($m \geqslant 1$) et donc $(x,t) \mapsto \varphi_m(x,t) f^{(m+1)}(t)$ est bien continue par produit.

Dans cette sous-partie, on suppose que I est un segment et $\forall x \in I$, $w(x) = 1$.
On se place d'abord dans le cas $I = [0, 1]$ et on considère la formule de quadrature

$$I_1(g) = \frac{g(0) + g(1)}{2},$$

qui est d'ordre $m = 1$ (on ne demande pas de le montrer).

11. Calculer le noyau de Peano associé $t \mapsto K_1(t)$ et montrer que, pour tout fonction g de classe $\mathcal{C}^2$ de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, on a la majoration suivante de l'erreur de quadrature associée :

$$|e(g)| \leq \frac{1}{12} \sup_{x \in [0,1]} |g''(x)|.$$

D'après la question précédente :
$(a \leftarrow 0,\ b \leftarrow 1,\ w(t) \leftarrow 1,\ m \leftarrow 1,\ \lambda_0 \leftarrow \frac{1}{2},\ \lambda_1 \leftarrow \frac{1}{2},\ x_0 \leftarrow 0,\ x_1 \leftarrow 1$
et $\varphi_1(x,t) \leftarrow (x-t)^1$ si $x \geqslant t$ et $\varphi_1(x,t) \leftarrow 0$ si $x < t$.)
Pour tout $t \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned} K_1(t) &= \int_0^1 \varphi_1(t) 1 \mathrm{d}x - \frac{1}{2}\varphi_1(0,t) - \frac{1}{2}\varphi_1(1,t) = \int_0^1 0 \mathrm{d}x + \int_t^1 (x-t)^1 \mathrm{d}x - 0 - \frac{1}{2}(1-t) \\ &= \left[\tfrac{1}{2}(x-t)^2\right]_t^1 - \frac{1}{2}(1-t) = \frac{1}{2}(1-t)(1-t-1) = \frac{1}{2}t(t-1) \end{aligned}$$

$$\boxed{K_1 : t \mapsto \frac{t(t-1)}{2}}$$

Si g est de classe $\mathcal{C}^2$, on peut alors appliquer la formule précédente :

$$|e(g)| = \left| \frac{1}{1!} \int_0^1 \frac{t(t-1)}{2} \mathrm{d}t g^{(2)}(t) \mathrm{d}t \right| \leqslant \int_0^1 \frac{t(1-t)}{2} |g''(t)| \mathrm{d}t$$

En majorant $g''(t)$ par $M := \sup_{x \in [0,1]} |g''(x)|$, on trouve

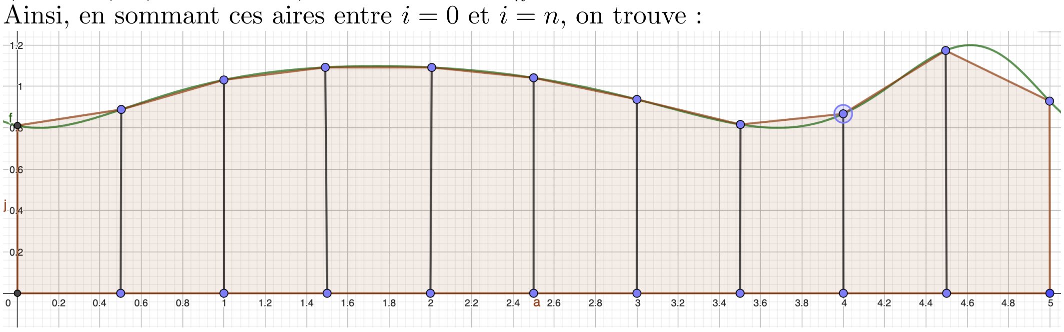
$$|e(g)| \leqslant \int_0^1 \frac{t(1-t)}{2} \mathrm{d}t \times M = M \times \left[\frac{\frac{1}{2}t - \frac{1}{3}t^3}{2} \right]_0^1 = \frac{M}{12}$$

$$\boxed{|e(g)| \leq \frac{1}{12} \sup_{x \in [0,1]} |g''(x)|}$$

---

12. Représenter graphiquement $T_n(f)$.

Le calcul $\frac{b-a}{n}\frac{f(a_i)+f(a_{i+1})}{2}$, donne l'aire du trapèze (à angle droit) dont les sommets sont $(a_i, 0)$, $(a_i, f(a_i))$, $(a_{i+1}, f(a_{i+1}))$ et $(a_{i+1}, 0)$ car $\frac{b-a}{n} = a_{i+1} - a_i$.
Ainsi, en sommant ces aires entre $i = 0$ et $i = n$, on trouve :



