Devoir surveillé n°7
CORRECTION

Contraintes symplectiques linéaires

Préliminaires

1. Equivalences calculatoires.

(a) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour tout $i, j \in \mathbb{N}_n$, évaluer $E_i^T \times A \times E_j$ en fonction des coefficients de A.

On rappelle que $E_{i,j} \times E_{k,\ell} = \delta_{j,k} E_{i,\ell}$.
Dans cet esprit, la base des matrices colonnes se note $(E_{j,\cdot})$ et celle des matrices lignes $(E_{\cdot,i})$.
Notons ${}^i[M]_j$, le coefficient en ligne i et colonne j de la matrice M (générique).
On a alors, pour tout $i, j \in \mathbb{N}_n$:

$$A \times E_j = \sum_{(k,\ell)\in\mathbb{N}_n^2}^{k} [A]_\ell E_{k,\ell} E_{j,\cdot} = \sum_{k,\ell\in\mathbb{N}_n}^{k} [A]_\ell \delta_{\ell,j} E_{k,\cdot} = \sum_{k=1}^{n} {}^k[A]_j E_{k,\cdot}$$

$$E_i^T \times A \times E_j = \sum_{k=1}^{n} {}^k[A]_j E_{\cdot,i} E_{k,\cdot} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{i,k}^k [A]_j =^i [A]_j$$

$$\boxed{\text{Pour } i, j \in \mathbb{N}_n, \quad E_i^T \times A \times E_j =^i [A]_j.}$$

(b) En déduire l'équivalence pour toutes matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$[\forall\ (X,Y) \in \left(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\right)^2,\ X^T AY = X^T BY] \quad \Longleftrightarrow \quad A = B$$

Si $A = B$, alors bien évidemment, pour tout $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^T \times A \times Y = X^T \times B \times Y$.
Réciproquement, supposons que pour tout $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^T \times A \times Y = X^T \times B \times Y$.
Soit $i, j \in \mathbb{N}_n$. Alors $X \leftarrow E_i$ et $Y \leftarrow E_j$, on trouve :

$${}^i[A]_j = E_i \times A \times E_j = E_i \times B \times E_j =^i [B]_j$$

Et donc $A = B$ (par égalité sur tous les coefficients).

$$\boxed{[\forall\ (X,Y) \in \left(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\right)^2,\ X^T AY = X^T BY] \quad \Longleftrightarrow \quad A = B}$$

---

2. Formes bilinéaires.
Soit F un $\mathbb{R}$espace-vectoriel. Soit $f : F^2 \to \mathbb{R}$.
On dit que f est une forme bilinéaire sur l'espace vectoriel F si elle vérifie les propriétés :

$$\forall\ (x,y,z) \in E^3, \lambda \in \mathbb{K}, \qquad f(x + \lambda y, z) = f(x,z) + \lambda f(y,z) \text{ et } f(x, y + \lambda z) = f(x,y) + \lambda f(x,z)$$

Lesquelles, parmi les applications suivantes, sont bilinéaires :

$$f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto x \times y \qquad f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto x + y \qquad f_3 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i y_{n-i}$$

- Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$f_1(x+\lambda y, z) = (x+\lambda y)z = xz+\lambda yz = f_1(x,z)+\lambda f_1(y,z) \text{ et } f_1(x, y+\lambda z) = x(y+\lambda z) = xy+\lambda xz = f_1(x,y)+\lambda f_1(x,z)$$

- $f_2(1+1, 1) = f_2(2,1) = 3$ et $f_2(1,1) + f_2(1,1) = 2 + 2 = 4$.
- Soient $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ (on suppose $a = (a_1, \dots a_n)$, pour $a \in \{x, y, z\}$).

$$f_3(x + \lambda y, z) = \sum_{k=1}^{n} (x_k + \lambda_k y_k) z_{n-k} = \sum_{k=1}^{n} x_k z_{n-k} + \lambda \sum_{k=1}^{n} y_k z_{n-k} = f_3(x,z) + \lambda f_3(y,z)$$

$$f_3(x, y + \lambda z) = \sum_{k=1}^{n} x_k (y_{n-k} + \lambda_{n-k} z_{n-k}) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_{n-k} + \lambda \sum_{k=1}^{n} x_k z_{n-k} = f_3(x,y) + \lambda f_3(x,z)$$

$$\boxed{f_1 \text{ et } f_3 \text{ sont bilinéaires. } f_2 \text{ n'est pas bilinéaire.}}$$

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n.
On appelle *forme symplectique sur* E toute application ω de E^2 dans $\mathbb{R}$ qui vérifie les trois propriétés suivantes :

— bilinéarité (voir préliminaires)
— antisymétrie : $\forall (x,y) \in E^2,\ \omega(x,y) = -\omega(y,x)$;
— non dégénérescence : $\{x \in E \mid \forall y \in E,\ \omega(x,y) = 0\} = \{0_E\}$.

Un *espace vectoriel symplectique réel* (E,ω) est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie E muni d'une forme symplectique ω sur E.

A- Espace vectoriel symplectique réel

3. Montrer que, si ω est une forme symplectique sur E, alors pour tout vecteur x de E, $\omega(x,x) = 0$.

Soit $x \in E$. Par antisymétrie de ω : $\omega(x,x) = -\omega(x,x)$ (en intervertissant les deux x).
Donc $2\omega(x,x) = 0$.

$$\boxed{\forall\ x \in E, \qquad \omega(x,x) = 0.}$$

Pour tout sous-espace vectoriel F d'un espace symplectique (E,ω), on appelle ω-*orthogonal* de F et on note F^ω l'ensemble $F^\omega = \{x \in E \mid \forall y \in F,\ \omega(x,y) = 0\}$
Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace symplectique (E,ω).

4. Justifier que F^ω est un sous-espace vectoriel de E.

Méthode 1 :
— $0 \in F^\omega$: pour $y \in F$, $\omega(0,y) = 0$ car $\varphi_y : x \mapsto \omega(x,y)$ est linéare (linéarité à gauche de ω).
— Soient $x_1, x_2 \in F^\omega$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.
Pour tout $y \in F$, par linéarité de ω à gauche : $\omega(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) = \lambda_1 \omega(x_1,y) + \lambda_2(x_2,y) = \lambda_1 0 + \lambda_2 0 = 0$
car $x_1, x_2 \in F$. Donc $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in F$.

