Devoir surveillé n°8

Sujet donné le 19 avril 2023, 4h.
L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.
La notation tiendra particulièrement compte de **la qualité de la rédaction, la précision des raisonnements et l'énoncé des formules utilisées. Les réponses aux questions seront numérotées et séparées par un trait horizontal. Les résultats essentiels devront être encadrés ou soulignés.**

BON TRAVAIL

Formules de quadrature pour le calcul approché d'intégrale

Notations et remarques préliminaires

Dans tout ce sujet,

- un polynôme est dit unitaire si son coefficient dominant est 1,
- I est un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide,
- w est une fonction continue et strictement positive de I dans $\mathbb{R}$; on dit que w est *un poids* sur I.
- $I_n(f) = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j f(x_j)$, où $n \in \mathbb{N}$, $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ et $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ sont $n+1$ points distincts dans I, est appelée *formule de quadrature*
- $e(f) = \int_I f(x)w(x)dx - \sum_{j=0}^{n} \lambda_j f(x_j)$ est l'*erreur de quadrature* associée. On remarque que e est une forme linéaire sur l'espace vectoriel des fonctions f de I dans $\mathbb{R}$ telles que fw est intégrable sur I.
- On dit qu'une formule de quadrature $I_n(f)$ est *exacte sur* $\mathbb{R}_m[X]$ si : $\quad \forall P \in \mathbb{R}_m[X], \quad e(P) = 0$ ce qui signifie que, pour tout P de degré inférieur ou égal à m, $\quad \int_I P(x)w(x)dx = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j P(x_j)$.
- Enfin, on appelle *ordre d'une formule de quadrature* $I_n(f)$ le plus grand entier $m \in \mathbb{N}$ pour lequel la formule de quadrature $I_n(f)$ est exacte sur $\mathbb{R}_m[X]$.

Objectif

Etant donné une fonction continue $f : I \to \mathbb{R}$ telle que fw est intégrable sur I, on cherche à approcher l'intégrale $\int_I f(x)w(x)dx$ par une formule de quadrature $I_n(f) = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j f(x_j)$, avec une erreur de quadrature $e(f)$, minimale voire nulle.

I. Généralités sur les formules de quadrature

Pour les questions 1 à 3, on se place dans le cas $I = [0,1]$ et $\forall x \in I$, $w(x) = 1$. On cherche donc à approcher $\int_0^1 f(x)dx$ lorsque f est une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

1. Déterminer l'ordre de la formule de quadrature $I_0(f) = f(0)$.
2. Faire de même avec la formule de quadrature $I_0(f) = f(1/2)$.
3. Déterminer les coefficients $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ pour que la formule $I_2(f) = \lambda_0 f(0) + \lambda_1 f(1/2) + \lambda_2 f(1)$ soit exacte sur $\mathbb{R}_2[X]$. Cette formule de quadrature est-elle d'ordre 2 ?

On revient au cas général. Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère $n+1$ points distincts de I, notés $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$, et une fonction continue f de I dans $\mathbb{R}$.

4. Montrer que l'application $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \mapsto & (P(x_0), P(x_1), \ldots, P(x_n)) \end{array} \right.$ est un isomorphisme.

5. Montrer que, pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, il existe un unique polynôme $L_i \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que

$$\forall j \in [\![0,n]\!], \quad L_i(x_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq i, \\ 1 & \text{si } j = i. \end{cases}$$

6. Montrer que $(L_0, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
   Cette base est appelée *base de Lagrange associée aux points* $(x_0, \ldots, x_n)$.
7. On suppose que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $x \mapsto x^k w(x)$ est intégrable sur I. Montrer que la formule de quadrature $I_n(f) = \sum\limits_{j=0}^{n} \lambda_j f(x_j)$ est exacte sur $\mathbb{R}_n[X]$ ssi $\forall\, j \in [\![0,n]\!]$, $\lambda_j = \displaystyle\int_I L_j(x)w(x)\mathrm{d}x$.
8. On se place dans le cas $I = [0,1]$ et $\forall x \in I$, $w(x) = 1$.
   Déterminer la base de Lagrange associée aux points $(0, \frac{1}{2}, 1)$ et retrouver ainsi les coefficients de la formule de quadrature $I_2(f)$ de la question 3.

Pour les questions 9 et 10, on suppose que l'intervalle I est un segment : $I = [a,b]$, avec $a < b$.
Pour tout entier naturel m, on considère la fonction $\varphi_m : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2, \quad \varphi_m(x,t) = \begin{cases} (x-t)^m & \text{si } x \geq t, \\ 0 & \text{si } x < t. \end{cases}$$

φ_m *est continue si* $m \geq 1$ *et discontinue si* $m = 0$.

On considère une formule de quadrature $I_n(f) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \lambda_j f(x_j)$.
On note $m \in \mathbb{N}$ l'ordre de cette formule et on cherche à évaluer l'erreur associée :

$$e(f) = \int_a^b f(x)w(x)dx - \sum_{j=0}^{n} \lambda_j f(x_j).$$

On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^{m+1}$ sur I.