(ici, on a pris $a = 0$ et $b = 5$ et $n = 10$)

---

13. On suppose que f est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que

$$e_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} e(g_i),$$

où e est l'erreur associée à la formule de quadrature I_1 étudiée à la question 11 et les $g_i : [0,1] \to \mathbb{R}$ sont des fonctions à préciser.

$$e_n(f) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - T_n(f) = \sum_{i=0}^{n-1}\left(\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)\mathrm{d}t - \frac{b-a}{n}\frac{f(a_i)+f(a_{i+1})}{2}\right)$$

Puis, on fait un changement de variable dans l'intégrale $t = a_i + u(a_{i+1} - a_i)$.

$$\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 f(a_i + u(a_{i+1} - a_i))(a_{i+1} - a_i)\mathrm{d}u$$

Or $a_{i+1} - a_i = \dfrac{b-a}{n}$ et en notant $g_i : [0,1] \to \mathbb{R}$, $u \mapsto f(a_i + u(a_{i+1} - a_i))$. Donc

$$\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)\mathrm{d}t = \frac{b-a}{n}\int_0^1 g(u)\mathrm{d}u$$

Et de même : $g_i(0) = f(a_i)$ et $g_i(1) = f(a_{i-1})$, donc

$$e_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\int_0^1 g_i(t)\mathrm{d}t - \frac{g_i(0)+g_i(1)}{2}\right)$$

$$\boxed{e_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} e(g_i) \text{ avec } g_i : [0,1] \to \mathbb{R}, u \mapsto f\left(a_i + \frac{b-a}{n}u\right)}$$

---

14. En déduire la majoration d'erreur

$$|e_n(f)| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2}\sup_{x\in[a,b]}|f''(x)|.$$

On applique l'inégalité triangulaire :

$$|e_n(f)| \leqslant \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1}|e(g_i)|$$

Puis d'après la question 11, $|e(g_i)| \leqslant \dfrac{1}{12}\sup_{u\in[0,1]}|g_i''(u)|$.

Mais d'après le changement de variable $g_i = f \circ \phi_i$, où $\phi_i : u \mapsto a_i + \frac{b-a}{n}u$.

Donc $g_i' = \phi_i' \times f' \circ \phi_i = \frac{b-a}{n} \times f' \circ \phi_i$.

Puis $g_i'' = \frac{b-a}{n}\phi_i' \times f'' \circ \phi_i = \dfrac{(b-a)^2}{n^2} \times f'' \circ \phi_i$.

Donc

$$\sup_{u\in[0,1]}|g_i''(u)| = \frac{(b-a)^2}{n^2}\sup_{t\in[a_i,a_{i+1}]}|f''(t)| \leqslant \frac{(b-a)^2}{n^2}\sup_{t\in[a,b]|} f''(t)|$$

par inclusion de l'ensemble $[a_i, a_{i+1}]$ dans $[a,b]$.

$$\boxed{e_n(f) \leqslant \frac{(b-a)^3}{12n^3}\sum_{i=0}^{n-1}\sup_{t\in[a,b]}|f''(t)| = \frac{(b-a)^3}{12n^2}\sup_{t\in[a,b]}|f''(t)|}$$

II. Polynômes orthogonaux et applications

Dans la suite, on note E l'ensemble des fonctions f continues de I dans $\mathbb{R}$ telles que f^2w est intégrable sur I.

II.A - Etude d'un produit scalaire

15. Montrer que, pour toutes fonctions f et g de E, le produit fgw est intégrable sur I.
On pourra utiliser l'inégalité $\forall(a,b) \in \mathbb{R}^2,\ |ab| \leq \frac{1}{2}(a^2+b^2)$, après l'avoir justifiée.

Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$,

$0 \leqslant (a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$, donc $ab \leqslant \dfrac{1}{2}(a^2+b^2)$.

