Devoir surveillé n°5

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

La notation tiendra particulièrement compte de **la qualité de la rédaction, la précision des raisonnements et l'énoncé des formules utilisées. Les réponses aux questions seront numérotées et séparées par un trait horizontal. Les résultats essentiels devront être encadrés ou soulignés.**

BON TRAVAIL

Inégalités de convexité et entropie

On définit dans tout le sujet $L : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0\ , \\ -x \ln x & \text{si } x > 0\ . \end{cases}$

Plus généralement, on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $L_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0\ , \\ -x^{n+1} \ln x & \text{si } x > 0\ . \end{cases}$

I Étude de fonctions

I.1. Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < b$.
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.
Le but de cette question est de démontrer le résultat suivant :

f est convexe sur $[a,b]$ si et seulement si f' est croissante sur $]a,b[$.

(a) Supposons que f' est croissante sur $]a,b[$. Soient $x < y < z$ fixés dans $[a,b]$. En utilisant la formule des accroissements finis, montrer que

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$$

Que vient-on de démontrer pour f ?

(b) Réciproquement, supposons que f est convexe sur $[a,b]$. Soient $a < x < y < b$. Justifier que, pour tout $(s,t) \in]x,y[^2$,

$$\frac{f(s)-f(x)}{s-x} \leqslant \frac{f(t)-f(y)}{t-y}$$

puis en déduire que f' est croissante sur $]a,b[$ en regardant l'information qui se déduit de l'inégalité ci-dessus lorsque s et t se rapprochent respectivement de x et y.

I.2. (a) Montrer que L est continue sur $[0,1]$.
Est-elle dérivable en 0 ? Que peut-on en déduire concernant la courbe représentative $\mathcal{C}$ de L ?

(b) Étudier les variations de L.
Étudier la concavité de L.

(c) Donner une équation de la tangente T_1 à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1.
Quelle est la position relative de $\mathcal{C}$ par rapport à T_1 ?
Tracer $\mathcal{C}$ en faisant apparaître au moins trois tangentes remarquables.

I.3. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé.

(a) Exprimer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, la dérivée k-ième de la fonction logarithme en x : $\ln^{(k)}(x)$. On pourra conjecturer une formule puis la prouver par récurrence.

(b) Justifier que L_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,1]$ et montrer que, pour tout $p \in [\![0,n]\!]$,

$$\forall x \in]0,1]\ ,\ L_n^{(p)}(x) = \frac{(n+1)!}{(n+1-p)!} x^{n+1-p} \ln x + x^{n+1-p} \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p}{k} \frac{(-1)^{p-k}(n+1)!(p-k-1)!}{(n+1-k)!}\ .$$

(c) En déduire que L_n est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[0,1]$. On précisera la valeur de la dérivée k-ème en 0 pour $k \in [\![1,n]\!]$.

(d) Exprimer $L_n^{(n)}$ comme une combinaison linéaire L et de $\mathrm{Id}_{]0,1]}$ (dont on ne cherchera pas à simplifier les coefficients). Est-ce que $L_n^{(n)}$ est dérivable en 0 ?

II Étude d'une suite récurrente

Soit $a \in [0,1]$. L'étude des variations de L a permis de remarquer que $L([0,1]) \subset [0,1]$ ce qui permet de considérer la suite récurrente u définie par

$$u_0 = a \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}\ ,\ u_{n+1} = L(u_n)$$

II.1. Résoudre l'équation $L(x) = x$.

II.2. Justifier que $L(]0, e^{-1}]) \subset]0, e^{-1}]$ et que $\forall x \in [0, e^{-1}]$, $L(x) \geqslant x$.

II.3. En déduire que, si $a \in]0, e^{-1}]$, alors u est monotone puis qu'elle converge et déterminer sa limite.

II.4. Justifier que $L(]e^{-1}, 1[) \subset]0, e^{-1}]$ puis en déduire la convergence de u et sa limite lorsque $a \in]e^{-1}, 1[$.

II.5. Étudier la convergence de u et sa limite éventuelle pour les valeurs de a n'ayant pas encore été étudiées.

II.6. Soit $\alpha \in]0,1[$ tel que $a \in \left[e^{-1} - \frac{\alpha}{2}e^{-1}, e^{-1} + \frac{\alpha}{2}e^{-1}\right]$.

(a) Déterminer, pour $t \in \left[-\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}\right]$, un majorant indépendant de t et de α de l'expression $\frac{1}{1+t}$.

En déduire que, pour tout $u \in \left[-\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}\right]$, $|\ln(1+u)| \leqslant 2|u|$.

(b) Montrer que, pour tout $x \in \left[e^{-1} - \frac{\alpha}{2}e^{-1}, e^{-1} + \frac{\alpha}{2}e^{-1}\right]$,

$$|L'(x)| = |\ln(1+et)| \leqslant \alpha$$

où l'on définira t de manière à ce que $x = e^{-1} + t$.

En déduire que, $\forall x \in \left[e^{-1} - \frac{\alpha}{2}e^{-1}, e^{-1} + \frac{\alpha}{2}e^{-1}\right]$, $|L(x) - e^{-1}| \leqslant \alpha|x - e^{-1}|$.

(c) En déduire que,

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ |u_n - e^{-1}| \leqslant \alpha^n |a - e^{-1}|$$

Quel résultat antérieur cette inégalité permet-elle de retrouver ?

(d) Soient $\varepsilon > 0$ et $a \in \left]\frac{e^{-1}}{2}, \frac{3e^{-1}}{2}\right[$. À partir de quel entier N ne dépendant que de ε et a, peut-on affirmer que pour tout $n \geqslant N$, $|u_n - e^{-1}| \leqslant \varepsilon$?

III Étude d'une suite implicite

Notons g la fonction définie pour tout $x \in]0,1]$ par $g(x) = -\frac{\ln x}{e}$.

III.1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, L_n admet un unique maximum global dont on notera x_n et y_n l'abscisse et l'ordonnée.

III.2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, (x_n, y_n) appartient à la courbe représentative de la fonction g.

III.3. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, h_n la fonction définie pour tout $x \in [0,1]$ par $h_n(x) = L(x) - x^n$.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En étudiant le signe de h_n'', déterminer les variations de h_n et établir qu'il existe une unique solution à l'équation d'inconnue $x \in]0,1]$

$$L(x) = x^n$$

On notera α_n cette unique solution.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier que $h_{n+1} \geqslant h_n$ sur $]0,1[$ puis, en évaluant en α_{n+1}, obtenir la monotonie de la suite (α_n) et conclure à sa convergence.

Posons $\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n$.

(c) Supposons que $\ell \in]0,1[$. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} L(\alpha_n)$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n^n$ puis déterminer la valeur de ℓ.

IV Inégalité sur l'entropie

On note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Lambda_n = \{(\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n) \in (\mathbb{R}_+)^n \mid \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1\}$.

Puis, on définit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $H_n : \Lambda_n \to \mathbb{R}_+$, $(\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n) \mapsto \sum_{i=1}^n L(\lambda_i)$.

IV.1. (a) Justifier que ln est concave.
En déduire que, pour tout $(\lambda_1, \dots \lambda_n) \in \Lambda_n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ tels que $\lambda_i > 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$H_n(\lambda_1, \dots \lambda_n) \geqslant -\ln\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i^2\right)$$

(b) Exprimer, pour tout $a > 0$ l'équation de la tangente au graphe de la fonction logarithme au point d'abscisse a puis en déduire que, pour tout $x > 0$, on a

$$\ln x \leqslant x - 1 \ . \qquad (\mathcal{I})$$

IV.2. (a) Soient $(p_1, p_2, \dots p_n)$ et $(q_1, q_2, \dots q_n)$ dans Λ_n tels que $p_i > 0$ et $q_i > 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.
En exploitant l'inégalité $(\mathcal{I})$, montrer que $\sum_{i=1}^n p_i \ln \frac{q_i}{p_i} \leqslant 0$.

(b) En déduire que, pour tous $(p_1, p_2, \dots p_n)$ et $(q_1, q_2, \dots q_n)$ dans Λ_n tels que $p_i > 0$ et $q_i > 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$-\sum_{i=1}^n p_i \ln(q_i) \geqslant H_n(p_1, \dots p_n) \ .$$

(c) Conclure que

$$\forall\ (p_1, p_2, \dots p_n) \in \Lambda_n,\ \ H_n(p_1, \dots p_n) \leqslant \ln n \qquad (1)$$

et montrer que cette majoration est optimale en exhibant un cas d'égalité.
On fera bien attention au fait que les p_i sont éventuellement nuls.

IV.3. Établir directement la majoration (1) en appliquant à L l'inégalité de Jensen.

V Extension de l'inégalité

On note Λ_∞ l'ensemble des suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ à termes strictement positifs telles que $(P_n) = \left(\sum_{i=1}^n p_i\right)$ converge vers 1.

On fixe $p \in]0, 1[$ et on considère particulièrement les suites $(a_n) = (p(1-p)^{n-1})_{n\geqslant 1}$ et $(b_n) = (\frac{4}{n(n+1)(n+2)})_{n\geqslant 1}$.