Methode 2 : « Poudre aux yeux ».
Soit $\theta : x \mapsto (y \in F \mapsto \omega(x,y))$.
Alors θ est linéaire (linéarité à gauche de ω). Puis

$$x \in F^\omega \Longleftrightarrow \forall\ y \in F, \omega(x,y) = 0 \Longleftrightarrow \theta(x) = O_{|F} \Longleftrightarrow x \in \text{Ker}\ \theta$$

Donc $F^\omega = \text{Ker}\ \theta$.

$$\boxed{\text{Quelle que soit la méthode, } F^\omega \text{ est un sous-espace vectoriel de } E.}$$

---

5. Le sous-espace F^ω est-il nécessairement en somme directe avec F ?

Non, on peut avoir $x \in F \cap F^\omega$. Prenons, en effet $x \neq 0$ et $F = \text{vect}(x)$.
Pour tout $y \in F$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y = \lambda \cdot x$.
On a alors $\omega(x,y) = \omega(x, \lambda x) = \lambda\omega(x,x) = 0$, d'après la question précédente.
Donc $x \in F^\omega$.
Ainsi $F \cap F^\omega \neq \{0\}$.

$$\boxed{\text{Le sous-espace } F^\omega \text{ n'est pas nécessairement en somme directe avec } F.}$$

Pour tout $x \in E$, on note $\omega(x,\cdot)$ l'application linéaire de E dans $\mathbb{R}, y \mapsto \omega(x,y)$ et on considère $d_\omega : \left| \begin{array}{ccc} E & \to & \mathcal{L}(E,\mathbb{R}) \\ x & \mapsto & \omega(x,\cdot) \end{array} \right.$

6. Montrer que d_ω est un isomorphisme.

Pour tout $x_1, x_2 \in E$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} d_\omega(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) : y \mapsto \omega(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) = \lambda_1 \omega(x_1,y) + \lambda_2 \omega(x_2,y) &= \lambda_1 d_\omega(x_1)(y) + \lambda_2 d_\omega(x_2)(y) \\ &= [\lambda_1 d_\omega(x_1) + \lambda_2 d_\omega(x_2)](y) \end{aligned}$$

où l'on a appliqué la linéarité à gauche pour ω.
On retrouve une égalité d'applications sur $\mathcal{L}(E,\mathbb{R})$: $d_\omega(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 d_\omega(x_1) + \lambda_2 d_\omega(x_2)$

Montrons maintenant que d_ω est injective.

Soit $x \in \text{Ker } d_\omega$. Alors, $d_\omega(x) = 0_{\mathcal{L}(E,\mathbb{R})}$, i.e. pour tout $y \in E$, $\omega(x,y) = 0$.

Or ω est non dégénéré, donc on a nécessairement $x = 0$.

Donc Ker $d_\omega = \{0\}$ et d_ω est injective.

Enfin $\dim(\mathcal{L}(E,\mathbb{R})) = \dim E$ (de dimension finie). Donc, nécessairement d_ω est bijective.

$$\boxed{d_\omega \text{ est un isomorphisme.}}$$

---

7. Montrer que l'application de restriction $r_{|F} : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E,\mathbb{R}) & \to & \mathcal{L}(F,\mathbb{R}) \\ \ell & \mapsto & \ell|_F \end{array} \right.$ est surjective.

Soit $g \in \mathcal{L}(F,\mathbb{R})$.

Comme E est de dimension finie, tout sous-espace de E admet un supplémentaire.

Considérons donc H, sev de E tel que $E = F \oplus H$.

Soit p, le projecteur sur F de direction H et $q = \text{id} - p$ Soit $\ell : E \to \mathbb{R}$, tel que $\ell = g \circ p + 0 \circ q$.

Alors par composition et addition, ℓ est définie sur E et est une forme linéaire : $\ell \in \mathcal{L}(E,\mathbb{R})$.

Puis, pour tout $x \in F$, on a $p(x) = x$ et $q(x) = 0$, donc $\ell(x) = g(p(x)) + 0 = g(x)$.

Donc $\ell_{|F} = g$, i.e. $r_{|F}(\ell) = g$.

$$\boxed{r_{|F} \text{ est donc surjective de } \mathcal{L}(E,\mathbb{R}) \text{ sur } \mathcal{L}(F,\mathbb{R}).}$$

---

8. Préciser le noyau de $r_{|F} \circ d_\omega$. En déduire que $\dim F^\omega = \dim E - \dim F$.

On a les équivalences :

$$\begin{aligned} x \in \text{Ker } r_{|F} \circ d_\omega & \iff r_{|F}(d_\omega(x)) = 0 \iff \forall\, y \in F, d_\omega(x)(y) = 0 \iff \forall\, y \in F, \omega(x,y) = 0 \\ & \iff x \in F^\omega \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ker } r_{|F} \circ d_\omega = F^\omega}$$

On applique le théorème du rang à l'application linéaire (composée) : $r_{|F} \circ d_\omega : E \to \mathcal{L}(F,\mathbb{R})$:

$$\dim E = \dim \text{Ker } r_{|F} \circ d_\omega + \dim \text{Im } r_{|F} \circ d_\omega = \dim F^\omega + \dim \text{Im } r_{|F} \circ d_\omega$$

Or $r_{|F} \circ d_\omega$ est surjective par composition de deux applications surjectives ($r_{|F}$ et d_ω bijective),

Donc Im $r_{|F} \circ d_\omega = \mathcal{L}(F,\mathbb{R})$. Or par dualité : $\dim(\mathcal{L}(F,\mathbb{R}) = \dim F$.

$$\boxed{\dim E = \dim F^\omega + \dim F}$$

---

9. Montrer que la restriction ω_F de ω à F^2 définit une forme symplectique sur F si et seulement si $F \oplus F^\omega = E$.

• Par bilinéarité de ω, ω_F est également bilinéaire : les vecteurs x, y, z de F sont également des vecteurs de E.

• De même, les vecteurs x, y de F sont également des vecteurs de E,

donc pour tout $x, y \in F$: $\omega_F(x,y) = \omega(x,y) = -\omega(y,x) = -\omega_F(y,x)$. Et donc ω_F est antisymétrique.

• Il reste à étudier la non dégénerescence, équivalente à $F \oplus F^\omega = E$.

Supposons, d'abord, que $F \oplus F^\omega = E$.

Soit $x \in F$ tel que $\forall\, y \in F$, $\omega_F(x,y) = 0$, alors $x \in F^\omega$, donc $x \in F \cap F^\omega = \{0\}$, donc $x = 0$.

Donc $\{x \in F \mid \forall\, y \in F, \omega_F(x,y) = 0\} \subset \{0\}$.

Réciproquement, pour tout $y \in F$, $\omega(0,y) = 0$ alors $0 \in \{x \in F \mid \forall\, y \in F, \omega_F(x,y) = 0\}$.

Donc ω_F est non dégénérée.

Supposons que ω_F est non dégénérée.

Soit $x \in F \cap F^\omega$, donc $x \in F^\omega = \{a \in E \mid \forall\, y \in F, \omega(a,y) = 0\}$, et pour $y \in F$, $\omega(x,y) = 0$.

mais, $x \in F$, $x \in \{a \in F \mid \forall\, y \in F, \omega(a,y) = 0\} = \{a \in F \mid \forall\, y \in F, \omega_F(a,y) = 0\} = \{0\}$

car ω_F non dégénérée.

Donc $x = 0$.

Ainsi, la somme $F + F^\omega$ est directe. $\dim(F + F^\omega) = \dim(F \oplus F^\omega) = \dim F + \dim F^\omega = \dim E$.

