Devoir surveillé n°7

Sujet donné le samedi 25 mars 2023, 4h.

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

La notation tiendra particulièrement compte de **la qualité de la rédaction, la précision des raisonnements et l'énoncé des formules utilisées. Les réponses aux questions seront numérotées et séparées par un trait horizontal. Les résultats essentiels devront être encadrés ou soulignés.**

BON TRAVAIL

Contraintes symplectiques linéaires

Notations

- Dans tout le problème, n et m désignent des entiers naturels non nuls.
- On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille $n\times n$ à coefficients réels et I_n la matrice identité dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
  Pour tous entiers naturels non nuls p et q, on note $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à p lignes et q colonnes à coefficients réels. Ainsi, $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices colonnes à n lignes et $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- On note $A^\top$ la transposée d'une matrice A.
- On note $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ le groupe linéaire réel d'ordre n (matrices carrées inversibles dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).
- On note, pour tout entier $i \in \mathbb{N}_n$, E_i le vecteur de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ (matrice-colonne) ayant un unique 1 en ligne i et 0 ailleurs. On a donc, pour tout $k \in \mathbb{N}_n$, ${}^k[E_i]. = \delta_{i,k}$ *(symbole de Kronecker).*
  Ainsi, la famille $\mathcal{B} = (E_1, E_2, \dots E_n)$ est la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
- Si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, on note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E et $\mathcal{L}(E,\mathbb{R}) = E^*$ l'ensemble des applications linéaires de E dans $\mathbb{R}$ (i.e. des formes linéaires).

Objectif

Ce problème a pour objectif de définir la notion d'espace symplectique réel et d'étudier certaines propriétés des endomorphismes symplectiques de $\mathbb{R}^n$.

Préliminaires

1. Equivalences calculatoires.
   (a) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour tout $i, j \in \mathbb{N}_n$, évaluer $E_i^T \times A \times E_j$ en fonction des coefficients de A que l'on pourra noter ${}^i[A]_j$ ou $[A]_{i,j}$.
   (b) En déduire l'équivalence pour toutes matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:
   $$[\forall\ (X,Y) \in \left(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\right)^2,\ X^TAY = X^TBY] \qquad \Longleftrightarrow \qquad A = B$$
2. Formes bilinéaires.
   Soit F un $\mathbb{R}$espace-vectoriel. Soit $f : F^2 \to \mathbb{R}$.
   On dit que f est une forme bilinéaire sur l'espace vectoriel F si elle vérifie les propriétés :
   $$\forall\ (x,y,z) \in E^3, \lambda \in \mathbb{K}, \quad f(x+\lambda y, z) = f(x,z) + \lambda f(y,z) \text{ et } f(x, y+\lambda z) = f(x,y) + \lambda f(x,z)$$
   Lesquelles, parmi les applications suivantes, sont bilinéaires :
   $$f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto x \times y \qquad f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto x+y \qquad f_3 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto \sum_{i=1}^n x_i y_{n-i}$$
   On attend une démonstration (même courte)

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n.
On appelle *forme symplectique sur* E toute application ω de E^2 dans $\mathbb{R}$ qui vérifie les trois propriétés suivantes :

- bilinéarité (voir préliminaires)
- antisymétrie : $\forall (x,y) \in E^2,\ \omega(x,y) = -\omega(y,x)$;
- non dégénérescence : $\{x \in E \mid \forall y \in E,\ \omega(x,y) = 0\} = \{0_E\}$.

Un *espace vectoriel symplectique réel* (E, ω) est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie E muni d'une forme symplectique ω sur E.

A- Espace vectoriel symplectique réel

Soit E un espace veectoriel de dimension finie notée n.

3. Montrer que, si ω est une forme symplectique sur E, alors pour tout vecteur x de E, $\omega(x,x)=0$.

Pour tout sous-espace vectoriel F d'un espace symplectique (E,ω), on appelle ω-*orthogonal* de F, l'ensemble noté F^ω :

$$F^\omega = \{x \in E \mid \forall y \in F,\ \omega(x,y)=0\}$$

Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace symplectique (E,ω).

4. Justifier que F^ω est un sous-espace vectoriel de E.
5. Le sous-espace F^ω est-il nécessairement en somme directe avec F ?

Pour tout $x \in E$, on note $\omega(x,\cdot)$ l'application linéaire de E dans $\mathbb{R}$, $y \mapsto \omega(x,y)$ et on considère

$$d_\omega : \left| \begin{array}{ccc} E & \to & \mathcal{L}(E,\mathbb{R}) \\ x & \mapsto & \omega(x,\cdot) \end{array} \right.$$

6. Montrer que d_ω est un isomorphisme.

Pour $\ell \in \mathcal{L}(E,\mathbb{R})$, on note $\ell|_F$ la restriction de ℓ à F.