V.1. Montrer que $(a_n) \in \Lambda$ et $(b_n) \in \Lambda$.
On pourra chercher α, β, γ tels que $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{n+1} + \frac{\gamma}{n+2}$.

V.2. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, de deux manières différentes $\sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^k a_k\right)$ afin d'établir $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^n k a_k = \frac{1}{p}$.

V.3. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^n k b_k = 2$.

On note, pour tout $p \in]0, 1[$, $\Lambda_\infty^p = \{(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}^*} \mid \sum_{k=1}^n p_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \text{ et } \sum_{k=1}^n k p_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{p}\}$.

Soit $q = (q_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \Lambda_\infty^p$. On considère la suite $(H_n(q))_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$H_n(q) = \sum_{k=1}^n L(q_k)$$

V.4. (a) Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $W_n = \sum_{k=1}^n q_k \ln(a_k)$. Justifier que (W_n) converge vers $\frac{1}{p}\ln(p^p(1-p)^{1-p})$.

(b) En exploitant l'inégalité $(\mathcal{I})$, montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$L(q_k) \leqslant a_k - q_k - q_k \ln a_k$$

(c) En déduire que $(H_n(q))$ est majorée et qu'elle converge.

(d) Posons $H(q) = \lim_{n \to +\infty} H_n(q)$. Conclure que

$$H(q) \leqslant -\frac{1}{p} \ln(p^p (1-p)^{1-p}) \ .$$

(e) Cette majoration est-elle optimale ?

Correction

On définit dans tout le sujet $L : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \ , \\ -x \ln x & \text{si } x > 0 \ . \end{cases}$

Plus généralement, on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $L_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \ , \\ -x^{n+1} \ln x & \text{si } x > 0 \ . \end{cases}$

I Étude de fonctions

I.1. Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < b$.
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.
Le but de cette question est de démontrer le résultat suivant :

f est convexe sur $[a,b]$ si et seulement si f' est croissante sur $]a,b[$.

(a) Supposons que f' est croissante sur $]a,b[$. Soient $x < y < z$ fixés dans $[a,b]$. En utilisant la formule des accroissements finis, montrer que

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$$

Que vient-on de démontrer pour f ?

⋆ f est continue sur $[x,y]$ car f est continue sur $[a,b]$ et $[x,y] \subset [a,b]$,
⋆ f est dérivable sur $]x,y[$ car f est dérivable sur $]a,b[$ et $]x,y[\subset]a,b[$,
donc la formule des accroissements finis s'applique et donne

$$\exists c_1 \in]x,y[\ : \ \frac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'(c_1)$$

On montre de même que

$$\exists c_2 \in]y,z[\ : \ \frac{f(z)-f(y)}{z-y} = f'(c_2)$$

Observons alors que $c_1 < y < c_2$ donc la croissance de f' donne

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'(c_1) \leqslant f'(c_2) = \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } \forall (x,y,z) \in [a,b]^3 \ , \ x < y < z \to \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \frac{f(z)-f(y)}{z-y}.}$$

On vient de prouver que f satisfait l'une des 3 conditions du lemme des 3 penstes qui est équivalente à la convexité de f sur $[a,b]$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } f \text{ est convexe sur } [a,b].}$$

(b) Réciproquement, supposons que f est convexe sur $[a,b]$. Soient $a < x < y < b$. Justifier que, pour tout $(s,t) \in]x,y[^2$,

$$\frac{f(s)-f(x)}{s-x} \leqslant \frac{f(t)-f(y)}{t-y}$$

puis en déduire que f' est croissante sur $]a,b[$ en regardant l'information qui se déduit de l'inégalité ci-dessus lorsque s et t se rapprochent respectivement de x et y.

- $s \in]x,y[$ donc $x < s < y$ donc la convexité de f implique (via le lemme des 3 pentes)

$$\frac{f(s)-f(x)}{s-x} \leqslant \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$

$t \in]x,y[$ donc $x < t < y$ donc la convexité de f implique (via le lemme des 3 pentes)

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \frac{f(y)-f(t)}{y-t}$$

Par transitivité de la relation d'ordre $\leqslant$,

$$\boxed{\forall (s,t) \in]x,y[\ , \ \frac{f(s)-f(x)}{s-x} \leqslant \frac{f(y)-f(t)}{y-t} \ .}$$

- Fixons $t \in]x,y[$ quelconque et observons que dans l'inégalité

$$\forall s \in]x,y[\ , \qquad \underbrace{\frac{f(s)-f(x)}{s-x}}_{\substack{\underset{s\to x^+}{\longrightarrow} f'(x) \\ \text{car } f \text{ est dérivable sur }]a,b[\text{ et } x \in]a,b[}} \qquad \leqslant \qquad \underbrace{\frac{f(y)-f(t)}{y-t}}_{\underset{s\to x^+}{\longrightarrow} \frac{f(y)-f(t)}{y-t}}$$

les deux membres ont une limite finie lorsque $s \to x^+$ ce qui permet de passer à la limite dans cette inégalité pour obtenir

$$f'(x) \leqslant \frac{f(y)-f(t)}{y-t}$$

Cette relation est vraie pour tout $t \in]x,y[$,

$$\forall t \in]x,y[\ , \quad \underbrace{f'(x)}_{\underset{t\to y^-}{\longrightarrow} f'(x)} \quad \leqslant \qquad \underbrace{\frac{f(y)-f(t)}{y-t}}_{\substack{\underset{t\to y^-}{\longrightarrow} f'(y) \\ \text{car } f \text{ est dérivable sur }]a,b[\text{ et } y \in]a,b[}}$$

et les deux membres ont une limite finie lorsque $t \to y^-$ ce qui permet de passer à la limite pour établir

$$f'(x) \leqslant f'(y)$$

Or le résultat est vrai pour tous $(x,y) \in]a,b[^2$ tels que $x < y$ donc

$$\boxed{f' \text{ est croissante sur }]a,b[.}$$

I.2. (a) Montrer que L est continue sur $[0,1]$.
Est-elle dérivable en 0 ? Que peut-on en déduire concernant la courbe représentative $\mathcal{C}$ de L ?

- $\star$ $x \mapsto -x$ et ln sont des fonctions continues sur $]0,1]$ donc leur produit, f est continu sur $]0,1]$.
  $\star$ D'après le théorème sur les croissances comparées,

$$\lim_{x\to 0} x\ln x = 0$$

donc

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} L(x) = 0 = L(0)$$

donc L est continue en 0.

$$\boxed{\text{Ainsi, } L \text{ est continue sur } [0,1].}$$

- Pour tout $x \in]0,1]$,

$$\frac{L(x)-L(0)}{x-0} = \frac{-x\ln x}{x} = -\ln x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} +\infty$$

$$\boxed{\text{donc } L \text{ n'est pas dérivable en 0 et son graphe admet en } (0,L(0)) \text{ une tangente verticale dirigée vers le haut.}}$$

(b) Étudier les variations de L.
Étudier la concavité de L.

- $\star$ $x \mapsto -x$ et ln sont des fonctions dérivables sur $]0,1]$ donc leur produit, f est dérivable sur $]0,1]$.
  $\star$ pour tout $x \in]0,1[$,

$$L'(x) = -\ln x - x \times \frac{1}{x} = -(1+\ln x)$$

$$L'(x) > 0 \iff 1+\ln x < 0 \iff \ln x < -1 \iff x < \frac{1}{e}$$

L étant continue sur le segment $[0,1]$, le signe de L' sur l'ouvert $]0,1]$ suffit à déterminer les variations de L sur $[0,1]$:

x	0		$\frac{1}{e}$		1
$L'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
L	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

$$L\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}\ln\frac{1}{e} = \frac{-\ln e}{e} = \frac{1}{e}$$

- ⋆ $-L$ est continue sur le segment $[0,1]$,
  ⋆ $-L$ est dérivable sur l'ouvert $]0,1[$ (car sur $]0,1]$),
  ⋆ ln est croissante sur $]0,1[$ donc $x \mapsto 1+\ln x$ est croissante sur $]0,1[$,
  donc $(-L)' = 1+\ln$ est croissante sur $]0,1[$,

  si bien que le sens réciproque de l'équivalence de la question I.1 s'applique : $-L$ est convexe sur $[0,1]$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } L \text{ est concave sur } [0,1].}$$

(c) Donner une équation de la tangente T_1 à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1.
Quelle est la position relative de $\mathcal{C}$ par rapport à T_1 ?
Tracer $\mathcal{C}$ en faisant apparaître au moins trois tangentes remarquables.