$0 \leqslant (a+b)^2 = a^2+b^2+2ab$ donc $-ab \leqslant \frac{1}{2}(a^2+b^2)$.

$$\boxed{\text{Par conséquent } |ab| \leqslant \frac{1}{2}(a^2+b^2)}$$

Pour tout $x \in I$, avec $a \leftarrow f(x)\sqrt{w(x)}$ et $b \leftarrow g(x)\sqrt{w(x)}$ (on rappelle que $w(x) \geqslant 0$),

$$|f(x)g(x)w(x)| \leqslant \frac{1}{2}f^2(x)w(x) + \frac{1}{2}g^2(x)w(x)$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } fgw \text{ est intégrable sur } I.}$$

---

16. Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

On va montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ (espace des fonctions continues).
L'application $[0] : I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 0$ est bien un élément de E.
Soient $f, g \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,
Donc $\lambda f + \mu g$ est continue sur I.
$(\lambda f + \mu g)^2 w = \lambda^2 f^2 w + \mu^2 g^2 w + 2\lambda\mu fgw$.
Or $f^2 w$, $g^2 w$ et fgw sont intégrables sur I. Le produit par un nombre ne change pas.
Donc $(\lambda f + \mu g)^2 w$ est intégrable sur I.
Ainsi $\lambda f + \mu g \in E$.

$$\boxed{E \text{ est un (sous-)espace vectoriel.}}$$

Pour toutes fonctions f et g de E, on pose $\langle f, g\rangle = \int_I f(x)g(x)w(x)\mathrm{d}x$.

17. Montrer qu'on définit ainsi un produit scalaire sur E.

- Pour toutes fonctions f, $g \in E$ $\langle f, g\rangle \in \mathbb{R}$.
- Pour toutes fonctions f, $g \in E$ $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_I f(x)g(x)w(x) = \int_I g(x)f(x)w(x) = \langle g, f\rangle$.

  Donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bien un produit scalaire.
- Par linéarité du produit et de l'intégration, pour tout $f_1, f_2, g \in E$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \langle \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_1, g\rangle &= \int_I (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(x)g(x)w(x)\mathrm{d}x = \int_I [\lambda_1 f_1(x)g(x)w(x) + \lambda_2 f_2(x)g(x)w(x)]\mathrm{d}x \\ &= \lambda_1 \int_I f_1(x)g(x)w(x)\mathrm{d}x + \lambda_2 \int_I f_2(x)g(x)w(x)\mathrm{d}x = \lambda_1 \langle f_1, g\rangle + \lambda_2 \langle f_2, f\rangle \end{aligned}$$

  Donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est linéaire à gauche, par symétrie il est également linéaire à droite.
  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est donc bilinéaire.
- Pour toute application $f \in E$, $\forall\, x \in I$, $f^2(x)w(x) \geqslant 0$, donc $\langle f, f\rangle = \displaystyle\int_I f^2(x)w(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$.
- Soit $f \in E$ telle que $\langle f, f\rangle = \displaystyle\int_I f^2(x)w(x)\mathrm{d}x = 0$,

  alors comme $x \mapsto f^2(x)w(x)$ est continue et positive, d'intégrale nulle, donc $\forall\, x \in I$, $f^2(x)w(x) = 0$.
  Or $w(x) \neq 0$, donc pour tout $x \in I$: $f^2(x) = 0$ i.e. $f(x) = 0$, donc $f = O_{|I}$.

$$\boxed{\text{Donc } \langle \cdot, \cdot \rangle \text{ est un produit scalaire sur } E.}$$

On admet qu'il existe une unique suite de polynômes $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

(a) pour tout $n \in \mathbb{N}$, p_n est unitaire
(b) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\deg(p_n) = n$
(c) la famille $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, autrement dit $\langle p_i, p_j\rangle = 0$, pour $i \neq j \in \mathbb{N}$.

On dit que les (p_n) sont les *polynômes orthogonaux associés au poids w*.

18. Donner un algorithme qui permet de déterminer la suite (p_k) (pour w donné) (sans démontrer qu'il marche bien).

Nécessairement, $p_0 = 1$.
Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose que $(p_0, \ldots p_k)$ sont bien définis.

On considère $P_{k+1} = X^{k+1} + \sum_{i=0}^{k} a_i p_i$, il est unitaire et de degré n.

Puis : $P_{k+1} \perp p_j \iff \langle P_{k+1}, p_j \rangle \iff \left\langle X^{k+1}, p_j \right\rangle + \sum_{i=0}^{k} a_i \langle p_i, p_j \rangle = 0$, par linéarité.