Donc (puisque $F + F^\omega \subset E$), on a $F \oplus F^\omega = F + F^\omega = E$.

$$\boxed{\text{Finalement, on a montré que } \omega_F \text{ est une forme symplictique sur } F \text{ ssi } F \oplus F^\omega = E.}$$

B- Structure symplectique standard sur $\mathbb{R}^n$

On suppose qu'il existe une forme symplectique ω sur $\mathbb{R}^n$ et on note $\Omega \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice définie par $\Omega = (\omega(e_i, e_j))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ où $(e_1, \ldots, e_n)$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

10. Montrer que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \quad \omega(x,y) = X^\top \Omega Y$$

où X et Y désignent les colonnes des coordonnées de x et y dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$, supposons que $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$ (écritures dans la base canonique).
On a alors, par bilinéarité :

$$\begin{aligned}\omega(x,y) &= \omega\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, y\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \omega(e_i, y) = \sum_{i=1}^{n} \omega\left(e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j \omega(e_i, e_j) = \sum_{i,j\in\mathbb{N}_n} x_i y_j^i [\Omega]_j\end{aligned}$$

On a, par ailleurs vu en question 1 que $E_i^T \times AE_j =^i [A]j$, donc $E_i^T \times \Omega \times E_j =^i [\Omega]_j$.

$$\omega(x,y) = \sum_{i,j\in\mathbb{N}_n} x_i y_j E_i^T \Omega E_j = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i E_i\right) \times \Omega \times \left(\sum_{j=1}^{n} y_j E_j\right) = X \times \Omega \times Y$$

$$\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \quad \omega(x,y) = X^\top \Omega Y}$$

---

11. En déduire que Ω est antisymétrique (i.e. $\Omega^T = -\Omega$) et inversible.

On a alors, pour tout $i, j \in \mathbb{N}_n$,

$$^i[\Omega^T]_j =^j [\Omega]_i = E_j^T \times \Omega \times E_i = \omega(e_j, e_i) = -\omega(e_i, e_j) = -^i[\Omega]_j$$

Donc Ω est antisymétrique.
Soit $X \in \text{Ker } \Omega (\subset \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))$,
Alors $\Omega X = 0$ (colonne nulle),
donc, pour tout $y \in E$, $\omega(x,y) = -\omega(y,x) = -Y^T \Omega X = 0$ (nombre nul).
Or ω est non dégénérée, donc $x \in \{0\}$ et $x = 0$ puis $X = 0$.
Ainsi, Ker $\Omega = \{0\}$, et Ω est inversible.

$$\boxed{\Omega \text{ est antisymétrique (i.e. } \Omega^T = -\Omega) \text{ et inversible.}}$$

---

12. On admet qu'il existe une application $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ (non linéaire !) vérifiant pour toutes matrices A et B :
— $\det A \neq 0$ si et seulement si A inversible
— $\det(A \times B) = \det A \times \det B$
— $\det(A^T) = \det A$

(a) Montrer que $\det(I_n) = 1$ puis $\det(-I_n) \in \{-1, 1\}$

(b) On admet que $\det(-I_n) = (-1)^n$. Montrer que l'existence de Ω impose à n d'être pair.

L'application $\det_{|GL_n(\mathbb{R})}$ *est un morphisme du groupe* $(GL_n(\mathbb{R}), \times)$ *sur le groupe* $(\mathbb{R}^*, \times)$.
Nous ferons sa construction prochainement.

(a) Soit A une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors $\det(A) = \det(A \times I_n) = \det(A) \times \det(I_n)$.
Or $\det A \neq 0$, on peut donc simplifier par $\det A$ et on trouve

$$\boxed{\det I_n = 1}$$

On a alors $(-I_n) \times (-I_n) = I_n$ et donc par propriété de morphisme : $1 = \det I_n = \det(-I_n)^2$.

$$\boxed{\det(-I_n) \in \{x \mid x^2 = 1\} = \{-1, 1\}}$$

(b) On a donc, par propriété du déterminant (la troisième) :

$$\det(\Omega) = \det(\Omega^T) = \det(-\Omega) = \det(-I_n \times \Omega) = \det(-I_n)\det(\Omega) = (-1)^n \det(\Omega)$$

Donc si n est impair : $\det(\Omega) = -\det(\Omega)$ et donc $2\det\Omega = 0$
i.e. $\det\Omega = 0$ et Ω n'est pas inversible. ABSURDE.

$$\boxed{\text{Donc } n \text{ est nécessairement pair.}}$$

Jusqu'à la fin du problème, on suppose que n est pair et on note $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = 2m$.
On note $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\,(= \mathcal{M}_{2m}(\mathbb{R}))$ la matrice définie par blocs par $J = \begin{pmatrix} 0 & -I_m \\ I_m & 0 \end{pmatrix}$ et on note j l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à J.

13. On note, pour $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$ (écritures dans la base canonique) : $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.
Montrer que pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$:

$$\langle x, u(y)\rangle = X^T \times M \times Y$$

où X, Y sont les matrices (colonnes) de x et y dans la base canonique alors que M est la matrice de u dans la base canonique.

On note $\mathcal{B}$, la base canonique, on a donc $Z = M \times Y = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) \times \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(y) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u(y))$.
On note donc pour $z = u(y)$:.

Ainsi $\langle x, u(y)\rangle = \langle x, z\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i z_i = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = X^T \times Z$

$$\boxed{\langle x, u(y)\rangle = X^T \times MY = X^T MY}$$

---

14. Montrer que l'application $b_s : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \langle x, j(y)\rangle \end{array} \right.$ est une forme symplectique sur $\mathbb{R}^n$.

Notons d'abord que si $z = \sum_{i=1}^{n} z_i e_i = \sum_{i=1}^{m} z_i e_i + \sum_{i=m+1}^{n} z_i e_i$,
Alors $j(z) = \sum_{i=1}^{m} z_i j(e_i) + \sum_{i=m+1}^{n} z_i j(e_i) = \sum_{i=1}^{m} z_i e_{i+m} + \sum_{i=1}^{m} z_i(-e_{i-m})$ d'après l'écriture de J.
Donc (en posant $h = m + i$ dans la première somme et $h = i - m$ dans la seconde) :
$j(z) = \sum_{h=m+1} z_{h-m} e_h + \sum_{h=1}^{m} (-z_{h+m}) e_h$.
Ainsi, pour tout $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$,

$$b_s(x,y) = \sum_{i=1}^{m} x_i \times (-y_{i+m}) + \sum_{i=m+1}^{n} x_i y_{i-m} = -\sum_{i=1}^{m} x_i y_{i+m} + \sum_{i=m+1}^{n} x_i y_{i-m}$$

On peut aussi utiliser directement le calcul matriciel, à l'aide de la réponse à la question précédente.