- L est dérivable en 1 donc $y = L'(1)(x-1) + L(1)$ est une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ en $(1, L(1))$. Or $L(1) = 0$ et $L'(1) = -(1+\ln(1)) = -1$ donc

$$\boxed{\text{une équation de la tangente à } \mathcal{C} \text{ au point d'abscisse 1 est } y = -x+1.}$$

- f est concave sur $[0,1]$ donc $\mathcal{C}$ est en-dessous de toutes ses tangentes sur $[0,1]$ (sous réserve d'existence des tangentes !).

$$\boxed{\text{Ainsi, } \mathcal{C} \text{ est en-dessous de } T_1 \text{ sur } [0,1].}$$

- Les 3 tangentes remarquables sont
  ⋆ la tangente verticale au point $(0,0)$,
  ⋆ la tangente horizontale au point (e^{-1}, e^{-1}),
  ⋆ la tangente T_1 de pente -1 au point $(1,0)$.

I.3. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé.

(a) Exprimer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, la dérivée k-ième de la fonction logarithme en x : $\ln^{(k)}(x)$. On pourra conjecturer une formule puis la prouver par récurrence.

Considérons la propriété $\mathcal{P}(\cdot)$ définie pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ par

$$\mathcal{P}(k) \ : \ « \ \forall x \in]0,+\infty[\ , \ \ln^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k+1}(k-1)!}{x^k} \ »$$

⋆ On a

$$\forall x \in]0,+\infty[\ , \ \frac{(-1)^{1+1}(1-1)!}{x^1} = \frac{1}{x} = \ln'(x) = \ln^{(1)}(x)$$

donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

⋆ Soit $k \in \mathbb{N}^*$ fixé quelconque tel que $\mathcal{P}(k)$ est vraie. En dérivant la dérivée k-ème de la fonction ln dont une expression est donnée par la véracité de $\mathcal{P}(k)$, on obtient

$$\begin{aligned}
\forall x \in]0,+\infty[\ , \ \ln^{(k+1)}(x) &= (\ln^{(k)})'(x) \\
&= \left(t \mapsto \frac{(-1)^{k+1}(k-1)!}{t^k}\right)'(x) \quad \text{car } \mathcal{P}(k) \text{ est vraie} \\
&= \left(t \mapsto (-1)^{k+1}(k-1)!t^{-k}\right)'(x) \\
&= (-1)^{k+1}(k-1)!(-kx^{-k-1}) \\
&= \frac{(-1)^{k+2}(k)!}{x^{k+1}} \\
&= \frac{(-1)^{(k+1)+1}((k+1)-1)!}{x^{k+1}}
\end{aligned}$$

Par conséquent, $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

$$\boxed{\text{Ainsi, } \forall k \in \mathbb{N}^* \ , \ \forall x \in]0,+\infty[\ , \ \ln^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k+1}(k-1)!}{x^k}.}$$

(b) Justifier que L_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,1]$ et montrer que, pour tout $p \in [\![0,n]\!]$,

$$\forall x \in]0,1] \ , \ L_n^{(p)}(x) = \frac{(n+1)!}{(n+1-p)!}x^{n+1-p}\ln x + x^{n+1-p}\sum_{k=0}^{p-1}\binom{p}{k}\frac{(-1)^{p-k}(n+1)!(p-k-1)!}{(n+1-k)!} \ .$$

- $x \mapsto -x^{n+1}$ et ln sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,1]$ donc leur produit, L_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,1]$.
- Soit $p \in [\![0,n]\!]$ fixé quelconque. Appliquons la formule de Leibniz :

$$\begin{aligned}
\forall x \in]0,1] \ , \ L_n^{(p)}(x) &= -\left[\left(t \mapsto t^{n+1}\right) \times \ln\right)^{(p)}(x) \\
&= -\binom{p}{p} \underbrace{\left(t \mapsto t^{n+1}\right)^{(p)}(x)}_{=\frac{(n+1)!}{(n+1-p)!}x^{n+1-p}} \times \ln^{(p-p)}(x) \\
&\quad -\sum_{k=0}^{p-1}\binom{p}{k} \underbrace{\left(t \mapsto t^{n+1}\right)^{(k)}(x)}_{=\frac{(n+1)!}{(n+1-k)!}x^{n+1-k}} \times \underbrace{\ln^{(p-k)}(x)}_{\substack{=\frac{(-1)^{p-k+1}(p-k-1)!}{x^{p-k}} \\ \text{d'après la question I.3(a), autorisé} \\ \text{car } k \in [\![0,p-1]\!] \text{ donc } p-k \in \mathbb{N}^*}} \\
&= \frac{(n+1)!}{(n+1-p)!}x^{n+1-p}\ln x - \sum_{k=0}^{p-1}\binom{p}{k}\frac{(-1)^{p-k+1}(n+1)!(p-k-1)!}{(n+1-k)!}x^{n+1-k-(p-k)} \\
&= \frac{(n+1)!}{(n+1-p)!}x^{n+1-p}\ln x + \sum_{k=0}^{p-1}\binom{p}{k}\frac{(-1)^{p-k}(n+1)!(p-k-1)!}{(n+1-k)!}x^{n+1-p}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } \forall p \in [\![0,n]\!], \forall x \in]0,1], \ L_n^{(p)}(x) = \frac{(n+1)!}{(n+1-p)!}x^{n+1-p}\ln x + x^{n+1-p}\sum_{k=0}^{p-1}\binom{p}{k}\frac{(-1)^{p-k}(n+1)!(p-k-1)!}{(n+1-k)!}.}$$

(c) En déduire que L_n est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[0,1]$. On précisera la valeur de la dérivée k-ème en 0 pour $k \in [\![1,n]\!]$.

⋆ D'après le théorème sur les croissances comparées, puisque $n+1 > 0$ (car $n \in \mathbb{N}$)

$$\lim_{x \to 0} x^{n+1}\ln x = 0$$

donc

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} L_n(x) = 0 = L_n(0)$$

donc L_n est continue en 0.

⋆ L_n est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $]0,1]$ (car de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,1]$ d'après la question I.3(b)).

⋆ Soit $p \in [\![1,n]\!]$ fixé.

D'après la question I.3(b), pour tout $x \in]0,1]$,

$$L_n^{(p)}(x) = \frac{(n+1)!}{(n+1-p)!} \underbrace{x^{n+1-p}\ln x}_{\substack{\underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0 \\ \text{car } n+1-p>0 \\ \text{(croiss. comp.)}}} + \underbrace{x^{n+1-p}}_{\substack{\underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0 \\ \text{car } n+1-p>0}} \underbrace{\sum_{k=0}^{p-1}\binom{p}{k}\frac{(-1)^{p-k}(n+1)!(p-k-1)!}{(n+1-k)!}}_{\text{constante indépendante de } x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$$

donc $L_n^{(p)}$ admet une limite finie à droite en 0 qui vaut 0 : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} L_n^{(p)} = 0$.

Nous pouvons donc appliquer le théorème de prolongement du caractère $\mathcal{C}^n$:

$$\boxed{L_n \text{ est une fonction de classe } \mathcal{C}^n \text{ sur } [0,1] \text{ et } \forall p \in [\![1,n]\!],\ L_n^{(p)}(0) = 0.}$$

(d) Exprimer $L_n^{(n)}$ comme une combinaison linéaire L et de $\mathrm{Id}_{]0,1]}$ (dont on ne cherchera pas à simplifier les coefficients). Est-ce que $L_n^{(n)}$ est dérivable en 0 ?

L'expression de $L_n^{(p)}$ établie dans la question I.3(b) appliquée pour $p \leftarrow n$ (autorisé car la formule est valable pour $p \in [\![0,n]\!]$),

$$\forall x \in]0,1]\ ,\ L_n^{(n)}(x) = (n+1)!x\ln x + x \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{n-k}(n+1)!(n-k-1)!}{(n+1-k)!}}_{\text{constante réelle notée } c_n}$$

donc

$$\boxed{\forall x \in]0,1]\ ,\ L_n^{(n)}(x) = -(n+1)!L(x) + c_n \mathrm{Id}_{]0,1]}(x)}$$

- ⋆ **Méthode 1.** D'après la question précédente, $L^{(n)}$ est continue en 0 et $L_n^{(n)}(0) = 0$ donc, pour tout $x \in]0,1]$,

$$\frac{L_n^{(n)}(x) - L_n^{(n)}(0)}{x-0} = \frac{L_n^{(n)}(x)}{x} = -(n+1)! \underbrace{\frac{L(x)}{x}}_{\substack{\xrightarrow[x\to 0]{} +\infty \\ \text{question I.2(a)}}} + c_n \xrightarrow[x\to 0]{} -\infty$$

  donc $L_n^{(n)}$ n'est pas dérivable en 0.
- ⋆ **Méthode 2.** Nous avons établi la formule

$$L_n^{(n)} = -(n+1)!L + c_n \mathrm{Id}_{]0,1]} \quad \text{sur }]0,1] \tag{2}$$

  or
  — L_n est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[0,1]$ donc $L_n^{(n)}$ est continue en 0,
  — L et $\mathrm{Id}_{[0,1]}$ sont continues en 0,
  donc la relation (2) valide sur $]0,1]$ se prolonge, par continuité des 3 fonctions impliquées, en une relation valide sur $[0,1]$.
  Dès lors, on a $L = \dfrac{1}{(n+1)!}(c_n \mathrm{Id}_{[0,1]} - L_n^{(n)})$ sur $[0,1]$.
  Par l'absurde, supposons que $L_n^{(n)}$ est dérivable en 0,
  alors $\dfrac{1}{(n+1)!}(c_n \mathrm{Id}_{[0,1]} - L_n^{(n)})$ est dérivable en 0 (combinaison linéaire de fonctions dérivables en 0),
  donc L est dérivable en 0 ce qui contredit la réponse à la question I.2(a).

$$\boxed{\text{Ainsi, } L_n^{(n)} \text{ n'est pas dérivable en 0.}}$$

II Étude d'une suite récurrente

Soit $a \in [0,1]$. L'étude des variations de L a permis de remarquer que $L([0,1]) \subset [0,1]$ ce qui permet de considérer la suite récurrente u définie par

$$u_0 = a \ \text{ et } \ \forall n \in \mathbb{N}\ ,\ u_{n+1} = L(u_n)$$

II.1. Résoudre l'équation $L(x) = x$.

