Élément propres & Polynôme caractéristique

La première fois que l'on rencontre des matrices, on nous donne dans les exercices, pour étudier une matrice, une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $A = P \times D \times P^{-1}$.
Cette décomposition, qu'on appelle diagonalisation de A est bien pratique !!
Dans cette activité nous aimerions trouver à quelle condition(s) (nécessaire ?, suffisante ?) une telle décomposition est envisageable ; et comment algorithmiquement obtenir une telle décomposition.

On suppose que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n)$ diagonale telle que $A = P \times D \times P^{-1}$.

Alors que B est une matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{E})$.

On exploitera les résultats avec les matrices $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ ou $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -2 \end{pmatrix}$.

▷ **1.** Jusqu'au polynôme caractéristique...

1. Montrer que $\det(A - \mu I_n) = 0$ si et seulement si $\exists\, i \in \mathbb{N}_n$ tel que $\mu = \lambda_i$.
2. On note $\chi_A : t \mapsto \det(tI_n - A)$. Montrer que χ_A est une application polynomiale, que l'on factorisera. Quelles sont les racines de χ_A ?

Pour toute matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on appelle polynôme caractéristique de B, l'application $t \mapsto \det(tI_n - B)$. On note χ_B, le polynôme associé.

3. On considère $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ Calculer χ_S.
4. Montrer que pour toute matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, χ_B est bien un polynôme de degré n, unitaire.
5. Exprimer $[\chi_B]_0$ et $[\chi_B]_{n-1}$ en fonction de B.
6. Si B est d'ordre 3, montrer que $\chi_B = X^3 - \text{tr}(B)X^2 + \text{tr}(\text{com }(B))X - \det B$.

Pour trouver les coefficients de D, il est donc nécessaire de chercher les racines de χ_A
On note, pour toute matrice B, $\text{Sp}(B)$, l'ensemble des racines de χ_B.
Cet ensemble est appelé le spectre de B, ses éléments sont appelés les valeurs propres de B.

▷ **2.** Éléments propres

1. Montrer que le cardinal de $\text{Sp}(B)$ est majoré par n.
2. Montrer l'équivalence $\mu \in \text{Sp}(B) \iff \text{Ker }(B - \mu I_n) \neq \{0\}$

On appelle espace propre de B associée à la valeur propre μ, le s.e.v. $E_\mu(B) = \text{Ker }(B - \mu I_n)$.
Les éléments non nuls de cet espace sont appelés les vecteurs propres de B.
On rappelle qu'il s'agit d'un sous-espace de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$

3. Calculer les espaces propres de S.
4. On note $C_1, C_2, \dots C_n$ les n colonnes de P.
Montrer que si $A = PDP^{-1}$, alors pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $C_i \in E_{\lambda_i}(A)$

Pour trouver les colonnes de P, il est donc nécessaire de chercher les vecteurs propres de A.

Nous allons nous concentrer sur les espaces propres de B. Et commencer par voir qu'ils sont toujours en somme directe.

▷ **3.** Espaces en somme directe. Une condition suffisante de diagonalisabilité.

1. Montrer que $\mu_1 \neq \mu_2 \in \text{Sp}(B)$, alors on a la somme directe $E_{\mu_1}(B) \oplus E_{\mu_2}(B)$.

2. Montrer, plus généralement que la somme d'une famille quelconque d'espace propres de B est toujours directe.
3. En déduire que si $\mathrm{Card}\big(\mathrm{Sp}(B)\big) = n$, alors B est diagonalisable.
On donnera un algorithme pour obtenir P et D
4. Appliquer l'algorithme pour diagonaliser S.

▷ **4.** On se place dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. La matrice $E_{3,3}$ est-elle diagonalisable ?
On pourra faire un raisonnement par l'absurde.
2. Quelles sont ses valeurs propres ? Quels sont les espaces propres ?
3. La matrice T est-elle diagonalisable ?

▷ **5.** Polynôme annulateur.

Le polynôme caractéristique de A est $\chi_A = \prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i)$ et finalement, $\forall\ i \in \mathbb{N}_n$, $\lambda_i \in \mathrm{Sp}(A)$, mais il n'est pas impossible que $\lambda_{i_1} = \lambda_{i_2}$ et donc que χ_A soit de la forme $\prod_{\lambda\in\mathrm{Sp}(A)} (X - \lambda)^{n_\lambda}$.

Nous allons alors considérer $\mu_A = \prod_{\lambda\in\mathrm{Sp}(A)} (X - \lambda)$.