- Soient $x, y, z \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,
  Notons X, Y et Z les matrices de x, y et z respectivement dans la base canonique, alors $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x + \lambda y) = X + \lambda Y$ et donc :

$$b_s(x + \lambda y, z) = (X + \lambda Y)^T \times J \times Z = X^T JZ + \lambda Y^T JZ = b_s(x,z) + \lambda b_s(y,z)$$

$$b_s(x, y + \lambda z) = X^T \times J \times (Y + \lambda Z) = X^T JY + \lambda X^T JZ = b_s(x,y) + \lambda b_s(x,z)$$

Donc b_s est bilinéaire.

- D'après le calcul initial :

$$b_s(y,x) = -\sum_{i=1}^{m} y_i x_{i+m} + \sum_{i=m+1}^{n} y_i x_{i-m} = -\left(\underbrace{\sum_{k=m+1}^{n} x_k y_{k-m}}_{k=i+m} - \underbrace{\sum_{k=1}^{m} x_k y_{k+m}}_{k=i-m} \right) = -b_s(x,y)$$

Donc b_s est antisymétrique.
(On aurait pu exploiter également le calcul matriciel et l'antisymétrie de J.)
• Soit $x \in E$ tel que $\forall\, y \in E,\ b_s(x,y) = 0$.

Si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, considérons $\overline{x} = \sum_{i=1}^{m} x_{i+m} e_i - \sum_{i=m+1}^{n} x_{i-m} e_i$.

$$\text{Alors } 0 = b_s(x,\overline{x}) = -\sum_{i=1}^{m} x_i(-x_{(i-m)+m}) + \sum_{i=m+1}^{n} x_i x_{(i+m)-m} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

On a une somme de carrés de réels (donc de nombres positifs) qui est nul, cela signifie que chaque nombre est nul. Donc $\forall\, i \in \mathbb{N}_n,\ x_i^2 = 0$, donc $x_i = 0$. Et $x = 0$.
Comme l'inclusion réciproque est vraie, $\{x \in E \mid \forall\, y \in E, b_s(x,y) = 0\} = \{0\}$.
Et donc b_s est non dégénérée.

$$\boxed{b_s \text{ est une forme symplectique sur } \mathbb{R}^n}$$

La forme symplectique b_s est appelée la *forme symplectique standard sur* $\mathbb{R}^n$.

15. Qu'avez-vous démontré avec les deux questions précédentes ?

Si $\mathbb{R}^n$ est un espace symplectique alors n est pair (question 12).
Réciproquement, si n est pair, il existe une forme symplectique sur $\mathbb{R}^n$, donc $\mathbb{R}^n$ est symplectique.

$$\boxed{\mathbb{R}^n \text{ est symplectique si et seulement si } n \text{ est pair.}}$$

C- Endomorphismes et matrices symplectiques réels

On appelle *endomorphisme symplectique* d'un espace vectoriel symplectique réel (E,ω) tout endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\forall (x,y) \in E^2, \quad \omega(u(x),u(y)) = \omega(x,y)$..
On note $\mathrm{Symp}_\omega(E)$ l'ensemble des endomorphismes symplectiques de l'espace symplectique (E,ω).
Soit $u \in \mathrm{Symp}_\omega(E)$ un endomorphisme symplectique de E.

16. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $E_\lambda(u) := \mathrm{Ker}\ (u - \lambda \mathrm{id}_E) \neq \{0\}$ et $E_\mu(u) := \mathrm{Ker}\ (u - \mu \mathrm{id}_E) \neq \{0\}$.
On suppose en outre que, $\lambda\mu \neq 1$. Montrer que les sous-espaces $E_\lambda(u)$ et $E_\mu(u)$ sont ω-orthogonaux, c'est-à-dire :

$$\forall x \in E_\lambda(u), \quad \forall y \in E_\mu(u), \quad \omega(x,y) = 0.$$

Soient $x \in E_\lambda(u)$ et $y \in E_\mu(u)$, comme u est symplectique :

$$\omega(x,y) = \omega(u(x),u(y)) = \omega(\lambda x, \mu y) = \lambda\mu\omega(x,y)$$

Donc $(1-\lambda)\omega(x,y) = 0$. Et donc, si $\lambda\mu \neq 1$, on a pour tout $(x,y) \in E_\lambda(u) \times E_\mu(u)$, $\omega(x,y) = 0$

$$\boxed{\text{Si } \lambda\mu \neq 1, \text{ alors les sous-espaces } E_\lambda(u) \text{ et } E_\mu(u) \text{ sont } \omega\text{-orthogonaux.}}$$

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$. On note M la matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

17. Montrer que u est un endomorphisme symplectique de l'espace symplectique standard $(\mathbb{R}^n, b_s)$ si et seulement si $M^\top JM = J$.

On a les équivalences (d'après le codage calculatoire matriciel dans la base canonique) :

$$\begin{aligned}
u \in\in \mathrm{Symp}_\omega(\mathbb{R}^n) &\iff \forall\, x,y \in \mathbb{R}^n b_s(u(x),u(y)) = b_s(x,y) \\
&\iff \forall\, X,Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})(MX)^T \times J \times (MY) = X^T \times J \times Y \\
&\iff \forall\, X,Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), X^T \times M^T JM \times Y = X^T \times J \times Y \\
&\iff \forall\, X,Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), X^T(M^T JM)Y = X^T JY \\
&\iff M^T \times J \times M = J
\end{aligned}$$

d'après la réponse à la question 1.(b).

$$\boxed{u \text{ est un endomorphisme symplectique de l'espace symplectique standard } (\mathbb{R}^n, b_s) \text{ ssi } M^\top JM = J.}$$

Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *symplectique* si $M^\top JM = J$.
On note $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symplectiques réelles dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_{2m}(\mathbb{R})$:

$$\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{Sp}_{2m}(\mathbb{R}) = \left\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid M^\top JM = J\right\}$$

18. Montrer que $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Soit $M \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$. Soit $X \in \mathrm{Ker}\, M$.
Alors $MX = 0_{n,1}$, et donc pour tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:

$$Y^T JX = Y^T(M^T JM)X = Y^T M^T J(MX) = Y^T M^Y J \times 0_{n,1} = 0$$

(où $0_{n,1}$ est ici la matrice colonne nulle).
Si X se note en blocs de taille m : $\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$, on a alors avec $Y \leftarrow \begin{pmatrix} X_2 \\ X_1 \end{pmatrix}$

$$0 = Y^T JX = \begin{pmatrix} X_2^T & X_1^T \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & -I_m \\ I_m & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1^T & X_2^T \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = X_1^T X_1 + X_2^T X_2$$

$$0 = \sum_{i=1}^{m} \left({}^{i}[X_1].\right)^2 + \sum_{i=1}^{m} \left({}^{i}[X_2].\right)^2$$

Or une somme de carrées de réels est nulle, si et seulement si chacun des termes est nul.
Donc X_1 est la matrice nulle de $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$ de même pour X_2. Ainsi $X = 0_{n,1}$.
Donc $\mathrm{Ker}\, M = \{0\}$ et M est une matrice inversible.

$$\boxed{\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})}$$

---

19. Montrer que $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, stable par transposition et contenant la matrice J.