L'inconnue est $x \in [0,1]$ (domaine de définition de L).

$$\begin{aligned}
L(x) = x \quad &\Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{lcl} L(x) & = & x \\ x & = & 0 \end{array}\right. \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{array}{lcl} L(x) & = & x \\ x & \in &]0,1] \end{array}\right. \\
&\Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{lcl} L(0) & = & 0 \\ x & = & 0 \end{array}\right. \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{array}{lcl} -x\ln x & = & x \\ x & \in &]0,1] \end{array}\right. \\
&\Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{lcl} 0 & = & 0 \\ x & = & 0 \end{array}\right. \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{array}{lcl} \ln x & = & -1 \\ x & \in &]0,1] \end{array}\right. \\
&\Longleftrightarrow \quad x = 0 \quad \text{ou} \quad x = -\frac{1}{e}
\end{aligned}$$

$$\boxed{L \text{ admet 2 points fixes : 0 et } 1/e.}$$

II.2. Justifier que $L(]0,e^{-1}]) \subset]0,e^{-1}]$ et que $\forall x \in [0,e^{-1}]$, $L(x) \geqslant x$.

- D'après le tableau des variations de L, cette fonction est strictement croissante sur $[0,e^{-1}]$ donc

$$\forall x \in]0,e^{-1}] \ , \ 0 < x \leqslant e^{-1} \quad \text{donc}\, \underbrace{L(0)}_{=0} < L(x) \leqslant \underbrace{L(e^{-1})}_{=e^{-1}}$$

$$\boxed{\text{Par conséquent, } L(]0,e^{-1}]) \subset]0,e^{-1}].}$$

- D'après la question I.2(b), la fonction L est concave sur $[0,1]$ donc elle est minorée sur $[0,e^{-1}]$ par sa corde entre les points d'abscisse 0 et e^{-1} si bien que

$$\forall x \in [0,e^{-1}] \ , \ L(x) \geqslant \frac{L(e^{-1}) - L(0)}{e^{-1} - 0}(x-0) + L(0) = \frac{e^{-1} - 0}{e^{-1} - 0}(x-0) + 0 = x$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } \forall x \in [0,e^{-1}],\ L(x) \geqslant x.}$$

II.3. En déduire que, si $a \in]0,e^{-1}]$, alors u est monotone puis qu'elle converge et déterminer sa limite.

La question II.2 a établi la stabilité de l'intervalle $]0,e^{-1}]$ par L donc une récurrence immédiate permet de montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N} \ , \ u_n \in]0,e^{-1}]$$

Cette localisation de tous les termes de la suite u dans $]0,e^{-1}]$ permet d'appliquer la minoration de L sur $[0,e^{-1}]$ établie dans la question II.2 pour $x \leftarrow u_n$:

$$\forall n \in \mathbb{N} \ , \ \underbrace{L(u_n)}_{=u_{n+1}} \geqslant u_n$$

si bien que la suite u est croissante.
Or elle est aussi majorée (par e^{-1} puisque tous les termes appartiennent à $]0,e^{-1}]$) donc elle converge vers une limite ℓ vérifiant

$$\ell = \sup\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

En passant à la limite sur les deux inégalités de l'encadrement

$$\forall n \in \mathbb{N} \ , \ a \leqslant u_n \leqslant e^{-1}$$

on obtient $a \leqslant \ell \leqslant e^{-1}$ donc $\ell \in [a,e^{-1}]$, or la fonction L est continue sur $[0,1]$ donc sur $[a,e^{-1}]$ donc en ℓ si bien que,

$$\forall n \in \mathbb{N} \ , \quad \underbrace{u_{n+1}}_{ds \ \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ \ell} \quad = \quad \underbrace{L(u_n)}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ L(\ell)}$$

par unicité de la limite, $\ell = L(\ell)$.

Par conséquent, ℓ est un point fixe de L mais, d'après la question II.1, L n'a que 2 points fixes : 0 et e^{-1} et nous avons établi que $\ell \in [a, e^{-1}] \subset]0, e^{-1}]$ (car dans cette question on a fait l'hypothèse $a > 0$) donc $\ell = e^{-1}$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } u \text{ converge et } \lim u = e^{-1}.}$$

II.4. Justifier que $L(]e^{-1}, 1[) \subset]0, e^{-1}]$ puis en déduire la convergence de u et sa limite lorsque $a \in]e^{-1}, 1[$.

- D'après le tableau des variations de L, cette fonction est strictement décroissante sur $[e^{-1}, 1]$ donc

$$\forall x \in]e^{-1}, 1[\ , \ e^{-1} < x < 1 \quad \text{donc} \ \underbrace{L(e^{-1})}_{= e^{-1}} > L(x) > \underbrace{L(1)}_{= 0}$$

$$\boxed{\text{Par conséquent, } L(]e^{-1}, 1[) \subset]0, e^{-1}[.}$$

- Si $u_0 = a \in]e^{-1}, 1[$, d'après le point ci-dessus, $u_1 = L(u_0) \in]0, e^{-1}[$ donc la suite u se comporte, à partir du rang 1 exactement comme les suites donc la condition initiale appartient à $]0, e^{-1}[$, ce qui signifie, d'après la question II.3, que

$$\boxed{\text{Ainsi, si } a \in]e^{-1}, 1[, \text{ alors } u \text{ converge et } \lim u = e^{-1}.}$$

II.5. Étudier la convergence de u et sa limite éventuelle pour les valeurs de a n'ayant pas encore été étudiées.

Les valeurs de a n'ayant pas encore été envisagées sont $a = 0$ et $a = 1$.
⋆ Si $a = 0$, alors u est la suite constante de valeur 0 (car 0 est un point fixe de L) donc elle converge vers 0.
⋆ Si $a = 1$, alors $u_1 = L(a) = L(1) = 0$ donc est une suite stationnaire dont le premier terme est 1 et tous les suivants sont égaux à 0 donc elle converge vers 0.

$$\boxed{\text{Ainsi, si } a \in \{0, 1\}, \text{ alors } u \text{ converge vers } 0.}$$

II.6. Soit $\alpha \in]0, 1[$ tel que $a \in \left[e^{-1} - \dfrac{\alpha}{2} e^{-1}, e^{-1} + \dfrac{\alpha}{2} e^{-1}\right]$.

(a) Déterminer, pour $t \in \left[-\dfrac{\alpha}{2}, \dfrac{\alpha}{2}\right]$, un majorant indépendant de t et de α de l'expression $\dfrac{1}{1+t}$.

En déduire que, pour tout $u \in \left[-\dfrac{\alpha}{2}, \dfrac{\alpha}{2}\right]$, $|\ln(1+u)| \leqslant 2|u|$.

- Pour tout $t \in \left[-\dfrac{\alpha}{2}, \dfrac{\alpha}{2}\right]$,

$$1 + t \geqslant 1 - \frac{\alpha}{2} \underbrace{> 0}_{\alpha \in]0,1[} \quad \text{donc} \quad 0 \leqslant \frac{1}{1+t} \leqslant \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{2}} \underbrace{\leqslant}_{\substack{0 < \alpha < 1 \text{ donc } 0 < \frac{\alpha}{2} < \frac{1}{2} \\ \text{donc } 1 - \frac{\alpha}{2} > \frac{1}{2} \text{ donc } \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{2}} < 2}} 2$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } \forall t \in \left[-\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}\right], \ \frac{1}{1+t} \leqslant 2.}$$

- Posons $h : t \in \left[-\dfrac{\alpha}{2}, \dfrac{\alpha}{2}\right] \mapsto \ln(1+t)$.
  ⋆ h est dérivable sur le segment $\left[-\dfrac{\alpha}{2}, \dfrac{\alpha}{2}\right]$.
  ⋆ Pour tout $t \in \left[-\dfrac{\alpha}{2}, \dfrac{\alpha}{2}\right]$,

$$|h'(t)| = \left|\frac{1}{1+t}\right| \underbrace{=}_{\substack{t \geqslant -\frac{\alpha}{2} \geqslant -\frac{1}{2} \\ \text{donc } 1 + t > 0}} \frac{1}{1+t} \underbrace{\leqslant}_{\text{point précédent}} 2$$

ce qui permet d'appliquer l'inégalité des accroissements finis entre les points $u \in \left[-\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}\right]$ et 0 du segment $\left[-\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}\right]$ pour obtenir

$$\underbrace{|h(u) - h(0)|}_{= |\ln(1+u)|} \leqslant \sup\left\{|h'(t)| \mid t \in \left[-\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}\right]\right\} |u - 0| \leqslant 2|u| \tag{3}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } \forall u \in \left[-\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}\right],\ |\ln(1+u)| \leqslant 2|u|.}$$

(b) Montrer que, pour tout $x \in \left[e^{-1} - \frac{\alpha}{2}e^{-1}, e^{-1} + \frac{\alpha}{2}e^{-1}\right]$,

$$|L'(x)| = |\ln(1+et)| \leqslant \alpha$$

où l'on définira t de manière à ce que $x = e^{-1} + t$.
En déduire que $\forall x \in \left[e^{-1} - \frac{\alpha}{2}e^{-1}, e^{-1} + \frac{\alpha}{2}e^{-1}\right]$, $|L(x) - e^{-1}| \leqslant \alpha|x - e^{-1}|$.