Or $(p_0, \dots p_k)$ est une famille orthogonale (mais pas normée !), donc $a_j = -\left\langle X^{k+1}, p_j \right\rangle$.

$$\boxed{p_{k+1} = X^{k+1} - \sum_{i=0}^{k} \left\langle X^{k+1}, p_i \right\rangle p_i}$$

---

19. Montrer que $p_{n+1} \in (\mathbb{R}_n[X])^\perp$.

La famille $(p_0, \dots p_n)$ est une famille de polynôme de degrés échelonnés, elle est donc libre.
C'est une famille de $\mathbb{R}_n[X]$, composée de $(n+1) = \dim(\mathbb{R}_n[X])$ vecteurs, c'en est donc une base.
p_{n+1} est orthogonale à cette famille génératrice de $\mathbb{R}_n[X]$, on a donc

$$\boxed{p_{n+1} \in (\mathbb{R}_n[X])^\perp}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $x_1, \dots, x_k$ les racines distinctes de p_n qui sont dans $\mathring{I}$ et $m_1, \dots, m_k$ leurs multiplicités respectives. On considère le polynôme

$$q(X) = \prod_{i=1}^{k} (X - x_i)^{\varepsilon_i}, \quad \text{avec } \varepsilon_i = \begin{cases} 1 & \text{si } m_i \text{ est impair,} \\ 0 & \text{si } m_i \text{ est pair.} \end{cases}$$

20. En étudiant $\langle p_n, q \rangle$, montrer que p_n possède n racines distinctes dans $\mathring{I}$.

Notons que $\deg q \leqslant n$. Comme, pour tout $i \in \mathbb{N}_k$, $m_i + \epsilon_i$ est une nombre pair :

$$\langle p_n, q \rangle = \int_I \underbrace{\prod_{i=1}^{k} (t - x_k)^{m_i + \epsilon_i}}_{:=T(x) \geqslant 0} \underbrace{w(x)}_{\geqslant 0} \, \mathrm{d}x \geqslant 0$$

Or ce polynôme T est non nul, donc cette intégrale est strictement positive.
Nécessairement $q \notin \mathbb{R}_{n-1}[X]$, et donc $\deg q = n$.

et par conséquent : $\forall\, i \in \mathbb{N}_k$, $n = \sum_{i=1}^{k} \epsilon_i \leqslant k$. Donc $k = n$ et $\epsilon_i = 1$.

$$\boxed{p_n \text{ possède } n \text{ racines distinctes dans } \mathring{I}.}$$

Considérons une formule de quadrature $I_n(f) = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j f(x_j)$ où $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ et $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ sont $n+1$ points distincts dans I.
Ainsi, la formule $I_n(f)$ est d'ordre $m \geq n$. Nous allons montrer que dans ces conditions, il existe un unique choix des points $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ qui permet d'obtenir l'ordre m le plus elevé possible.

21. En raisonnant avec le polynôme $\prod_{i=0}^{n} (X - x_i)$, montrer que $m \leq 2n+1$.

Considérons $S = \prod_{i=0}^{n} (X - x_i)^2$, de degré $2(n+1) = 2n+2$.

Alors $I_n(S) \geqslant 0$, mais elle ne peut être nul car $S \neq 0$.

Donc $I_n(S) > 0$, alors que $\sum_{j=0}^{n} \lambda_j S(x_j) = 0$.

$$\boxed{\text{Nécessairement : } m \leqslant 2n+1.}$$

---

22. Montrer que $m = 2n+1$ si et seulement si les x_i sont les racines de p_{n+1}.

Chaque L_i est de degré $n+1-1 = n$. La formule est vraie pour L_i^2 ($\deg L_i^2 \leqslant 2n$).
Or $I_n(L_i^2) \geqslant 0$ et non nul, donc $\lambda_i > 0$.
Mais elle est également vraie pour $H_i = p_{n+1}L_i$ de degré $n+1+n = 2n+1$.
Or $I_n(H_i) = \int_I p_{n+1}(t)L_i(t)\mathrm{d}t = \langle p_{n+1}, L_i\rangle = 0$ car $p_{n+1} \perp L_i$,
et nécessairement : $0 = I_n(H_i) = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j H_i(x_j) = \lambda_i L_i(x_i)p_{n+1}(x_i)$. Donc $p_{n+1}(x_i) = 0$.
Ainsi si $m = 2n+1$, alors nécessairement les x_i sont les racines de p_{n+1}.
Supposons maintenant que tel est le cas. Soit P, un polynôme de degré inférieur à $2n+1$.
Faisons la division euclidienne de P par p_{n+1} : $P = Qp_{n+1} + R$, avec $\deg R < \deg p_{n+1} = n+1$, et comme $\deg P \leqslant 2n+1$, alors $\deg Q \leqslant n$, donc $\langle Q, p_{n+1}\rangle = 0$.