1. Montrer que $\mu_A(A) = 0$.

On dit que A est annulée par un polynôme simplement scindé

2. Réciproquement, on suppose qu'il existe un polynôme P simplement scindé qui annule B.
On suppose que $P = \prod_{i=1}^{s}(X - \mu_i)$ avec $\mu_i \neq \mu_j$.
   (a) Montrer que si $\lambda \in \mathrm{Sp}(B)$, alors $\exists\ i \in \mathbb{N}_s$ tel que $\lambda = \mu_i$.
   (b) Montrer qu'il existe $U_1, \dots U_s$ tel que $1 = \sum_{i=1}^{s} U_i \times \dfrac{P}{(X - \mu_i)}$ (relation polynomiale)
   (c) On admet (cf exercice précédent), que la somme $\oplus_{i=1}^{s} E_{\mu_i}$ est directe.
   Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, soit $X_i = \prod_{j\neq i}(B - \mu_j I_n)U_i(B)X$. Montrer que $X = \sum_{i=1}^{s} X_i$ et que $X_i \in E_{\mu_i}$
   (d) En déduire que B est diagonallisable
3. Conclure
4. Donner des polynômes annulateurs de S et T. Sont-ils simplement scindés ?

Nous proposons deux démonstrations du Théorème de Cayley-Hamilton

▷ **6.** Théorème de Cayley-Hamilton (1) - relation matricielle

1. On note $\mu_p = (-1)^p \sum_{I\subset\binom{\mathbb{N}_n}{n-p}} \det M^{I\wedge I}$ où $M^{I\wedge I}$ est la matrice M auquel on a enlevé les lignes et les colonnes d'indices $i \in I$.
Calculer μ_1 et μ_n.
2. Montrer que $\chi_M(t) = t^n + \mu_1 t^{n-1} + \mu_2 t^{n-2} + \cdots + \mu_{n-1}t + \mu_n$
3. Montrer de la même manière que $L(t) =^t \mathrm{com}(tI_n - M)$ est une fonction polynomiale en t, de degré $n-1$ et à coefficients dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
4. Calculer $L(t) \times (tI_n - M)$, montrer que l'on obtient une matrice colinéaire à I_n. Exprimer ce coefficient de colinéarité en fonction de $\chi_M(t)$.
5. En déduire la relation de Cayley-Hamilton :

$$\chi_M(M) = 0$$

Il ne suffit pas de dire on prend M à la place de t et « *pouf* » $\det(tI_n - M) = \det(M - M) = 0\dots$
En effet, ici nous avons une relation numérique et non matricielle.
Il faut donc faire le calcul coefficient par coefficient…

▹ **7.** Théorème de Cayley-Hamilton (2) - espace cyclique

On considère $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, non nul et $E_X = \text{vect}\{M^k X, k \in \mathbb{N}\}$. On note u, l'endomorphisme canoniquement associé à M.

1. Montrer que E_X est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On note $p = \dim(E_X)$. Nécessairement $p \leqslant n$.
2. Montrer que $(X, MX, \dots M^{p-1}(X))$ est une base de E_X.

On complète une base $\mathcal{B}'$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

3. Justifier qu'il existe $a_0, a_1, \dots a_{p-1} \in \mathbb{R}$ tel que $M^p X = \displaystyle\sum_{i=0}^{p-1} a_i M^i X$.

   On note $\pi = X^p - \displaystyle\sum_{i=0}^{p-1} a_i X^i$. Quelle peut-on dire de $\pi(M) \times X$?
4. A quoi ressemble $\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(u)$.
5. En déduire que $\pi | \chi_M$, puis que $\chi_M(M) \times X = 0$
6. Conclure

Correction des exercices

▷ Corrigé de l'exercice 1

1. $A-\mu I_n = PDP^{-1}-\mu PP^{-1} = P(D-\mu I_n)P^{-1}$. Donc $\det(A-\mu I_n) = \det P \times \det(D-\mu I_n)\det P^{-1} = \det(D-\mu I_n) = \det(\mathrm{diag}(\lambda_1-\mu,\lambda_2-\mu,\dots\lambda_n-\mu)) = \prod_{i=1}^{n}(\lambda_i-\mu)$.
   Ainsi $\det(A-\mu I_n)=0 \iff \exists\, i\in\mathbb{N}_n$ tel que $\mu=\lambda_i$.
2. La question précédente donne directement $\chi_A(t)=\prod_{i=1}^{n}(t-\lambda_i)$.
   Les racines de χ_A sont exactement les éléments de la diagonale de D. Avec la même multiplicité.
3. Dans ce cas particulier, on trouve :
$$\chi_S(t)=\det\begin{pmatrix} t-1 & -1 & 1\\ -2 & t & -1\\ -1 & 1 & t-2\end{pmatrix} = (t-1)t(t-2)+1+2+(t-1)+t-2(t-2) = t^3-3t^2+2t = t(t-1)(t-2)$$
4. Pour tout $n\in\mathbb{N}$,
$$\chi_B(t)=\det(tI_n-B)=\sum_{\sigma\in S_n}\epsilon(\sigma)\prod_{i=1}^{n}(t\delta_{i,\sigma(i)}-b_{i,\sigma(i)})$$
   Il s'agit bien d'une somme de produit de n monômes de degré 0 ou 1.
   Donc χ_B est bien un polynôme et on peut même affirmer que $\deg\chi_B\leqslant n$. Puis, avec $\sigma=\mathrm{id}$, on trouve le produit $\prod_{i=1}^{n}(t-b_{i,i})$, polynôme en t de degré n, unitaire.