- Soit $x \in \left[e^{-1} - \frac{\alpha}{2}e^{-1}, e^{-1} + \frac{\alpha}{2}e^{-1}\right]$ fixé.

  Posons $t = x - e^{-1}$.
  Puisque $x \in \left[e^{-1} - \frac{\alpha}{2}e^{-1}, e^{-1} + \frac{\alpha}{2}e^{-1}\right]$, $t \in \left[-\frac{\alpha}{2}e^{-1}, \frac{\alpha}{2}e^{-1}\right]$.
  Nous avons déjà établi que $L'(x) = -(1 + \ln(x))$ donc

$$\begin{aligned}
|L'(x)| &= |1 + \ln(x)| \\
&= |1 + \ln(e^{-1} + t)| \\
&= |1 + \ln(e^{-1}(1 + et))| \\
&= |1 + \ln(e^{-1}) + \ln(1 + et))| \\
&= |\ln(1 + et)| \quad \text{car } \ln(e^{-1}) = -1 \\
&\leqslant 2|et| \quad \text{car } t \in \left[-\frac{\alpha}{2}e^{-1}, \frac{\alpha}{2}e^{-1}\right] \text{ donc } et \in \left[-\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}\right] \text{ ce qui permet d'appliquer la majoration (3)} \\
&\leqslant \alpha \quad \text{car } et \in \left[-\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}\right] \text{ donc } 2et \in [-\alpha, \alpha]
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } \forall x \in \left[e^{-1} - \frac{\alpha}{2}e^{-1}, e^{-1} + \frac{\alpha}{2}e^{-1}\right],\ |L'(x)| \leqslant \alpha.}$$

- Soit $x \in \left[e^{-1} - \frac{\alpha}{2}e^{-1}, e^{-1} + \frac{\alpha}{2}e^{-1}\right]$.
  - ⋆ L est dérivable sur le segment $\left[e^{-1} - \frac{\alpha}{2}e^{-1}, e^{-1} + \frac{\alpha}{2}e^{-1}\right]$,
  - ⋆ $|L'|$ est majorée par α sur le segment $\left[e^{-1} - \frac{\alpha}{2}e^{-1}, e^{-1} + \frac{\alpha}{2}e^{-1}\right]$,
  - ⋆ x et e^{-1} appartiennent au segment $\left[e^{-1} - \frac{\alpha}{2}e^{-1}, e^{-1} + \frac{\alpha}{2}e^{-1}\right]$,

  si bien que l'inégalité des accroissements finis donne

$$|L(x) - L(e^{-1})| \leqslant \alpha|x - e^{-1}|$$

  or e^{-1} est un point fixe de L donc

$$\boxed{|L(x) - e^{-1}| \leqslant \alpha|x - e^{-1}|}$$

(c) En déduire que,

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ |u_n - e^{-1}| \leqslant \alpha^n|a - e^{-1}|$$

Quel résultat antérieur cette inégalité permet-elle de retrouver ?

- Considérons la propriété $\mathcal{P}(\cdot)$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$\mathcal{P}(n) \ : \ « \ |u_n - e^{-1}| \leqslant \alpha^n |a - e^{-1}| \ ».$$

  - ⋆ $\mathcal{P}(0)$ est évidemment vraie car les deux membres de l'inégalité sont égaux.
  - ⋆ **Prouvons $\mathcal{P}(1)$ pour essayer de comprendre comment peut se dérouler l'hérédité (partie inutile dans une rédaction finale).**

    Par hypothèse dans cette question II.6, $u_0 = a \in \left[e^{-1} - \dfrac{\alpha}{2}e^{-1}, e^{-1} + \dfrac{\alpha}{2}e^{-1}\right]$ ce qui permet d'appliquer l'inégalité établie dans la question II.6(b) pour $x \leftarrow a$:

$$\underbrace{|L(a) - e^{-1}|}_{= |u_1 - e^{-1}|} \leqslant \alpha |a - e^{-1}|$$

    donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
  - ⋆ Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé quelconque tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

    L'idée consiste (comme le suggère la preuve de $\mathcal{P}(1)$) d'appliquer l'inégalité établie dans la question II.6(b) pour $x \leftarrow u_n$. Cependant, l'inégalité de la question II.6(b) ne s'applique qu'aux x appartenant au segment $\left[e^{-1} - \dfrac{\alpha}{2}e^{-1}, e^{-1} + \dfrac{\alpha}{2}e^{-1}\right]$.

    Il faut donc, au préalable, prouver que $u_n \in \left[e^{-1} - \dfrac{\alpha}{2}e^{-1}, e^{-1} + \dfrac{\alpha}{2}e^{-1}\right]$. Justement la véracité de $\mathcal{P}(n)$ donne

$$|u_n - e^{-1}| \leqslant \alpha^n |a - e^{-1}| \underbrace{\leqslant}_{0 \leqslant \alpha \leqslant 1} |a - e^{-1}| \underbrace{\leqslant}_{\substack{a \in \left[e^{-1} - \frac{\alpha}{2}e^{-1}, e^{-1} + \frac{\alpha}{2}e^{-1}\right] \\ \text{(hyp. question II.6)}}} \frac{\alpha}{2}e^{-1}$$

    donc $u_n \in \left[e^{-1} - \dfrac{\alpha}{2}e^{-1}, e^{-1} + \dfrac{\alpha}{2}e^{-1}\right]$.

    L'utilisation de l'inégalité établie dans la question II.6(b) pour $x \leftarrow u_n$ est donc autorisée et donne

$$\underbrace{|L(u_n) - e^{-1}|}_{= |u_{n+1} - e^{-1}|} \leqslant \alpha |u_n - e^{-1}| \underbrace{\leqslant}_{\substack{\mathcal{P}(n) \text{ vraie,} \\ \text{donc } |u_n - e^{-1}| \leqslant \alpha^n |a - e^{-1}|}} \alpha \times \alpha^n |a - e^{-1}| = \alpha^{n+1} |a - e^{-1}|$$

    Par conséquent, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

$$\boxed{\text{Ainsi, } \forall n \in \mathbb{N} \ , \ |u_n - e^{-1}| \leqslant \alpha^n |a - e^{-1}|}$$

- Puisque $|\alpha[< 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha^n = 0$ donc

$$\lim_{n \to +\infty} \alpha^n |a - e^{-1}| = 0$$

  si bien que la majoration établie dans le point ci-dessus permet d'affirmer que la suite u converge et que sa limite est e^{-1}.

Cet encadrement permet, pour des conditions initiales $a \in \left[e^{-1} - \frac{\alpha}{2}e^{-1}, e^{-1} + \frac{\alpha}{2}e^{-1}\right]$, de retrouver la convergence de la suite u vers e^{-1} sans étudier la monotonie de la suite.

(d) Soient $\varepsilon > 0$ et $a \in \left]\dfrac{e^{-1}}{2}, \dfrac{3e^{-1}}{2}\right[$. À partir de quel entier N ne dépendant que de ε et a, peut-on affirmer que pour tout $n \geqslant N$, $|u_n - e^{-1}| \leqslant \varepsilon$?

Si $a = e^{-1}$ la suite est constante de valeur e^{-1} donc $N = 0$ convient.

Sinon, posons $\alpha = \dfrac{2|a - e^{-1}|}{e^{-1}}$.

- ⋆ D'une part, $a \neq e^{-1}$ donc $\alpha > 0$.

  D'autre part, l'hypothèse $a \in \left]\dfrac{e^{-1}}{2}, \dfrac{3e^{-1}}{2}\right[$ donne

$$\frac{e^{-1}}{2} < a < \frac{3e^{-1}}{2} \quad \text{donc} \quad -\frac{e^{-1}}{2} < a - e^{-1} < \frac{e^{-1}}{2} \quad \text{donc} \quad |a - e^{-1}| < \frac{e^{-1}}{2}$$

donc $\alpha < 1$.
Ainsi, $\alpha \in]0,1[$.