Pour montrer que $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, il faut et sil suffit de montrer qu'il contient I_n, qu'il est stable pour la loi $\times$ et par passage à l'inverse.

- $I_n^T \times J \times I_n = J$, donc $I_n \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$
- Soit $A, B \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$. Notons que $(AB)^T = B^T A^T$. On a donc

$$(AB)^T \times J \times (AB) = B^T(A^T JA)B \underbrace{=}_{A \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})} B^T JB \underbrace{=}_{B \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})} J$$

  Donc $A \times B \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$.
- Soit $A \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$. On a vu que $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
  L'inverse de A^T est A^{-1^T} (car $(A^{-1})^T \times A^T = (A \times A^{-1})^T = I_n^T = I_n$.
  On a donc $(A^{-1})^T \times J \times A^{-1} \underbrace{=}_{A \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})} (A^T)^{-1} \times A^T JA \times A^{-1} = I_n \times J \times I_n = J$.
  Donc $A^{-1} \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$.

On a ainsi démontrer que $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}) < \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
Montrons maintenant que $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ est stable par transposition et contient la matrice J.
• Soit $M \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$, donc $M^T JM = J$ $(\star)$.
On aimerait montrer que $M^T \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$, calculer $(M^T)^T \times J \times M^T = MJM^T$.
On rappelle que $J^2 = -I_n$ et $J^T = -J$.
On a alors en multipliant $(\star)$ à gauche par J : $JM^T JM = J^2 = -I_n$,
puis par M à gauche : $MJM^T JM = -M$.
Or M est inversible, on peut multiplier par M^{-1} à droite : $MJM^T J = -I_n$
et enfin à droite par $-J$: $MJM^T \times (-J^2) = J$. Et donc $(M^T)^T \times J \times M^T = J$.
• Notons que $J^T = -J$ et que $J^2 = -I_n$ (produit par blocs), donc
$J^T \times J \times J = -J^2 \times J = +I_n \times J = J$. Donc $J \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$.

$$\boxed{\text{Donc } \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}) \text{ est un sous-groupe de } \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \text{, stable par transposition et contenant la matrice } J.}$$

Ce groupe est appelé *groupe symplectique réel d'ordre* $n = 2m$.

Soient A, B, C, D dans $\mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ et soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2m}(\mathbb{R})$ (décomposition par blocs).

20. Montrer que $M \in \mathrm{Sp}_{2m}(\mathbb{R})$ si et seulement si

$$A^\top C \text{ et } B^\top D \text{ sont symétriques et } A^\top D - C^\top B = I_m.$$

On applique la formule du produit par blocs, ici les calculs sont possibles car les blocs sont de bonne taille.

$$M^T \times J = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^T \times \begin{pmatrix} 0 & -I_m \\ I_m & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^T & C^T \\ B^T & D^T \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & -I_m \\ I_m & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C^T & -A^T \\ D^T & -B^T \end{pmatrix}$$

$$M^T \times J \times M = \begin{pmatrix} C^T & -A^T \\ D^T & -B^T \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C^T A - A^T C & C^T B - A^T D \\ D^T A - B^T C & D^T B - B^T D \end{pmatrix}$$

On a les équivalences

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2m}(\mathbb{R}) \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}) \Longleftrightarrow M^T J M = J$$

$$\Longleftrightarrow C^T A - A^T C = 0\,,\, C^T B - A^T D = -I_m\,,\, D^T A - B^T C = I_m\,,\, D^T B - B^T D = 0$$

car on peut identifier par blocs

Or $C^T A = (A^T C)^T$, donc $C^T A - A^T C = 0 \Leftrightarrow A^T C$ symétrique.

$D^T B = (B^T D)^T$, donc $D^T B - B^T D = 0 \Leftrightarrow B^T D$ symétrique.

$C^T B - A^T D = -(A^T D - C^T B) = -(D^T A - B^T C)^T$

donc $C^T B - A^T D = -I_m \Leftrightarrow D^T A - B^T C = I_m$.

Ainsi, on a l'équivalence :

$$\boxed{M \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}) \Longleftrightarrow A^T C \text{ et } B^T D \text{ symétriques et } D^T A - B^T C = I_m}$$

On note $\mathcal{C}_J = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid JM = MJ\}$ le commutant de la matrice J, c'est-à-dire l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui commutent avec J.

21. Montrer que, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\,(=\mathcal{M}_{2m}(\mathbb{R}))$,

$$M \in \mathcal{C}_J \Longleftrightarrow \exists (U,V) \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_m(\mathbb{R}), \quad M = \begin{pmatrix} U & -V \\ V & U \end{pmatrix}$$

Appliquons le même genre de raisonnement, en supposant que $M = \begin{pmatrix} U & W \\ V & Z \end{pmatrix}$ par blocs de matrice carrée d'ordre m.

On a alors

$$MJ = \begin{pmatrix} U & W \\ V & Z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & -I_m \\ I_m & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W & -U \\ Z & -V \end{pmatrix} \qquad JM = \begin{pmatrix} 0 & -I_m \\ I_m & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} U & W \\ V & Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -V & -Z \\ U & W \end{pmatrix}$$

On a donc (on peut identifier)

$$M \in \mathcal{C}_J \Longleftrightarrow M \times J = J \times M \Longleftrightarrow W = -V, -U = -Z, U = Z, -V = W \Longleftrightarrow W = -V, -U = -Z$$

$$\boxed{M \in \mathcal{C}_J \Longleftrightarrow \exists (U,V) \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_m(\mathbb{R}), \quad M = \begin{pmatrix} U & -V \\ V & U \end{pmatrix}}$$

D- Transvections symplectiques. Théorème de décomposition.

Soit (E, ω) un espace vectoriel symplectique de dimension $n = 2m$. On appelle *transvection* de E tout endomorphisme τ de E tel qu'il existe $\ell \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ et $a \in \ker(\ell)$ vérifiant $\forall x \in E, \quad \tau(x) = x + \ell(x)a$.

22. Transvection symplectique

(a) Soit $a \in E$ un vecteur non nul et $\lambda \in \mathbb{R}$ un réel. Montrer que l'application τ_a^λ définie par

$$\forall x \in E, \quad \tau_a^\lambda(x) = x + \lambda \omega(a,x) a$$

est une transvection de E et qu'il s'agit d'un endomorphisme symplectique de E.

Les applications τ_a^λ pour $a \in E \setminus \{0_E\}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ sont appelées *transvections symplectiques de E*.

Soit $\ell : E \to \mathbb{R}x \mapsto \lambda\omega(a,x)$.

Par linéarité à gauche de ω, $\ell \in \mathcal{L}(E,\mathbb{R}) = E^*$.

Puis, $\ell(a) = \lambda\omega(a,a) = 0$ d'après 3. ainsi $a \in \text{Ker } \ell$.

Comme, par ailleurs, $\tau_a^\lambda \in \mathcal{L}(E)$, on peut affirmer que τ_a^λ est une transvection de E.