$$\int_I P(t)\mathrm{d}t = \int_I Q(t)p_{n+1}(t)\mathrm{d}t + \int_I R(t)\mathrm{d}t = \langle Q, p_{n+1}\rangle + I_n(R) = I_n(R)$$

Or $\deg R \leqslant n$, donc $I_n(R) = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j R(x_j)$.
Et par ailleurs, pour tout $j \in [\![0, n]\!]$, $P(x_j) = Q(x_j)p_{n+1}(x_j) + R(x_j) = R(x_j)$, car x_j est racine de p_{n+1}.
Donc $\sum_{j=0}^{n} \lambda_j R(x_j) = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j P(x_j)$.
Donc $I_n(P) = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j P(x_j)$, la formule est exacte pour tout polynôme de degré inférieur à $2n+1$.
Avec la question précédente, on trouve donc : si x_i sont les racines de p_{n+1}, alors $m = 2n+1$.

III. Accélération de la méthode des trapèzes

Pour les questions 23 à 27, on considère $f : x \mapsto \dfrac{x}{e^x - 1}$.

23. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Notons d'abord que f est définie et est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$, comme division de fonctions dérivables.
$x \mapsto e^x - 1$ admet un $DL_2(0)$: $e^x - 1 \underset{x\to 0}{=} x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$ On a donc

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{x}{x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}x + o(x)} = (1 + \frac{1}{2}x + o(x))^{-1} = 1 - \frac{1}{2}x + o(x)$$

Donc f admet un $DL_1(0)$,

$$\boxed{\text{Ainsi, } f \text{ est continue et même dérivable en 0, puis donc sur } \mathbb{R}.}$$

---

24. Calculer le $DL_4(0)$ de f.

On reprend la même stratégie qu'en question 23, mais on commence par un ordre 5 de exp.
$e^x - 1 \underset{x\to 0}{=} x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^5)$

$$\begin{aligned}
f(x) &\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{24}x^3 + \frac{1}{120}x^4 + o(x^4))} = \left(1 + \underbrace{\frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{24}x^3 + \frac{1}{120}x^4 + o(x^4)}_{=u}\right)^{-1} \\
&\underset{x\to 0}{=} 1 - u + u^2 - u^3 + u^4 + o(u^4) \\
&\underset{x\to 0}{=} 1 - \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{24}x^3 + \frac{1}{120}x^4\right) + \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{24}x^3\right)^2 - \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x^2\right)^3 + \left(\frac{1}{2}x\right)^4 + o(x^4) \\
&\underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{1}{2}x + \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{4}\right)x^2 + \left(-\frac{1}{24} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right)x^3 + \left(-\frac{1}{120} + \frac{1}{24} + \frac{1}{36} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16}\right)x^4 + o(x^4)
\end{aligned}$$

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2 + 0x^3 - \frac{1}{120}x^4 + o(x^4)}$$

On suppose que $f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!}x^k + o(x^n)$.

On admet que si $g(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} b_k x^k + o(x^n)$ *et* $h(x) = \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} c_k x^k + o(x^n)$,

alors $g \times h$ *admet un* $DL_n(0)$: $(g\times h)(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{i=0}^{k} b_i c_{k-i}\right) x^k + o(x^n)$.

25. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\sum_{i=0}^{k} \binom{k+1}{i} a_i = 0$.

On a pour tout x, au voisinage de 0 :

$$x = (e^x - 1) \times f(x) \underset{x\to 0}{=} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)\right) \times \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!}x^k + o(x^n)\right) = \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{i=0}^{k} b_i \frac{a_{k-i}}{(k-i)!}\right) x^k + o(x^n)$$