$\star$ De plus, avec cette valeur de α, $|a - e^{-1}| = \dfrac{\alpha}{2}e^{-1}$ donc $a \in \left[e^{-1} - \dfrac{\alpha}{2}e^{-1}, e^{-1} + \dfrac{\alpha}{2}e^{-1}\right]$.

Les deux conditions ci-dessus correspondent aux hypothèses faites sur α et a dans la question II.6(c) donc on peut affirmer que

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ |u_n - e^{-1}| \leqslant \alpha^n |a - e^{-1}|$$

si bien qu'un entier N à partir duquel tout les termes de la suite u sont ε proches de e^{-1} sera le plus petit entier N tel que

$$\begin{aligned}
\alpha^N |a - e^{-1}| \leqslant \varepsilon \quad &\iff \quad N \ln\alpha + \ln|a - e^{-1}| \leqslant \ln\varepsilon \\
&\iff \quad N \geqslant \frac{\ln\varepsilon - \ln|a - e^{-1}|}{\ln\alpha} \quad \text{renversement des inégalités car } \alpha \in]0,1[\text{ donc } \ln\alpha < 0 \\
&\iff \quad N \geqslant \frac{\ln\varepsilon - \ln|a - e^{-1}|}{\ln 2 + \ln|a - e^{-1}| - \ln(e^{-1})} \\
&\iff \quad N \geqslant \frac{\ln\varepsilon - \ln|a - e^{-1}|}{1 + \ln 2 + \ln|a - e^{-1}|}
\end{aligned}$$

donc $N = \left\lfloor \dfrac{\ln\varepsilon - \ln|a - e^{-1}|}{1 + \ln 2 + \ln|a - e^{-1}|} \right\rfloor$ convient.

$\boxdot$

III Étude d'une suite implicite

Notons g la fonction définie pour tout $x \in]0,1]$ par $g(x) = -\dfrac{\ln x}{e}$.

III.1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, L_n admet un unique maximum global dont on notera x_n et y_n l'abscisse et l'ordonnée.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Nous avons vu que L_n est dérivable sur $[0,1]$ et pour tout $x \in [0,1]$, $L_n'(x) = -[(n+1)\ln x + 1]x^n$
Puisque $x \in [0,1]$, $x^n \geqslant 0$ et donc

$$L_n'(x) \geqslant 0 \iff (n+1)\ln x \leqslant -1 \iff x \leqslant \exp\frac{-1}{n+1}$$

par croissance de exp. L'inégalité large de l'étude précédente peut être stricte.
On vérifie que $e^{-\frac{1}{n+1}} \in]0,1[$.
Ainsi L_n est strictement croissante sur $[0, e^{-\frac{1}{n+1}}]$ et strictement décroissante sur $[e^{-\frac{1}{n+1}}, 1]$.

$$\boxed{\text{Donc, pour } n \in \mathbb{N}^*,\ L_n \text{ admet un maximum unique d'abscisse } x_n = e^{-\frac{1}{n+1}} \text{ et d'ordonnée } y_n = L_n(x_n) = \frac{e^{-1}}{n+1}.}$$

III.2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, (x_n, y_n) appartient à la courbe représentative de la fonction g.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = e^{-\frac{1}{n+1}} \in]0,1]$ appartient au domaine de définition de g,
donc $g(x_n) = \dfrac{\ln e^{-\frac{1}{n+1}}}{e} = \dfrac{1}{e(n+1)} = y_n$.

$$\boxed{\text{Donc, pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ (x_n, y_n) \text{ appartient à la courbe représentative de la fonction } g.}$$

III.3. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, h_n la fonction définie pour tout $x \in [0,1]$ par $h_n(x) = L(x) - x^n$.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En étudiant le signe de h_n'', déterminer les variations de h_n et établir qu'il existe une unique solution à l'équation d'inconnue $x \in]0,1]$

$$L(x) = x^n$$

On notera α_n cette unique solution.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
h_n est dérivable deux fois sur $]0,1[$ et pour tout $x \in]0,1[$:

$$h_n'(x) = -(\ln x + 1) - nx^{n-1} \qquad \text{et} \qquad h_n''(x) = -\frac{1}{x} - n(n-1)x^{n-2} < 0$$

Donc h_n' est strictement décroissante sur $]0,1]$.
Puis $h_n'(1) = -(n+1) < 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} h_n'(x) = +\infty$.
Donc, par continuité et stricte décroissance de h_n' sur $]0,1]$, on peut affirmer que :
h_n' réalise une bijection de $]0,1]$ sur $[-(n+1), +\infty[$.
Il existe donc un unique $\beta_n \in]0,1]$ tel que $h_n'(\beta_n) = 0$ et $h_n' > 0$ sur $]0, \beta_n[$ et $h_n' < 0$ sur $]\beta_n, 1[$.
Ainsi h_n est strictement croissante sur $]0, \beta_n[$ et strictement décroissante sur $]\beta_n, 1[$.
En particulier, pour tout $x \in]0, \beta_n]$, $h_n(x) > h_n(0) = 0$.
Donc l'équation $h_n(x) = 0$ n'a pas de solution sur $]0, \beta_n]$
Et $h_n(\beta_n) > 0$, $h_n(1) = L(1) - 1^n = -1 < 0$.
h_n est continue, strictement décroissante sur $[\beta_n, 1]$. Enfin, $0 \in [h_n(1), h_n(\beta_n)]$.
Ainsi, l'équation $h_n(x) = 0$ admet une unique solution sur $[\beta_n, 1]$.

$\boxed{\text{Finalement : il existe une unique solution à l'équation d'inconnue } x \in]0,1],\ L(x) = x^n.}$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier que $h_{n+1} \geqslant h_n$ sur $]0,1[$ puis, en évaluant en α_{n+1}, obtenir la monotonie de la suite (α_n) et conclure à sa convergence.
Posons $\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et tout $x \in]0,1[$: $h_{n+1} - h_n = L(x) - x^{n+1} - L(x) + x^n = x^n(1-x) \geqslant 0$,
par produit de nombres strictement positifs. Comme $\alpha_{n+1} \in]0,1[$, on :

$$0 = h_{n+1}(\alpha_{n+1}) \geqslant h_n(\alpha_{n+1})$$

Or, d'après les variations de h_n étudiées à la question précédente :
— $h_n > 0$ sur $]0, \beta_n[$, or $h_n(\alpha_{n+1}) \leqslant 0$ donc $\alpha_{n+1} \in [\beta_n, 1]$,
— h_n **strictement décroissante** sur $[\beta_n, 1]$ et $h_n(\alpha_{n+1}) \leqslant 0 = h_n(\alpha_n)$ donc $\alpha_{n+1} \in [\alpha_n, 1]$.

$\boxed{\text{Par conséquent } (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est croissante, or elle est majorée par 1 donc elle converge.}}$

(c) Supposons que $\ell \in]0,1[$. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} L(\alpha_n)$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n^n$ puis déterminer la valeur de ℓ.

On suppose que $\ell \in]0,1[$.
La fonction L est continue sur $[0,1]$, donc $L(\alpha_n) \to L(\ell)$.
Par ailleurs, on sait que α_n est croissante donc $0 \leqslant \alpha_n^n \leqslant \ell^n$.
Mais on a supposé que $\ell \in]0,1[$, donc $\ell^n \to 0$ (suite géométrique).
Donc d'après le théorème d'existence de limite par encadrement : $(\alpha_n^n) \to 0$.
Enfin, on sait que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $L(\alpha_n) = \alpha_n^n$.
Ainsi par unicité des limites $L(\ell) = 0$. Donc d'après l'étude des points fixes de L : $\ell \in \{0,1\}$. Absurde !
Donc $\ell \notin]0,1[$.
Or tous les termes de la suite (α_n) appartiennent à $[0,1]$ donc, par passage à la limite dans les deux inégalités de l'encadrement $0 \leqslant \alpha_n \leqslant 1$, $0 \leqslant \ell \leqslant 1$ donc $\ell \in [0,1]$.
Par conséquent, $\ell \in [0,1] \setminus]0,1[= \{0,1\}$. Et comme (α_n) est croissante $\ell = \sup\{\alpha_n \mid n \in \mathbb{N}\} \geqslant \alpha_0 > 0$, donc $\ell \neq 0$.

$\boxed{\text{La suite } (\alpha_n) \text{ converge vers 1.}}$

IV Inégalité sur l'entropie

On note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Lambda_n = \{(\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n) \in (\mathbb{R}_+)^n \mid \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1\}$.

Puis, on définit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $H_n : \Lambda_n \to \mathbb{R}_+$, $(\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} L(\lambda_i)$.