Reste à montrer qu'elle est symplectique. Soient $x, y \in E$:

$$\begin{aligned}
\omega(\tau_a^\lambda(x), \tau_a^\lambda(y)) &= \omega(x + \lambda\omega(a,x)a, y + \lambda\omega(a,y)a) \\
&= \omega(x, y + \lambda\omega(a,y)a) + \lambda\omega(a,x)\omega(a, y + \lambda\omega(a,y)a) && \text{linéarité à gauche} \\
&= \omega(x,y) + \lambda\omega(a,y)\omega(x,a) + \lambda\omega(a,x)\omega(a,y) + \lambda^2\omega(a,x)\omega(a,y)\omega(a,a) && \text{linéarité à droite} \\
&= \omega(x,y) + \lambda\omega(a,y)\omega(x,a) + \lambda\omega(a,x)\omega(a,y) && \text{car } \omega(a,a) = 0 \\
&= \omega(x,y) - \lambda\omega(a,y)\omega(a,x) + \lambda\omega(a,x)\omega(a,y) && \text{car } \omega(x,a) = -\omega(a,x) \\
&= \omega(x,y)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Donc, pour tout } a \in E \setminus \{0\},\ \lambda \in \mathbb{R},\ \tau_a^\lambda \text{ est une transvection symplectique de } E.}$$

(b) Soit $a \in E$ un vecteur non nul et soient λ et μ des réels. Montrer que $\tau_a^\mu \circ \tau_a^\lambda = \tau_a^{\lambda+\mu}$.

Soit $x \in E$.

$$\begin{aligned}
(\tau_a^\mu \circ \tau_a^\lambda)(x) &= \tau_a^\mu(\overbrace{x + \lambda\omega(a,x)a}^{:=X}) = \overbrace{x + \lambda\omega(a,x)a}^{X} + \mu\omega(a, \overbrace{x + \lambda\omega(a,x)a}^{X})a \\
&= x + \lambda\omega(a,x)a + \mu\omega(a,x)a + \mu\lambda\omega(a,x)\omega(a,a)a = x + (\lambda+\mu)\omega(a,x)a = \tau_a^{\lambda+\mu}(x)
\end{aligned}$$

car $\omega(a,a) = 0$

$$\boxed{\tau_a^\mu \circ \tau_a^\lambda = \tau_a^{\lambda+\mu}}$$

(c) Soient $a \in E$ un vecteur non nul et λ un réel. Déduire de la question précédente que τ_a^λ est inversible et que sa réciproque $\left(\tau_a^\lambda\right)^{-1}$ est également une une transvection symplectique ?

D'après la question précédente, $\tau_a^{-\lambda} \circ \tau_a^\lambda = \tau_a^{-\lambda+\lambda} = \tau_a^0 = \text{id} = \tau_a^\lambda \circ \tau_a^{-\lambda}$.

$$\boxed{\text{Donc } \tau_a^\lambda \text{ est inversible, d'inverse } \tau_a^{-\lambda}, \text{ elle-même une transvection symplectique.}}$$

On se propose de montrer le théorème suivant :

> Tout endomorphisme symplectique de E peut s'écrire comme la composée d'au plus $2n = 4m$ transvections symplectiques de E :
> $\forall\, u \in \text{Symp}_\omega(E)$, $\exists\, p \in [\![1, 4m]\!]$ et $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_p$ des transvections symplectiques tq : $u = \tau_p \circ \cdots \circ \tau_2 \circ \tau_1$.

23. On commence par montrer le lemme suivant :
Pour tous vecteurs non nuls x et y de E, il existe une composée γ d'au plus deux transvections symplectiques telle que $\gamma(x) = y$.

On fixe x et y, non nuls, dans E.

(a) Supposons que $\omega(x,y) \neq 0$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\tau_{y-x}^\lambda(x) = y$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, on considère $a = y - x \neq 0$ (sinon $x = y$ et $\omega(x,y) = 0$ - absurde). Alors

$$\begin{aligned}
\tau_a^\lambda(x) &= x + \lambda\omega(y-x, x)(y-x) = x + \lambda\omega(y,x)(y-x) - \lambda\underbrace{\omega(x,x)}_{=0}(y-x) \\
&= (1 - \lambda\omega(y,x))x + \lambda\omega(y,x)y
\end{aligned}$$

En choisissant $\lambda \leftarrow \dfrac{1}{\omega(y,x)}$, on trouve $\tau_{y-x}^\lambda(x) = y$.

$$\boxed{\text{Si } \omega(x,y) \neq 0, \text{ alors il existe } \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } \tau_{y-x}^\lambda(x) = y}$$

(b) Supposons que $\omega(x,y)=0$. Montrer qu'il existe un vecteur $z\in E$ tel que $\omega(x,z)\neq 0$ et $\omega(y,z)\neq 0$.

Comme ω est non dégénérée, $\{t \mid \forall\, z\in E, \omega(t,z)=0\}=\{0\}$
et comme $x\neq 0$, $x\notin\{t \mid \forall\, z\in E, \omega(t,z)=0\}$
Par conséquent, il existe $z_x\in E$ tel que $\omega(x,z_x)\neq 0$.
De même, il existe $z_y\in E$ tel que $\omega(y,z_y)\neq 0$.
Si $\omega(y,z_x)\neq 0$, alors on prend $z\leftarrow z_x$ et on a $\omega(x,z)\neq 0$ et $\omega(y,z)\neq 0$.
sinon (donc $\omega(y,z_x)=0$), si $\omega(x,z_y)\neq 0$, on prend $z\leftarrow z_y$.
sinon (donc $\omega(x,z_y)=0$ et $\omega(y,z_x)=0$), on prend $z\leftarrow z_x+z_y$,
alors par linéarité de ω : $\omega(x,z)=\underbrace{\omega(x,z_x)}_{\neq 0}+\underbrace{\omega(x,z_y)}_{=0}\neq 0$ et $\omega(y,z)=\omega(y,z_y)\neq 0$.

$$\boxed{\text{On a donc assurément l'existence de } z\in E \text{ tel que } \omega(x,z)\neq 0 \text{ et } \omega(y,z)\neq 0.}$$

(c) Montrer le lemme cité ci-dessus.

Soit $(x,y)\in E^2$,
— Si $\omega(x,y)\neq 0$, alors il existe une transvection symplectique $(\tau_{y-x}^{\omega(y,x)^{-1}})$ telle que $\tau(x)=y$, d'après 21.(a)
— Si $\omega(x,y)=0$, alors il existe $z\in E$ tel que $\omega(x,z)\neq 0$ et $\omega(z,y)=-\omega(y,z)\neq 0$ d'après 21.(b), donc deux transvections symplectiques τ_1 et τ_2 telles $\tau_1(x)=z$ et $\tau_2(z)=y$.
Donc $(\tau_2\circ\tau_1)(x)=y$.

$$\boxed{\text{Donc pour } x \text{ et } y \text{ dans } E, \text{ il existe } \gamma \text{ composée d'une ou deux transvection(s) tel que } \gamma(x)=y.}$$

---

24. Le théorème
Soit $u\in \mathrm{Symp}_\omega(E)$ un endomorphisme symplectique de E. Soit $e_1\in E$ un vecteur non nul.