9. A l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral, montrer que $e(f) = e(R_m)$, où

$$\forall x \in [a,b], \quad R_m(x) = \frac{1}{m!} \int_a^b \varphi_m(x,t) f^{(m+1)}(t)dt.$$

10. En déduire que, si $m \geq 1$, $e(f) = \displaystyle\frac{1}{m!} \int_a^b K_m(t) f^{(m+1)}(t)dt$, où

$$\forall t \in [a,b], \quad K_m(t) = e(x \mapsto \varphi_m(x,t)) = \int_a^b \varphi_m(x,t)w(x)dx - \sum_{j=0}^{n} \lambda_j \varphi_m(x_j,t).$$

   On pourra utiliser le résultat admis suivant : pour toute fonction continue $g : [a,b]^2 \to \mathbb{R}$, *on a*

$$\int_a^b \left(\int_a^b g(x,t)dt \right) dx = \int_a^b \left(\int_a^b g(x,t)dx \right) dt.$$

   La fonction K_m est appelée *noyau de Peano associé à la formule de quadrature.*
   On admet que cette expression de $e(f)$ reste valable pour $m = 0$.

Pour finir cette partie, on suppose que I est un segment et $\forall x \in I$, $w(x) = 1$.
On se place d'abord dans le cas $I = [0,1]$ et on considère la formule de quadrature $I_1(g) = \dfrac{g(0) + g(1)}{2}$, qui est d'ordre $m = 1$ (on ne demande pas de le montrer).

11. Calculer le noyau de Peano associé $t \mapsto K_1(t)$ et montrer que, pour tout fonction g de classe $\mathcal{C}^2$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, on a la majoration suivante de l'erreur de quadrature associée :

$$|e(g)| \leq \frac{1}{12} \sup_{x \in [0,1]} |g''(x)|.$$

On se place maintenant dans le cas d'un segment quelconque $I = [a,b]$ (avec $a < b$), qu'on subdivise en $n+1$ points $a_0, \ldots, a_n$ équidistants :
$\forall i \in [\![0,n]\!], \quad a_i = a + ih$,où $h = \frac{b-a}{n}$ est le pas de la subdivision.
On considère alors la formule de quadrature

$$T_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(a_i) + f(a_{i+1})}{2},$$

appelée *méthode des trapèzes.* L'erreur de quadrature associée est notée : $e_n(f) = \displaystyle\int_a^b f(x)dx - T_n(f)$.

12. Représenter graphiquement $T_n(f)$ pour une fonction f arbitraire.
13. On suppose que f est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que

$$e_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} e(g_i),$$

où e est l'erreur associée à la formule de quadrature I_1 étudiée à la question 11 et les $g_i : [0,1] \to \mathbb{R}$ sont des fonctions à préciser.
14. En déduire la majoration d'erreur

$$|e_n(f)| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \sup_{x\in[a,b]} |f''(x)|.$$

II. Polynômes orthogonaux et applications

On note E l'ensemble des fonctions f continues de I dans $\mathbb{R}$ telles q f^2w est intégrable sur I.
On rappelle que : si $0 \leqslant |\psi| \leqslant \varphi$ sur I, avec φ intégrable sur I, alors ψ est intégrable sur I $(\star)$.

15. Montrer que, pour toutes fonctions f et g de E, le produit fgw est intégrable sur I.
On pourra utiliser $(\star)$ et l'inégalité $\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2,\ |ab| \leq \frac{1}{2}(a^2+b^2)$, après l'avoir justifiée.
16. Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Pour toutes fonctions f et g de E, on pose

$$\langle f, g\rangle = \int_I f(x)g(x)w(x)dx.$$

17. Montrer qu'on définit ainsi un produit scalaire sur E.

Dans la suite, on munit E de ce produit scalaire et on note $\|\cdot\|$ la norme associée. On suppose que, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto x^k w(x)$ est intégrable sur I. Cela entraine par linéarité de l'intégrale que E contient toutes les fonctions polynomiales.
On admet qu'il existe une unique suite de polynômes $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que
(a) pour tout $n \in \mathbb{N}$, p_n est unitaire
(b) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\deg(p_n) = n$
(c) la famille $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale pour le produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$, autrement dit $\langle p_i, p_j\rangle = 0$, pour $i \neq j \in \mathbb{N}$.

On dit que les (p_n) sont les *polynômes orthogonaux associés au poids w.*

18. Donner un algorithme qui permet de déterminer la suite (p_k) (pour w donné) (sans démontrer qu'il marche bien).
19. Montrer que $p_{n+1} \in (\mathbb{R}_n[X])^\perp$.