Avec $b_0 = 0$ et $b_i = \frac{1}{i!}$.
On peut alors identifier les coefficients (unicité des DL),
pour $k = 1$, $1 = b_0 a_1 + b_1 a_0 = 0a_1 + 1a_0 = a_0$.
pour $k \geqslant 2$, $0 = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i!}\frac{a_{k-i}}{(k-i)!} = \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k-1} \frac{k!}{(k-j)!j!} a_j$.
en posant le changement de variable : $j = k - i$.
On a alors pour $k \geqslant 2$: $\sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} a_j = 0$. Donc avec $h = k - 1$:

$$\boxed{\forall\ h \geqslant 1, \sum_{i=0}^{h} \binom{h+1}{i} a_i = 0}$$

---

26. Vérifier la formule obtenue en question 24.

On a donc ($a_0 = 1$) :
— ($h = 1$) : $\binom{2}{0}a_0 + \binom{2}{1}a_1 = a_0 + 2a_1 = 0$, donc $a_1 = -\frac{1}{2}$.
— ($h = 2$) : $\binom{3}{0}a_0 + \binom{3}{1}a_1 + \binom{3}{2}a_2 = 1 - \frac{3}{2} + 3a_2 = 0$ donc $a_2 = \frac{1}{6}$.
— ($h = 3$) : $\binom{4}{0}a_0 + \binom{4}{1}a_1 + \binom{4}{2}a_2 + \binom{4}{3}a_3 = 1 - 2 + 1 + 3a_3 0$ donc $a_3 = 0$.
— ($h = 4$) : $\binom{5}{0}a_0 + \binom{5}{1}a_1 + \binom{5}{2}a_2 + \binom{5}{3}a_3 + \binom{5}{4}a_4 = 1 - \frac{5}{2} + \frac{5}{3} + 0 + 5a_4 = 0$ donc $a_4 = -\frac{1}{30}$.
On trouve donc le $DL_4(0)$ de f :

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{720}x^4 + o(x^4)}$$

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad B_m(x) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a_k x^{m-k}.$$

On remarque que chaque polynôme B_m est unitaire de degré m et que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, $B_m(0) = a_m$.

27. Déterminer B_0, B_1, B_2 et B_3.

$B_0 = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a_0 X^{0-k} = a_0 = 1 \quad B_1 = \binom{1}{0} a_0 X + \binom{1}{1} a_1 = X - \frac{1}{2}$
$B_2 = \binom{2}{0} a_0 X^2 + \binom{2}{1} a_1 X + \binom{2}{2} a_2 = X^2 - X + \frac{1}{6}$
$B_3 = \binom{3}{0} a_0 X^3 + \binom{3}{1} a_1 X^2 + \binom{3}{2} a_2 X + \binom{3}{3} a_3 = X^3 - \frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{2}X$

$$\boxed{B_0 = 1, \quad B_1 = X - \frac{1}{2}, \quad B_2 = X^2 - X + \frac{1}{6}, \quad B_3 = X^3 - \frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{2}X}$$

---

28. Montrer que, pour tout entier $m \geq 2$, $B_m(1) = a_m$, puis que, pour tout entier $m \geq 1$, $B'_m = mB_{m-1}$.

Par définition de B_m (en posant $h+1=m$) :

$$B_m(1) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a_k = \sum_{k=0}^{h+1} \binom{h+1}{k} a_k = \underbrace{\sum_{k=0}^{h} \binom{h+1}{k} a_k}_{=0 \text{ d'après } 25} + \binom{h+1}{h+1} a_{h+1} = a_{h+1} = a_m$$

Puis, pour tout entier $m \geqslant 1$, par linéarité de la dérivation (la dérivée d'une constante est nulle) :

$$B'_m = \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m}{k} a_k (m-k) X^{m-k-1} = \sum_{k=0}^{m-1} m \binom{m-1}{k} a_k X^{m-1-k} = mB_{m-1}$$

car $(m-k)\binom{m}{k} = \dfrac{m!}{(m-k-1)!k!} = m\dfrac{(m-1)!}{(m-1-k)!k!} = m\dbinom{m-1}{k}$

$$\boxed{\forall\ m \geqslant 2, B_m(1) = a_m, \qquad \forall\ m \geqslant 1, B'_m = mB_{m-1}}$$

Pour tout réel x, on note $\lfloor x \rfloor$ sa partie entière.
On fixe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et on considère une fonction $g : [0,n] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$.