(a) Justifier l'existence de $f_1\in E$, non colinéaire à e_1, tel que $\omega(e_1,f_1)=1$.

Comme en 21.(b), si $\forall\, z\in E$, $\omega(e_1,z)=0$, alors $e_1\in\{t \mid \forall\, z\in E, \omega(t,z)=0\}=\{0\}$ (ω non dégénérée), donc $e_1=0$. Absurde.
Dons il existe $z\in E$ tel que $\omega(e_1,z)\neq 0$.
Soit $f_1=\dfrac{1}{\omega(e_1,z)}z$, alors (par linéarité à droite) :

$$\omega(e_1,f_1)=\omega\left(e_1,\frac{1}{\omega(e_1,z)}z\right)=\frac{1}{\omega(e_1,z)}\omega(e_1,z)=1$$

$$\boxed{\text{Donc, il existe } f_1(\neq 0, \text{ nécessairement) tel que } \omega(e_1,f_1)=1.}$$

On pose $P=\mathrm{Vect}\,(e_1,f_1)$ le plan vectoriel engendré par les vecteurs e_1 et f_1. On va montrer l'existence d'une composée δ d'au plus quatre transvections symplectiques de E telle que

$$\begin{cases}\delta\left(u\left(e_1\right)\right)=e_1\\ \delta\left(u\left(f_1\right)\right)=f_1\end{cases}\qquad (III.1)$$

(b) Pourquoi existe-t-il une composée δ_1 d'au plus deux transvections symplectiques de E telle que $\delta_1\left(u\left(e_1\right)\right)=e_1$?

---

e_1 est non nul, $u(e_1)$ est également non nul
(sinon $e_1\in\mathrm{Ker}\ u=\{0\}$ car u inversible et donc $e_1=0$, faux).
Donc d'après la question 21 avec $x\leftarrow u(e_1)$ et $y\leftarrow e_1$ (et $\delta_1=\gamma$) :

$$\boxed{\text{il existe } \delta_1 \text{ composée d'au plus deux transvections symplectiques de } E \text{ telle que } \delta_1\left(u\left(e_1\right)\right)=e_1.}$$

(c) Notons $\tilde{f}_1$ le vecteur $\delta_1(u(f_1))$. Montrer qu'il existe une composée δ_2 d'au plus deux transvections symplectiques de E telle que $\delta_2(e_1) = e_1$ et $\delta_2\left(\tilde{f}_1\right) = f_1$

On a
$$\omega(e_1, \tilde{f}_1) = \omega(\delta_1(u(e_1)), \delta_1(u(f_1))) = \omega(u(e_1), u(f_1)) = \omega(e_1, f_1) = 1$$
car δ_1 et $u \in \mathrm{Symp}_\omega(E)$.

• Supposons que $\omega(\tilde{f}_1, f_1) \neq 0$.
avec $\lambda \leftarrow -\frac{1}{\omega(\tilde{f}_1, f_1)}$, on a $\tau^\lambda_{f_1-\tilde{f}_1}(\tilde{f}_1) = f_1$ (comme en 23.(a)

De plus, par linéarité : $\omega(f_1 - \tilde{f}_1, e_1) = \omega(f_1, e_1) - \omega(\tilde{f}_1, e_1) = -1 + 1 = 0$, donc
$\tau^\lambda_{f_1-\tilde{f}_1}(e_1) = e_1 - \lambda\omega(f_1 - \tilde{f}_1, e_1)(f_1 - \tilde{f}_1) = e_1$.

Ainsi, avec $\delta_2 = \tau^\lambda_{f_1-\tilde{f}_1}$, on a $\delta_2(e_1) = e_1$ et $\delta(\tilde{f}_1) = f_1$.

• Supposons que $\omega(\tilde{f}_1, f_1) = 0$.

Montrons d'abord qu'il existe $z \in E$, tel que $\omega(\tilde{f}_1, z) \neq 0$, $\omega(f_1, z) \neq 0$ et $\omega(e_1, z) = 1$.

Notons d'abord que $\omega(\tilde{f}_1, \cdot)$, $\omega(f_1, \cdot)$ et $\omega(e_1, \cdot)$ sont des formes linéaires.

Donc leurs noyaux sont des hyperplans (associés à des formes linéaires non nulles) de dimension $n - 1$.

Si z n'existait pas alors pour tout $x \in E$, $x \in \mathrm{Ker}\ \omega(\tilde{f}_1, \cdot) \cup \mathrm{Ker}\ \omega(f_1, \cdot) \cup \mathrm{Ker}\ \omega(e_1, \cdot)$,
la réunion de ces hyperplans donnerait donc E, un espace vectoriel,
il faudrait alors que la réunion soit égale à l'un de ces espaces vectoriels,
et ainsi, l'un de ces hyperplans serait E, ce qui est faux.

Ainsi, un tel z existe.

Prenons $\lambda_1 \leftarrow -\frac{1}{\omega(\tilde{f}_1, z)}$, on a comme précédemment : $\tau^{\lambda_1}_{z-\tilde{f}_1}(\tilde{f}_1) = z$.

De même avec $\lambda_2 \leftarrow \frac{1}{\omega(f_2, z)}$, on a comme précédemment : $\tau^{\lambda_2}_{f_1-z}(z) = f_1$.

Enfin, avec $\delta_2 = \tau^{\lambda_2}_{f_1-z} \circ \tau^{\lambda_1}_{z-\tilde{f}_1}$, composée de deux transvections symplectiques et transforme $\tilde{f}_1 \to z \to f_1$,
$$\omega(z - \tilde{f}_1, e_1) = \omega(z, e_1) - \omega(\tilde{f}_1, e_1) = -1 + 1 = 0, \text{ donc } \tau^{\lambda_1}_{z-\tilde{f}_1}(e_1) = e_1$$
$$\omega(f_1 - z, e_1) = \omega(f_1, e_1) - \omega(z, e_1) = -1 + 1 = 0, \text{ donc } \tau^{\lambda_2}_{f_1-z}(e_1) = e_1$$
Alors $\delta_2(e_1) = e_1$

$\boxed{\text{il existe } \delta_2 \text{ composée d'au plus deux transvections symplectiques de } E \text{ telle que } \delta_2(e_1) = e_1 \text{ et } \delta_2\left(\tilde{f}_1\right) = f_1.}$

La composée $\delta = \delta_2 \circ \delta_1$ d'au plus quatre transvections symplectiques vérifie les conditions (III.1).
Cela n'est pas demandé, mais notons bien que
$\delta(u(e_1)) = \delta_2(\delta_1(u(e_1))) = \delta_2(e_1) = e_1$ *et* $\delta(u(f_1)) = \delta_2(\delta_1(u(f_1)) = \delta_2(\tilde{f}_1) = f_1$.

On pose $v = \delta \circ u$.