On s'intéresse aux racines des polynômes p_n.
On rappelle que $\mathring{I}$ désigne l'intérieur de I, c'est-à-dire l'intervalle I privé de ses éventuelles extrémités. On a donc $\mathring{I} =]a,b[$, où $a = \inf(I) \in \mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ et $b = \sup(I) \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $x_1,\dots,x_k$ les racines distinctes de p_n qui sont dans $\mathring{I}$ et $m_1,\dots,m_k$ leurs multiplicités respectives. On considère le polynôme

$$q(X) = \prod_{i=1}^{k}(X-x_i)^{\varepsilon_i}, \quad \text{avec } \varepsilon_i = \begin{cases} 1 & \text{si } m_i \text{ est impair,} \\ 0 & \text{si } m_i \text{ est pair.}\end{cases}$$

20. En étudiant $\langle p_n, q\rangle$, montrer que p_n possède n racines distinctes dans $\mathring{I}$.

Considérons une formule de quadrature $I_n(f) = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j f(x_j)$ où $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_0,\dots,\lambda_n \in \mathbb{R}$ et $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ sont $n+1$ points distincts dans I.
On suppose que les coefficients $(\lambda_j)_{0\leq j\leq n}$ sont choisis comme à la question **??** :

$$\forall j \in [\![0,n]\!], \quad \lambda_j = \int_I L_j(x)w(x)dx,$$

où $(L_0,\dots,L_n)$ est la base de Lagrange associée aux points $(x_0,\dots,x_n)$ (définie dans la partie I).
Ainsi, la formule $I_n(f)$ est d'ordre $m \geq n$. Nous allons montrer que dans ces conditions, il existe un unique choix des points $(x_i)_{0\leq i\leq n}$ qui permet d'obtenir l'ordre m le plus elevé possible.

21. En raisonnant avec le polynôme $\prod_{i=0}^{n}(X-x_i)$, montrer que $m \leq 2n+1$.
22. Montrer que $m = 2n+1$ si et seulement si les x_i sont les racines de p_{n+1}.

III. Accélération de la méthode des trapèzes

Pour les questions 23 à 26, on considère $f : x \mapsto \dfrac{x}{e^x - 1}$.

23. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
24. Calculer le $DL_4(0)$ de f.

On suppose que $f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!} x^k + o(x^n)$.

On admet que si $g(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} b_k x^k + o(x^n)$ *et* $h(x) = \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} c_k x^k + o(x^n)$,

alors $g \times h$ *admet un* $DL_n(0)$ *:* $(g \times h)(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{i=0}^{k} b_i c_{k-i} \right) x^k + o(x^n)$.

25. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{i=0}^{k} \binom{k+1}{i} a_i = 0$.
26. Vérifier la formule obtenue en question 24.

Dans la suite du problème, on considère les polynômes B_m définis par

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad B_m(x) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a_k X^{m-k}.$$

On remarque que chaque polynôme B_m est unitaire de degré m et que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, $B_m(0) = a_m$.

27. Déterminer B_0, B_1, B_2 et B_3.
28. Montrer que, pour tout entier $m \geqslant 2$, $B_m(1) = a_m$, puis que, pour tout entier $m \geqslant 1$, $B'_m = mB_{m-1}$.

On admet pour la suite que $a_{2k+1} = 0$, pour tout $k \geqslant 1$.
On cherche maintenant à exploiter les nombres a_m et les polynômes B_m pour établir un développement asymptotique à tout ordre de l'erreur de quadrature associée à la méthode des trapèzes, pour une fonction suffisament régulière.
Pour tout réel x, on note $\lfloor x \rfloor$ sa partie entière.
On fixe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et on considère une fonction $g : [0, n] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$.

29. Montrer que

$$\int_0^n g(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g(k) + g(k+1)}{2} - \int_0^n B_1(x - \lfloor x \rfloor) g'(x)\mathrm{d}x.$$

30. En déduire que pour tout entier $m \geq 2$,

$$\int_0^n g(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g(k) + g(k+1)}{2} + \sum_{p=2}^{m} \frac{(-1)^{p-1} a_p}{p!} (g^{(p-1)}(n) - g^{(p-1)}(0)) + \frac{(-1)^m}{m!} \int_0^n B_m(x - \lfloor x \rfloor) g^{(m)}(x)\mathrm{d}x.$$

On considère maintenant une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ et la formule de quadrature déjà étudiée à la partie I :

$$T_n(f) = h \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2},$$

(méthode des trapèzes), où $h = \dfrac{b-a}{n}$ et $\forall i \in [\![0, n]\!]$, $x_i = a + ih$

31. Montrer que, pour tout entier $m \geq 1$,

$$\int_a^b f(x)dx = T_n(f) - \sum_{p=1}^{m} \frac{\gamma_{2p}}{n^{2p}} + \rho_{2m}(n),$$

où les coefficients γ_{2p} sont donnés par $\gamma_{2p} = \dfrac{(b-a)^{2p} a_{2p}}{(2p)!} (f^{(2p-1)}(b) - f^{(2p-1)}(a))$

et $\rho_{2m}(n)$ est un reste intégral vérifiant la majoration $|\rho_{2m}(n)| \leqslant \dfrac{C_{2m}}{n^{2m}}$

où C_{2m} est une constante à préciser ne dépendant que de m, a et b.

On a donc établi, pour tout entier $m \geq 1$, le développement asymptotique

$$T_n(f) = \int_a^b f(x)dx + \frac{\gamma_2}{n^2} + \frac{\gamma_4}{n^4} + \cdots + \frac{\gamma_{2m}}{n^{2m}} + \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^{2(m+1)}} \right),$$

où les coefficients γ_{2p} sont indépendants de n.