   et dès qu'il existe i tel que $\sigma(i)\neq i$, alors $\prod_{i=1}^{n}(t\delta_{i,\sigma(i)}-b_{i,\sigma(i)})$ esst un polynôme de degré $\leqslant n-2$.

   Donc χ_B est bien de degré n et est unitaire.
5. On a même comme unique coefficient devant X^{n-1}, le nombre $\left[\prod_{i=1}^{n}(t-b_{i,i})\right]_{n-1}=\sum_{i=1}^{n}b_{i,i}=\mathrm{tr}(B)$.
   Alors que $[\chi_B]_0=\chi_B(0)=\det(0-B)=(-1)^n\det(B)$.
6. Faisons le calcul
$$\begin{aligned}\chi_B(t) &= \begin{vmatrix} t-b_{1,1} & -b_{1,2} & -b_{1,3}\\ -b_{2,1} & t-b_{2,2} & -b_{2,3}\\ -b_{3,1} & -b_{3,2} & t-b_{3,3}\end{vmatrix} = (t-b_{1,1})(t-b_{2,2})(t-b_{3,3})-b_{1,2}b_{2,3}b_{3,1}-b_{1,3}b_{2,1}b_{3,2}\\ &\qquad -(t-b_{1,1})b_{2,3}b_{3,2}-(t-b_{2,2})b_{1,3}b_{3,1}-(t-b_{3,3})b_{1,2}b_{2,2}\\ &= t^3-(b_{1,1}+b_{2,2}+b_{3,3})t^2+((b_{1,1}b_{2,2}-b_{1,2}b_{2,1}+b_{1,1}b_{3,3}-b_{1,3}b_{3,1}+b_{2,2}b_{3,3}-b_{2,3}b_{3,2})t\\ &\qquad -(b_{1,1}b_{2,2}b_{3,3}+b_{1,2}b_{2,3}b_{3,1}+b_{1,3}b_{2,1}b_{3,2}-b_{1,1}b_{2,3}b_{3,2}-b_{2,2})b_{1,3}b_{3,1}-b_{3,3}b_{1,2}b_{2,2}\\ &= t^3-\mathrm{tr}(B)t^2+\mathrm{tr}(\mathrm{com}\,(B))t+\det(B)\end{aligned}$$

▷ Corrigé de l'exercice 2

1. L'ensemble des racines d'un polynôme de degré n est de cardinal fini, majoré par $\deg\chi_B=n$ (taille de B)
2. $\mu\in\mathrm{Sp}(B)\iff\det(\mu I_n-B)=0\iff B-\mu I_n$ non inversible $\iff \mathrm{Ker}\,(B-\mu I_n)\neq\{0\}$
3. Il faut commencer par calculer les valeurs propres, i.e. les racines de χ_S. $\mathrm{Sp}(S)=\{0,1,2\}$.
   $E_0=\mathrm{vect}(1,-3,-2)^T$, $E_1=\mathrm{vect}(0,1,1)^T$ et $E_2=\mathrm{vect}(1,1,0)^T$.
4. On a $AP=PD$, si on écrit en colonnes (produit par blocs) :
$$\begin{aligned}AP &= A\times(C_1|C_2|\cdots|C_n)=(AC_1|AC_2|\cdots AC_n)=PD=(C_1|C_2|\cdots C_n)D\\ &=(\sum_{i=1}^{n}D_{i,1}C_i|\sum_{i=1}^{n}D_{i,2}C_i|\cdots\sum_{i=1}^{n}D_{i,n}C_i)=(\lambda_1C_1|\lambda_2C_2|\cdots|\lambda_nC_n)\end{aligned}$$
   On peut identifier chaque colonne : $\forall\, i\in\mathbb{N}$, $AC_i=\lambda_iC_i$. Donc $C_i\in E_{\lambda_i}$ et $C_i\neq 0$, sinon P ne serait pas inversible..