(d) Montrer que P est stable par v et déterminer $v_{|P}$, endomorphisme induit par v sur P.

$P = \mathrm{vect}(e_1, f_1)$. Pour tout $x \in P$, $\exists\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tel que $x = \alpha e_1 + \beta f_1$.
donc, par linéarité : $v(x) = \alpha v(e_1) + \beta v(f_1) = \alpha\delta(u(e_1)) + \beta\delta(u(f_1)) = \alpha e_1 + \beta f_1 = x$

$$\boxed{\text{Ainsi } P \text{ est stable par } v \text{ et mieux : } v_{|P} = \mathrm{id}_{|P}.}$$

(e) Montrer que P^ω est stable par v.

Soit $x \in P^\omega$. Donc $\forall\ y \in P$, $\omega(x, y) = 0$.
On a alors, pour tout $y \in P$:
$$\omega(v(x), y) \underbrace{=}_{y=v(y)} \omega(v(x), v(y)) \underbrace{=}_{v \in \mathrm{Symp}_\omega(E)} \omega(x, y) = 0$$
Donc $v(x) \in P^\omega$.

$$\boxed{P^\omega \text{ est stable par } v.}$$

(f) Montrer que la restriction $\omega_{|P^\omega}$ de ω à $P^\omega \times P^\omega$ munit P^ω d'une structure d'espace symplectique et que l'endomorphisme v_{P^ω} induit par v sur P^ω est un endomorphisme symplectique.

En question 9.,on a vu que $\omega_{|F}$ est définie une forme symplectique sur F ssi $F \oplus F^\omega = E$.
Ici, on a $F = P^\omega$.
Par ailleurs, pour des raisons de dimensions : $\dim F + \dim F^\omega = \dim E$, donc il suffit de démontrer que la somme est directe ; avec $F \leftarrow P^\omega$.
Notons d'abord que $P = (P^\omega)^\omega$.

Soit $x \in P$.

En effet, par définition de $P^\omega = \{a \mid \forall\ x \in P, \omega(a,x) = 0\}$: $\forall\ a \in P^\omega$, $\omega(a,x) = 0$.
Donc, pour tout $a \in P^\omega$, $\omega(x,a) = -\omega(a,x) = 0$. Donc $x \in (P^\omega)^\omega$.
Ainsi $P \subset (P^\omega)^\omega$.

Et pour des raisons de dimensions : $\dim P = \dim E - \dim P^\omega = \dim(P^\omega)^\omega$.

Donc $P = (P^\omega)^\omega$.

Soit $x \in P^\omega \cap (P^\omega)^\omega = P^\omega \cap P$.

Alors $x \in P$, donc il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tel que $x = \alpha e_1 + \beta f_1$.
On a donc (par bilinéarité de ω) et comme $x \in P^\omega$:

$$0 = \omega(x, e_1) = \alpha\omega(e_1, e_1) + \beta\omega(e_1, f_1) = \beta \quad \text{et} \quad 0 = \omega(x, f_1) = \alpha\omega(f_1, e_1) + \beta\omega(f_1, f_1) = -\alpha$$

car $\omega(e_1, e_1) = \omega(f_1, f_1) = 0$. Donc $x = 0$.

$$\boxed{\text{Donc } (P^\omega, \omega_{|P^\omega}) \text{ est un espace symplectique.}}$$

On a alors, puisque v est un endomorphisme symplectique de E

$$\forall\ x, y \in P^\omega, \quad \omega_{|P^\omega}(v_{|P^\omega}(x), v_{|P^\omega}(y)) = \omega(v(x), v(y)) = \omega(x,y) = \omega_{|P^\omega}(x,y)$$

$$\boxed{\text{Donc } v_{P^\omega} \text{ induit par } v \text{ sur } P^\omega \text{ est un endomorphisme symplectique de } P^\omega.}$$

(g) À l'aide de ce qui précède, montrer le théorème annoncé.

On démontre le résultat par récurrence sur $\dim E$, plus exactement sur $m (= \frac{1}{2} \dim E)$.

Posons $\mathcal{P}_m$: « $\forall\ E$ symplectique de dimension $2m$, et $\forall\ u \in \mathrm{Symp}_\omega(E)$, $\exists\ p \in [\![1, 4m]\!]$ et $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_p$ des transvections symplectiques tq : $u = \tau_p \circ \cdots \circ \tau_2 \circ \tau_1$. »

— Supposons que $\dim E = 2$.
On trouve, comme en 24.(a), deux vecteurs e_1 et f_1 non colinéaires, donc (e_1, f_1) libre et base de E ($\dim E = 2$).
On a ensuite, comme en (c), δ composée de 4 transvections symplectiques tel que $III.1.$.
Puis, on a vu en (d) que $\delta \circ u = \mathrm{id}_E$, donc $u = \delta^{-1}$.
Or l'inverse des transvections symplectiques est une transvection simplectique (22.(c)).
L'inverse de la composition de 4 applications est la compositions (dans l'ordre inversé) des 4 inverses.
Ainsi $u = \delta^{-1}$ est la composée de 4 transvections simplectiques.
Donc $\mathcal{P}_1$ est vraie.

— Soit $m \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}_m$ est vérifié.
Soit E symplectique de dimension $2(m+1) = 2m+2$.
On peut alors créer comme avec les questions (a) à (e) un plan P stable par u.

Comme $v_{|P} = (\delta \circ u)_{|P} = \mathrm{id}_E$, alors comme pour prouver $\mathcal{P}_1$,
$u_{|P}$ est composée de (au plus) 4 transvections symplectiques de type τ_a^λ avec $a \in P$.

Par ailleurs, l'espace P^ω est également stable par u.

Comme $a \in P$, $\forall\ y \in P^\omega$, $\tau_a^\lambda(y) = y + \lambda\omega(a,y)a = y$.
Et $\dim P^\omega = \dim E - 2 = 2m$. On applique $\mathcal{P}_m$ à P^ω.
Donc il existe $p \in \mathbb{N}_{4m}$ tel que $u_{|P^\omega} = \tau_p \circ \cdots \circ \tau_1$.
Là encore, les transvections $\tau_p, \tau_{p-1}, \ldots \tau_1$ qui composent $u_{|P^\omega}$ peuvent se prolonger sur E de manière à ce que $\forall\ i \in \mathbb{N}_p$, $\tau_i(e_1) = e_1$ et $\tau_i(f_1) = f_1$. On trouve donc sur E.

Elles commutent avec les 4 premières transvections symplectiques.

Donc u est le produit d'au plus $p+4 \leqslant 4m+4 = 4(m+1)$ transvections symplectiques.
Ainsi $\mathcal{P}_{m+1}$ est vraie.

La récurrence est démontrée.

$$\boxed{\forall\ u \in \mathrm{Symp}_\omega(E), \exists\ p \in [\![1, 4m]\!], \exists\ \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_p \text{ des transvections symplectiques tq : } u = \tau_p \circ \cdots \circ \tau_2 \circ \tau_1.}$$