IV.1. (a) Justifier que ln est concave.
En déduire que, pour tout $(\lambda_1, \dots \lambda_n) \in \Lambda_n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ tels que $\lambda_i > 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$H_n(\lambda_1, \dots \lambda_n) \geqslant -\ln\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2\right)$$

---

ln est dérivable deux fois sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x > 0$, $\ln''(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0$.

$$\boxed{\text{Donc ln est concave sur } \mathbb{R}_+^*.}$$

On a alors l'iégalité de Jensen, puisque $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ et $\forall\, i \in \mathbb{N}_n$, $\lambda_i \geqslant 0$:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \times \ln(\lambda_i) \leqslant \ln\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \times \lambda_i\right)$$

Donc

$$-\sum_{i=1}^{n} L(\lambda_i) \geqslant \ln\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2\right)$$

$$\boxed{-H_n(\lambda_1, \dots \lambda_n) \geqslant -\ln\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2\right)}$$

(b) Exprimer, pour tout $a > 0$ l'équation de la tangente au graphe de la fonction logarithme au point d'abscisse a puis en déduire que, pour tout $x > 0$, on a

$$\ln x \leqslant x - 1\ . \qquad (\mathcal{I})$$

L'équation de la tangente au graphe de la fonction logarithme au point d'abscisse $a(> 0)$ à pour équation : $y = \ln'(a)(x - a) + \ln(a) = \dfrac{1}{a}(x - a) + \ln(a)$.
La fonction ln est concave donc sa représentation graphique est au-dessus de chacune de ces tangentes.
Prenons donc $a \leftarrow 1$, on a :

$$\boxed{\forall\ x > 0, \ln(x) \leqslant \frac{1}{1}(x - 1) + \ln 1 = x - 1}$$

IV.2. (a) Soient $(p_1, p_2, \dots p_n)$ et $(q_1, q_2, \dots q_n)$ dans Λ_n tels que $p_i > 0$ et $q_i > 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.
En exploitant l'inégalité $(\mathcal{I})$, montrer que $\sum_{i=1}^{n} p_i \ln \dfrac{q_i}{p_i} \leqslant 0$.

Soit $i \in \mathbb{N}_n$, appliquons l'inégalité $(\mathcal{I})$ pour $x \leftarrow \dfrac{q_i}{p_i} > 0$, on a donc $\ln \dfrac{q_i}{p_i} \leqslant \dfrac{q_i}{p_i} - 1$.
Puis, en multipliant par $p_i > 0$: $p_i \ln \dfrac{q_i}{p_i} \leqslant q_i - p_i$.
Ensuite, en sommant pour i de 1 à n,

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} p_i \ln \frac{q_i}{p_i} \leqslant \sum_{i=1}^{n} q_i - \sum_{i=1}^{n} p_i = 1 - 1 = 0}$$

(b) En déduire que, pour tous $(p_1, p_2, \dots p_n)$ et $(q_1, q_2, \dots q_n)$ dans Λ_n tels que $p_i > 0$ et $q_i > 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$-\sum_{i=1}^{n} p_i \ln(q_i) \geqslant H_n(p_1, \dots p_n) \ .$$

Toujours, avec l'hypothèse que $p_i > 0$ et $q_i > 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$0 \geqslant \sum_{i=1}^{n} p_i \ln \frac{q_i}{p_i} = \sum_{i=1}^{n} p_i \ln(q_i) - \sum_{i=1}^{n} p_i \ln(p_i) = \sum_{i=1}^{n} p_i \ln(q_i) + H_n(p_1, p_2, \dots p_n)$$

Donc

$$\boxed{-\sum_{i=1}^{n} p_i \ln(q_i) \geqslant H_n(p_1, \dots p_n)}$$

(c) Conclure que

$$\forall\ (p_1, p_2, \dots p_n) \in \Lambda_n,\ \ H_n(p_1, \dots p_n) \leqslant \ln n \tag{4}$$

et montrer que cette majoration est optimale en exhibant un cas d'égalité.

On fera bien attention au fait que les p_i sont éventuellement nuls

---

On sait que pour tout $(p_1, p_2, \dots p_n)$ et $(q_1, q_2, \dots q_n)$ dans Λ_n

si $p_i > 0$ et $q_i > 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, alors $-\sum_{i=1}^{n} p_i \ln(q_i) \geqslant H_n(p_1, \dots p_n)$.

Considérons $(p_1, p_2, \dots p_n) \in \Lambda_n$ et notons $J = \{i \in [\![1, n]\!] \mid p_i = 0\}$.

- Si $J = \emptyset$.

  Alors, on peut appliquer le résultat de la question précédente avec $q_i \leftarrow \dfrac{1}{n}$.

  En effet : $(q_1, q_2, \dots q_n) \in \Lambda_n$ car $\sum_{i=1}^{n} q_i = 1$ et $\forall\ i \in [\![1, n]\!]$, $q_i \geqslant 0$, mieux : $q_i > 0$.

  On a donc $H_n(p_1, \dots p_n) \leqslant -\sum_{i=1}^{n} p_i \ln(\dfrac{1}{n}) = \ln(n) \times \sum_{i=1}^{n} p_i = \ln n$.

- Si $J \neq \emptyset$. On considère toujours $q_i = \dfrac{1}{n} > 0$.

  On reprend les inégalités précédentes :

$$H_n(p_1, p_2, \dots p_n) + \sum_{i=1}^{n} p_i \ln(q_i) = -\sum_{i=1}^{n} L(p_i) + \sum_{i=1}^{n} p_i \ln q_i = -\sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ i \notin J}} p_i \ln(p_i) - \sum_{i \in J} 0 + \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ i \notin J}} p_i \ln(q_i) + \sum_{i \in J} 0$$

$$= \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ i \notin J}} p_i (\ln(q_i) - \ln(p_i)) = \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ i \notin J}} p_i \ln \frac{q_i}{p_i}$$

  Puis en appliquant de nouveau l'inégalité $(\mathcal{I})$ $(p_i > 0)$:

$$H_n(p_1, p_2, \dots p_n) + \sum_{i=1}^{n} p_i \ln(q_i) \leqslant \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ i \notin J}} p_i (\frac{q_i}{p_i} - 1) = \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ i \notin J}} (q_i - p_i) = \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ i \notin J}} q_i - \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ i \notin J}} p_i \leqslant \sum_{i \in [\![1, n]\!]} q_i - \left(\sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ i \notin J}} p_i + \underbrace{\sum_{i \in J} p_i}_{=0} \right) = 1 - 1$$

  Ainsi, dans ce cas également : $H_n(p_1, p_2, \dots p_n) \leqslant -\sum_{i=1}^{n} p_i \ln(q_i)$

  et avec également $q_i \leftarrow \dfrac{1}{n}$, on trouve $H_n(p_1, p_2, \dots p_n) \leqslant \ln n$.

Donc, dans tous les cas :

$$\boxed{\forall\ (p_1, p_2, \dots p_n) \in \Lambda_n,\ \ H_n(p_1, \dots p_n) \leqslant \ln n}$$

Par ailleurs, en prenant pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $p_i \leftarrow \dfrac{1}{n}$, on trouve

$$H_n(p_1, \dots p_n) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \ln \frac{1}{n} = \ln n \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} = \ln n$$

$$\boxed{\text{Donc cette majoration est optimale car } H_n(\frac{1}{n},\frac{1}{n},\dots\frac{1}{n}) = \ln n.}$$

IV.3. Établir directement la majoration (4) en appliquant à L l'inégalité de Jensen.

Soit $(p_1, p_2, \dots, p_n) \in \Lambda_n$

On a vu en question I.2.(a) que L est concave sur $[0,1]$. On peut appliquer l'inégalité de Jensen

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i L(x_i) \leqslant L(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i)$$

avec « le classique » $\lambda_i \leftarrow \dfrac{1}{n}$ et « le classique » $x_i \leftarrow p_i \in [0,1]$,

$$\frac{1}{n}H_n(p_1,\dots p_n) = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}L(p_i) \leqslant L\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{p_i}{n}\right) = L\left(\frac{1}{n}\underbrace{\sum_{i=1}^{n}p_i}_{=1}\right) = L\left(\frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{n}\ln\frac{1}{n} = \frac{\ln n}{n}$$

En multipliant par $n > 0$:

$$\boxed{\forall\ (p_1,p_2,\dots p_n) \in \Lambda_n,\ H_n(p_1,\dots p_n) \leqslant \ln n}$$

V Extension de l'inégalité

On note Λ_∞ l'ensemble des suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ à termes strictement positifs telles que $(P_n) = \left(\sum_{i=1}^{n} p_i\right)$ converge vers 1.

On fixe $p \in]0,1[$ et on considère particulièrement les suites $(a_n) = (p(1-p)^{n-1})_{n\geqslant 1}$ et $(b_n) = (\dfrac{4}{n(n+1)(n+2)})_{n\geqslant 1}$.

V.1. Montrer que $(a_n) \in \Lambda$ et $(b_n) \in \Lambda$.

On pourra chercher α, β, γ *tels que* $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = \dfrac{\alpha}{n} + \dfrac{\beta}{n+1} + \dfrac{\gamma}{n+2}$.