7. Montrer que l'application de restriction $r_{|F} : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E,\mathbb{R}) & \to & \mathcal{L}(F,\mathbb{R}) \\ \ell & \mapsto & \ell|_F \end{array} \right.$ est surjective.
8. Préciser le noyau de $r_{|F} \circ d_\omega$. En déduire que $\dim F^\omega = \dim E - \dim F$.
9. Montrer que la restriction ω_F de ω à F^2 définit une forme symplectique sur F si et seulement si $F \oplus F^\omega = E$.

B- Structure symplectique standard sur $\mathbb{R}^n$

On suppose qu'il existe une forme symplectique ω sur $\mathbb{R}^n$ et on note $\Omega \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice définie par

$$\Omega = (\omega(e_i, e_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$$

où $(e_1,\dots,e_n)$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

10. Montrer que
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \quad \omega(x,y) = X^\top \Omega Y$$
où X et Y désignent les colonnes des coordonnées de x et y dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
11. En déduire que Ω est antisymétrique (i.e. $\Omega^T = -\Omega$) et inversible.
12. On admet qu'il existe une application $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ (non linéaire !) vérifiant pour toutes matrices A et B :
    — $\det A \neq 0$ si et seulement si A inversible
    — $\det(A \times B) = \det A \times \det B$
    — $\det(A^T) = \det A$
    (a) Montrer que $\det(I_n) = 1$ puis $\det(-I_n) \in \{-1, 1\}$
    (b) On admet que $\det(-I_n) = (-1)^n$. Montrer que l'existence de Ω impose à n d'être pair.

Jusqu'à la fin du problème, on suppose que n est pair et on note $m \in \mathbb{N}^*$ l'entier naturel tel que $n = 2m$. On note $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\ (= \mathcal{M}_{2m}(\mathbb{R}))$ la matrice définie par blocs par

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -I_m \\ I_m & 0 \end{pmatrix}$$

et on note j l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à J.

On définit, pour $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$ (écritures dans la base canonique de E) : $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.

13. Montrer que pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$:
$$\langle x, u(y)\rangle = X^T \times M \times Y$$
où X, Y sont les matrices (colonnes) de x et y dans la base canonique et M est la matrice de u dans la base canonique.

14. Montrer que l'application $b_s : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \langle x, j(y) \rangle \end{array} \right.$ est une forme symplectique sur $\mathbb{R}^n$.

La forme symplectique b_s est appelée la *forme symplectique standard sur* $\mathbb{R}^n$.

15. Qu'avez-vous démontré avec les questions 12. et 14. ?

C- Endomorphismes et matrices symplectiques réels

On appelle *endomorphisme symplectique* de (E,ω) tout endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad \omega(u(x), u(y)) = \omega(x,y).$$

On note $\mathrm{Symp}_\omega(E)$ l'ensemble des endomorphismes symplectiques de l'espace symplectique (E,ω).

Soit $u \in \mathrm{Symp}_\omega(E)$ un endomorphisme symplectique de E.

16. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $E_\lambda(u) := \mathrm{Ker}\ (u - \lambda \mathrm{id}_E) \neq \{0\}$ et $E_\mu(u) := \mathrm{Ker}\ (u - \mu \mathrm{id}_E) \neq \{0\}$.
On suppose en outre que, $\lambda\mu \neq 1$. Montrer que les sous-espaces $E_\lambda(u)$ et $E_\mu(u)$ sont ω-orthogonaux, c'est-à-dire :

$$\forall x \in E_\lambda(u), \quad \forall y \in E_\mu(u), \quad \omega(x,y) = 0.$$

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$. On note M la matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

17. Montrer que u est un endomorphisme symplectique de l'espace symplectique standard $(\mathbb{R}^n, b_s)$ si et seulement si $M^\top J M = J$.

Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *symplectique* si $M^\top J M = J$.
On note $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symplectiques réelles dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_{2m}(\mathbb{R})$:

$$\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{Sp}_{2m}(\mathbb{R}) = \left\{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid M^\top J M = J \right\}$$

18. Montrer que $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
19. Montrer que $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, stable par transposition et contenant la matrice J.
Ce groupe est appelé *groupe symplectique réel d'ordre* $n = 2m$.

Soient A, B, C, D dans $\mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ et soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2m}(\mathbb{R})$ (décomposition par blocs).

20. Montrer que $M \in \mathrm{Sp}_{2m}(\mathbb{R})$ si et seulement si

$$A^\top C \text{ et } B^\top D \text{ sont symétriques et } A^\top D - C^\top B = I_m.$$

On note $\mathcal{C}_J = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid JM = MJ\}$ le commutant de la matrice J, c'est-à-dire l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui commutent avec J.