29. Montrer que

$$\int_0^n g(x) dx = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g(k)+g(k+1)}{2} - \int_0^n B_1(x - \lfloor x \rfloor) g'(x) \mathrm{d}x.$$

On a vu que $B_1 = X - \frac{1}{2}$. Donc $B_1(x - \lfloor x \rfloor) = x - \lfloor x \rfloor - \frac{1}{2}$.
ainsi, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, si $x \in [k, k+1]$, $B_1(x - \lfloor x \rfloor) = x - k - \frac{1}{2}$.
Et donc

$$\int_k^{k+1} g(x) + B_1(x - \lfloor x \rfloor) g'(x) \mathrm{d}x = \int_k^{k+1} g(x) + (x - k - \frac{1}{2}) g'(x) \mathrm{d}x$$

Or on reconnait une dérivation de la forme $(v)' = u'v + uv'$ avec $u(x) = (x - k - \frac{1}{2})$ et $v = g$.

$$\int_k^{k+1} g(x) + B_1(x - \lfloor x \rfloor) g'(x) \mathrm{d}x = \left[(x - k - \frac{1}{2}) g(x) \right]_k^{k+1} = \frac{1}{2} g(k+1) + \frac{1}{2} g(k)$$

Il ne reste plus qu'additionner et exploiter la relation de Chasles :

$$\boxed{\int_0^n g(x) dx = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g(k)+g(k+1)}{2} - \int_0^n B_1(x - \lfloor x \rfloor) g'(x) \mathrm{d}x}$$

---

30. En déduire que pour tout entier $m \geq 2$,

$$\int_0^n g(x) \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g(k)+g(k+1)}{2} + \sum_{p=2}^{m} \frac{(-1)^{p-1} a_p}{p!} (g^{(p-1)}(n) - g^{(p-1)}(0)) + \frac{(-1)^m}{m!} \int_0^n B_m(x - \lfloor x \rfloor) g^{(m)}(x) \mathrm{d}x.$$

On fixe $n \in \mathbb{N}$. On peut, par exemple, procéder par récurrence.
Posons, pour tout $m \geqslant 1$ (une somme vide, vaut 0) :

$$\mathcal{P}_m : \ll \int_0^n g(x) \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g(k)+g(k+1)}{2} + \sum_{p=2}^{m} \frac{(-1)^{p-1} a_p}{p!} (g^{(p-1)}(n) - g^{(p-1)}(0)) + \frac{(-1)^m}{m!} \int_0^n B_m(x - \lfloor x \rfloor) g^{(m)}(x) \mathrm{d}x \gg$$

— Puisqu'une somme vide est nulle, on trouve $\mathcal{P}_1$ dans la réponse à la question précédente.
— Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathcal{P}_m$ vraie. Donc

$$\int_0^n g(x) \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g(k)+g(k+1)}{2} + \sum_{p=2}^{m} \frac{(-1)^{p-1} a_p}{p!} (g^{(p-1)}(n) - g^{(p-1)}(0)) + \frac{(-1)^m}{m!} \int_0^n B_m(x - \lfloor x \rfloor) g^{(m)}(x) \mathrm{d}x$$

Comme précédemment, nous découpons la dernière intégrale en morceaux (Chasles) :

$$\int_0^n B_m(x - \lfloor x \rfloor) g^{(m)}(x) \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} B_m(x - \lfloor x \rfloor) g^{(m)}(x) \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} B_m(x - k) g^{(m)}(x) \mathrm{d}x$$

On a vu que $(m+1)B_m = B'_{m+1}$ et comme la dérivée de $x \mapsto x-k$ est 1, on a,
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(B_{m+1}(x-k)\right) = 1(m+1)B_m(x-k)$, on applique alors une intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_k^{k+1} B_m(x-k)g^{(m)}(x)\mathrm{d}x &= \left[\frac{1}{m+1}B_{m+1}(x-k)g^{(m)}(x)\right]_k^{k+1} - \int_k^{k+1}\frac{1}{m+1}B_{m+1}(x-k)g^{(m+1)}(x)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{m+1}\left(B_{m+1}(1)g^{(m)}(k+1) - B_{m+1}(0)g^{(m)}(k)\right) - \int_k^{k+1}\frac{1}{m+1}B_{m+1}(x-\lfloor x\rfloor)g^{(m+1)}(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Or $B_{m+1}(0) = a_{m+1}$ et $B_{m+1}(1) = a_{m+1}$, également. Donc

$$\begin{aligned}\frac{(-1)^m}{m!}\int_0^n B_m(x-k)g^{(m)}(x)\mathrm{d}x &= \frac{(-1)^m a_{m+1}}{(m+1)!}\sum_{k=0}^{n-1}\left(g^{(m)}(k+1) - g^{(m)}(k)\right) \\ &\quad + \frac{(-1)^{m+1}}{(m+1)!}\int_0^n B_{m+1}(x-\lfloor x\rfloor)g^{(m+1)}(x)\mathrm{d}x \\ &= \frac{(-1)^m a_{m+1}}{(m+1)!}\left(g^{(m)}(n) - g^{(m)}(0)\right) + \frac{(-1)^{m+1}}{(m+1)!}\int_0^n B_{m+1}(x-\lfloor x\rfloor)g^{(m+1)}(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Et donc avec $\mathcal{P}_m$, on a que $\mathcal{P}_{m+1}$ est également vrai.