Notons pour commencer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = p(1-p)^{n-1} > 0$ car $p \in]0,1[$ et $b_n = \dfrac{4}{n(n+1)(n+2)} > 0$.

Ensuite, on note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ et $B_n = \sum_{i=1}^{n} b_i$.

Alors, comme somme de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $1-p$:

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} p(1-p)^{i-1} = p \times \frac{1-(1-p)^n}{1-(1-p)} = 1-(1-p)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

Puis, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{n+1} + \frac{\gamma}{n+2} = \frac{(\alpha+\beta+\gamma)n^2 + (3\alpha+2\beta+\gamma)n + 2\alpha}{n(n+1)(n+2)}$$

On a alors l'équivalence :

$$[\forall\ n \in \mathbb{N}^*, \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{n+1} + \frac{\gamma}{n+2} = \frac{4}{n(n+1)(n+2)}] \iff \left\{\begin{array}{llll} \alpha & +\beta & +\gamma & = 0 \\ 3\alpha & +2\beta & +\gamma & = 0 \\ 2\alpha & & & = 4 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ll} \alpha & = 2 \\ \beta & = -4 \\ \gamma & = 2 \end{array}\right.$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et après télescopage et par addition des limites :

$$B_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{n} - \frac{4}{n+1} + \frac{2}{n+2} = \frac{2}{1} + \frac{2}{2} - \frac{4}{2} - \frac{4}{n+1} + \frac{2}{n+1} + \frac{2}{n+2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2+1-2 = 1$$

$$\boxed{(a_n) \in \Lambda \text{ et } (b_n) \in \Lambda}$$

V.2. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, de deux manières différentes $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{k} a_k\right)$ afin d'établir $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} ka_k = \frac{1}{p}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.

D'une part,

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{k} a_k\right) = \sum_{k=1}^{n}(ka_k)$$

et d'autre part, en permutant les symboles sommatoires,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{k} a_k\right) &= \sum_{1\leqslant i\leqslant k\leqslant n} a_k \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=i}^{n} a_k\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(p\sum_{k=i}^{n}(1-p)^{k-1}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(p(1-p)^{i-1}\times\frac{1-(1-p)^{n-i+1}}{1-(1-p)}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\Big((1-p)^{i-1}\times(1-(1-p)^{n-i+1})\Big) \\
&= \sum_{i=1}^{n}(1-p)^{i-1} - \sum_{i=1}^{n}(1-p)^{n} \\
&= \frac{1-(1-p)^n}{1-(1-p)} - n(1-p)^n \\
&= \frac{1}{p} - \frac{1}{p}(1-p)^n - n(1-p)^n
\end{aligned}$$

d'où,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*\ ,\ \sum_{k=1}^{n} ka_k = \frac{1}{p} - \frac{1}{p}(1-p)^n - n(1-p)^n}$$

— $p \in]0,1[$ donc $|1-p| < 1$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(1-p)^n = 0$,

— $p \in]0,1[$ donc $|1-p| < 1$ donc $\ln(1-p) < 0$ si bien que le théorème des croissances comparées donne $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n(1-p)^n = \lim_{n\to+\infty} ne^{n\ln(1-p)} = 0$,

donc la suite $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n} ka_k\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} ka_k = \frac{1}{p}\ .}$$

V.3. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} kb_k = 2$.

On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, :

$$\sum_{k=1}^{n} kb_k = \sum_{k=1}^{n}\frac{4k}{k(k+1)(k+2)} = \sum_{k=1}^{n}\frac{4}{(k+1)(k+2)} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{4}{k+1} - \frac{4}{k+2}\right)$$

en appliquant la même méthode qu'en question V.1. Puis par télescopage :

$$\sum_{k=1}^{n} kb_k = \frac{4}{2} - \frac{4}{n+2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2$$

par addition de limite.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} kb_k = 2}$$

On note, pour tout $p \in]0,1[$, $\Lambda_\infty^p = \{(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}^*} \mid \sum_{k=1}^n p_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \text{ et } \sum_{k=1}^n kp_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{p}\}$.

Soit $q = (q_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \Lambda_\infty^p$. On considère la suite $(H_n(q))_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$H_n(q) = \sum_{k=1}^n L(q_k)$$

V.4. (a) Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $W_n = \sum_{k=1}^n q_k \ln(a_k)$. Justifier que (W_n) converge vers $\frac{1}{p}\ln(p^p(1-p)^{1-p})$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par propriété de ln (morphisme) :

$$W_n = \sum_{k=1}^n q_k \ln(p(1-p)^{k-1} = \ln p \sum_{k=1}^n q_k + \ln(1-p)\sum_{k=1}^n (k-1)q_k = (\ln p - \ln(1-p))\underbrace{\sum_{k=1}^n q_k}_{\to 1} + \ln(1-p)\underbrace{\sum_{k=1}^n kq_k}_{\to \frac{1}{p}}$$

Ainsi, par addition des limites de suites convergentes :

$$\boxed{(W_n) \text{ converge vers } (\ln p - \ln(1-p) + \frac{1}{p}\ln(1-p) = \frac{1}{p}(p\ln p + (1-p)\ln(1-p)) = \frac{1}{p}\ln(p^p(1-p)^{1-p}).}$$

(b) En exploitant l'inégalité $(\mathcal{I})$, montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$L(q_k) \leqslant a_k - q_k - q_k \ln a_k$$

On applique $(\mathcal{I})$ pour $x \leftarrow \frac{a_k}{q_k}(>0)$, $\ln(a_k) - \ln(q_k) = \ln\frac{a_k}{q_k} \leqslant \frac{a_k}{q_k} - 1$.
En multipliant par $q_k > 0$: $q_k \ln a_k - q_k \ln q_k \leqslant a_k - q_k$.
On a reconnu $L(q_k)$:

$$\boxed{L(q_k) \leqslant a_k - q_k - q_k \ln a_k}$$

(c) En déduire que $(H_n(q))$ est majorée et qu'elle converge.

Notons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $H_{n+1}(q) - H_n(q) = L(q_{n+1}) \geqslant 0$ car $q_{n+1} \in]0,1]$ et selon les variations de L.
Donc la suite $(H_n(q))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
Pour la même raison, les suites (A_n) et (Q_n) sont également croissantes, et positives.
$\forall\, n \in \mathbb{N} : 0 \leqslant A_n = \sum_{k=1}^n a_k \leqslant \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^n a_k = 1$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant \sum_{k=1}^n q_k \leqslant 1$.
Inversement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $W_{n+1} - W_n = q_n \ln(a_n) < 0$ car $a_n \in]0,1[$, donc $\ln(a_n) < 0$ et $q_n > 0$, puisque $q \in \Lambda_\infty^p$.
Ainsi la suite $(W_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et $0 \geqslant W_n \geqslant \lim W_n$
On a également, par majoration de sommes finies (questions précédentes) :

$$H_n(q) = \sum_{k=1}^n L(q_k) \leqslant \sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=1}^n q_k - W_n \leqslant 1 - 0 - \lim W_n$$

.

$$\boxed{\text{Donc } (H_n(q)) \text{ est majorée et comme elle est croissante, elle converge.}}$$

(d) Posons $H(q) = \lim_{n\to+\infty} H_n(q)$. Conclure que

$$H(q) \leqslant -\frac{1}{p}\ln(p^p(1-p)^{1-p}) \ .$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$H_n(q) = \sum_{k=1}^{n} L(q_k) \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} q_k - W_n$$

Or les trois suites additionnées à droite converge, donc la suite de droite converge vers $1-1-\dfrac{1}{p}\ln(p^p(1-p)^{1-p})$. Nous avons vu que celle de gauche également. Le passage à la limite conserve l'inégalité large :

$$\boxed{H(q) \leqslant -\frac{1}{p}\ln(p^p(1-p)^{1-p})}$$

(e) Cette majoration est-elle optimale ?

Nous savons que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = (p(1-p)^{n-1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ appartient à Λ_∞^p. Montrons qu'elle réalise un cas d'égalité dans la majoration de la question prácédente.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
H_n((a_k)) &= \sum_{k=1}^{n} L(a_k) \\
&= -\sum_{k=1}^{n} p(1-p)^{k-1} \underbrace{\ln(p(1-p)^{k-1})}_{=\ln p + (k-1)\ln(1-p)} \\
&= -p\ln p \sum_{k=1}^{n}(1-p)^{k-1} - p\ln(1-p)\sum_{k=1}^{n}(k-1)(1-p)^{k-1} \\
&= -p\ln p \sum_{k=1}^{n}(1-p)^{k-1} - p\ln(1-p)\sum_{k=1}^{n}k(1-p)^{k-1} + p\ln(1-p)\sum_{k=1}^{n}(1-p)^{k-1} \\
&= p(\ln(1-p) - \ln p)\sum_{k=1}^{n}(1-p)^{k-1} - p\ln(1-p)\sum_{k=1}^{n}k(1-p)^{k-1} \\
&= \qquad (5)
\end{aligned}$$