21. Montrer que, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\,(= \mathcal{M}_{2m}(\mathbb{R}))$,

$$M \in \mathcal{C}_J \Longleftrightarrow \exists (U,V) \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_m(\mathbb{R}), \quad M = \begin{pmatrix} U & -V \\ V & U \end{pmatrix}$$

D- Transvections symplectiques. Théorème de décomposition.

Soit (E,ω) un espace vectoriel symplectique de dimension $n = 2m$.
On appelle *transvection* de E tout endomorphisme τ de E tel qu'il existe $\ell \in \mathcal{L}(E,\mathbb{R})$ et $a \in \ker(\ell)$ vérifiant

$$\forall x \in E, \quad \tau(x) = x + \ell(x)a.$$

22. Transvection symplectique
    (a) Soit $a \in E$ un vecteur non nul et $\lambda \in \mathbb{R}$ un réel. Montrer que l'application τ_a^λ définie par

    $$\forall x \in E, \quad \tau_a^\lambda(x) = x + \lambda\omega(a,x)a$$

    est une transvection de E et qu'il s'agit d'un endomorphisme symplectique de ce même espace.

Les applications τ_a^λ pour $a \in E \setminus \{0_E\}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ sont appelées *transvections symplectiques de E*.

(b) Soit $a \in E$ un vecteur non nul et soient λ et μ des réels. Montrer que $\tau_a^\mu \circ \tau_a^\lambda = \tau_a^{\lambda+\mu}$.

(c) Soient $a \in E$ un vecteur non nul et λ un réel. Déduire de la question précédente que τ_a^λ est inversible et que sa réciproque $\left(\tau_a^\lambda\right)^{-1}$ est également une transvection symplectique ?

On se propose de montrer le théorème suivant :

> Tout endomorphisme symplectique de E peut s'écrire comme la composée d'au plus $2n = 4m$ transvections symplectiques de E :
> $\forall\, u \in \mathrm{Symp}_\omega(E)$, $\exists\, p \in [\![1, 4m]\!]$ et $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_p$ des transvections symplectiques tq : $u = \tau_p \circ \cdots \circ \tau_2 \circ \tau_1$.

23. On commence par montrer le lemme suivant :
Pour tous vecteurs non nuls x et y de E, il existe une composée γ d'au plus deux transvections symplectiques de E telle que $\gamma(x) = y$.

On fixe x et y, non nuls, dans E.

(a) Supposons que $\omega(x, y) \neq 0$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\tau_{y-x}^\lambda(x) = y$.

(b) Supposons que $\omega(x, y) = 0$. Montrer qu'il existe un vecteur $z \in E$ tel que $\omega(x, z) \neq 0$ et $\omega(y, z) \neq 0$.

(c) Montrer le lemme cité ci-dessus.

24. Le théorème
Soit $u \in \mathrm{Symp}_\omega(E)$ un endomorphisme symplectique de E.
Soit $e_1 \in E$ un vecteur non nul.

(a) Justifier l'existence de $f_1 \in E$, non colinéaire à e_1, tel que $\omega\left(e_1, f_1\right) = 1$.
On pose $P = \mathrm{Vect}\left(e_1, f_1\right)$ le plan vectoriel engendré par les vecteurs e_1 et f_1. On va montrer l'existence d'une composée δ d'au plus quatre transvections symplectiques de E telle que

$$\begin{cases} \delta\left(u\left(e_1\right)\right) = e_1 \\ \delta\left(u\left(f_1\right)\right) = f_1 \end{cases} \qquad (III.1)$$

(b) Pourquoi existe-t-il une composée δ_1 d'au plus deux transvections symplectiques de E telle que $\delta_1\left(u\left(e_1\right)\right) = e_1$?

(c) Notons $\tilde{f}_1$ le vecteur $\delta_1\left(u\left(f_1\right)\right)$. Montrer qu'il existe une composée δ_2 d'au plus deux transvections symplectiques de E telle que

$$\begin{cases} \delta_2\left(e_1\right) = e_1 \\ \delta_2\left(\tilde{f}_1\right) = f_1 \end{cases}$$

On pourra adapter la démonstration du lemme précédent.

La composée $\delta = \delta_2 \circ \delta_1$ d'au plus quatre transvections symplectiques vérifie les conditions (III.1).
On pose $v = \delta \circ u$.

(d) Montrer que P est stable par v et déterminer $v_{|P}$, endomorphisme induit par v sur P.

(e) Montrer que P^ω est stable par v.

(f) Montrer que la restriction $\omega_{|P^\omega}$ de ω à $P^\omega \times P^\omega$ munit P^ω d'une structure d'espace symplectique et que l'endomorphisme v_{P^ω} induit par v sur P^ω est un endomorphisme symplectique.

(g) À l'aide de ce qui précède, montrer le théorème annoncé.