$$\boxed{\begin{aligned}\forall\, n\in\mathbb{N}, m\in\mathbb{N}^*, \int_0^n g(x)\mathrm{d}x = &\sum_{k=0}^{n-1}\frac{g(k)+g(k+1)}{2} + \sum_{p=2}^{m}\frac{(-1)^{p-1}a_p}{p!}(g^{(p-1)}(n) - g^{(p-1)}(0)) \\ &+ \frac{(-1)^m}{m!}\int_0^n B_m(x-\lfloor x\rfloor)g^{(m)}(x)\mathrm{d}x\end{aligned}}$$

---

31. Montrer que, pour tout entier $m \geq 1$,

$$\int_a^b f(x)dx = T_n(f) - \sum_{p=1}^{m}\frac{\gamma_{2p}}{n^{2p}} + \rho_{2m}(n),$$

où les coefficients γ_{2p} sont donnés par $\gamma_{2p} = \dfrac{(b-a)^{2p}a_{2p}}{(2p)!}(f^{(2p-1)}(b) - f^{(2p-1)}(a))$

et $\rho_{2m}(n)$ est un reste intégral vérifiant la majoration $|\rho_{2m}(n)| \leqslant \dfrac{C_{2m}}{n^{2m}}$
où C_{2m} est une constante à préciser ne dépendant que de m, a et b.

Notons $g : [0,n] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto f(a + \frac{t}{n}(b-a))$. $g(0) = f(a)$ et $g(n) = f(b)$.
On note également que $g(k) = f(x_k)$.
Faisons le changement de variable $x = a + \frac{t}{n}(b-a)$. On a donc :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_0^n g(t)\frac{(b-a)}{n}\mathrm{d}t = h\int_0^n g(t)\mathrm{d}t = h\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$$

On applique alors la formule de la question précédente jusqu'à $2m$.

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = h\sum_{k=0}^{n-1}\frac{g(k)+g(k+1)}{2} + h\sum_{p=2}^{2m}\frac{(-1)^{p-1}a_p}{p!}(g^{(p-1)}(n) - g^{(p-1)}(0)) + h\frac{(-1)^{2m}}{(2m)!}\int_0^n B_{2m}(x-\lfloor x\rfloor)g^{(2m)}(x)\mathrm{d}x$$

Comme $g(k) = f(a_k)$, on retrouver $T_n(f)$ à la place de la première somme ;
comme $a_3 = 0$, on a $a_{2k+1} = 0$, pour tout $k \geqslant 1$;
comme la dérivée k-ieme de $t \mapsto a + \frac{t}{n}(b-a)$ est (récurrence) $t \mapsto \left(\dfrac{(b-a)}{n}\right)^k$, on a $g^{(k)} = h^k f^{(k)}$:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = T_n(f) + \sum_{p=2}^{2m}\frac{(-1)^{p-1}h\times h^{p-1}a_p}{p!}(f^{(p-1)}(b) - f^{(p-1)}(a)) + I_m$$

$$\boxed{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = T_n(f) + \sum_{r=1}^{m}\frac{h^{2r}a_{2r}}{(2p)!}(f^{(2r-1)}(b) - f^{(2r-1)}(a)) + I_m}$$

avec $I_m = \dfrac{h^{2m}}{(2m)!}\displaystyle\int_a^b B_{2m}(x-\lfloor x\rfloor)f^{(2m)}(x)\mathrm{d}x$ (un h a servi pour le changement de variable).

$$\boxed{|I_m| \leqslant \frac{1}{n^{2m}}(b-a)^{2m}\int_a^b \left|B_{2m}((x-\lfloor x\rfloor)f^{(2m)}(x)\right|\mathrm{d}x \leqslant \frac{C_{2m}}{n^{2m}}}$$

en exploitant le fait que $x \mapsto \left|B_{2m}((x-\lfloor x\rfloor)f^{(2m)}(x)\right|$ est continue sur $[a,b]$.