▷ Corrigé de l'exercice 3

1. Si $X\in E_{\mu_1}(B)\cap E_{\mu_2}(B)$, $BX=\mu_1X=\mu_2X$, donc $(\mu_1-\mu_2)X=0$, donc $X=0$. Ainsi $E_{\mu_1}(B)\oplus E_{\mu_2}(B)$

2. La définition n'est la somme directe ne consiste pas à prendre l'intersection.

   Il faut considérer $X_1, X_2 \dots X_k$ tel que $\sum_{i=1}^{k} X_i = 0$ avec pour tout $i \in \mathbb{N}_k$, $X_i \in E_{\mu_i}(B)$ ($\mu_i \neq \mu_j$).

   On doit alors montrer que pour tout $i \in \mathbb{N}_k$, $X_i = 0$.

   On montre alors, par récurrence que pour tout $B^p \times 0 = B^p \times (\sum_{i=1}^{k} X_i) = \sum_{i=1}^{k} \mu_i^p X_i$.

   Considérons la matrice $T = (X_1|X_2|\cdots|X_p) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

   Alors considérons $V = Vdm(1, \mu_1, \dots \mu_p)$, la matrice carrée de Vandermonde de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, dont on sait qu'elle est inversible puisque son déterminant est $\prod_{i<j}(\mu_i - \mu_j)$.

   On a alors $T \times V = (\sum_{i=1}^{p} \mu_i^j X_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$. Il s'agit donc de la matrice nulle.

   Comme V est inversible, on a donc $T = 0$. CQFD.

3. Comme les espaces sont en somme directe, qu'il y en a n ; en prenant un vecteur dans chaque espace propre, nous avons une famille libre de n éléments, donc une base.
   La concaténation de ces colonnes donne une matrice inversible. Et donc B est diagonalisable.

4. $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   P est inversible (les colonnes forment une famille libre) et $A \times P = P \times D$ avec $D = \mathrm{diag}(0, 1, 2)$.

▷ Corrigé de l'exercice 4

1. Non, car son polynôme caractéristique est X^3.
   Donc si elle était diagonalisable, elle serait semblable à la matrice nulle et donc serait la matrice nulle
2. $E_0 = \mathrm{vect}\big((1,0,0)^T, (0,1,0)^T\big)$ qui n'est pas de dimension 3
3. De même $\chi_T = X^3 - X^2 = X^2(X-1)$.
   $E_1 = \mathrm{vect}(1,-2,1)^T$ et $E_0 = \mathrm{vect}(1,-2,3)^T$.
   T n'est pas diagonalisable.

▷ Corrigé de l'exercice 5

1. On note $L0$ la ligne nulle.
   On montre, sans difficulté, que pour tout polynôme T, $T(A) = P \times P(D) \times P^{-1}$.
   Puis $\mu_A(D) = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} (D - \lambda I_n)$ Considérons la ligne i de cette matrice. Il existe $\lambda' \in \mathrm{Sp}(A)$ tel que $[D]_{i,i} = \lambda'$, donc $L_i(D - \lambda' I_n) = L0$ est la ligne nulle.
   Puis, par produit :
   $$L_i\left(\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} (D - \lambda I_n)\right) = L_i\left(L0 \times \prod_{\lambda \neq \lambda'} (D - \lambda I_n)\right) = L0$$
   Toutes les lignes sont nulles donc $\mu_A(D) = 0$, puis $\mu_A(A) = 0$.
2. Réciproquement, on suppose qu'il existe un polynôme P simplement scindé qui annule B.
   On suppose que $P = \prod_{i=1}^{s}(X - \mu_i)$ avec $\mu_i \neq \mu_j$.
   (a) Soit $\lambda_{\in}\mathrm{Sp}(B)$. Il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, non nulle tel que $BX = \lambda X$.
   Puis par récurrence triviale, et linéarité : pour tout polynôme T : $T(B)X = T(\lambda)X$.
   Donc comme $P(B) = 0$, nécessairement $P(\lambda)X = 0$. Or $X \neq 0$, donc $P(\lambda) = 0$.
   Donc λ est une racine de P i.e. : $\exists\, i \in \mathbb{N}_s$ tel que $\lambda = \mu_i$.
   (b) Les polynômes $\dfrac{P}{(X - \mu_i)}$ sont premiers entre eux, donc il existe $U_1, \dots U_s$ tel que $1 = \sum_{i=1}^{s} U_i \times \dfrac{P}{(X - \mu_i)}$.
   (c) On admet (cf exercice précédent), que la somme $\oplus_{i=1}^{s} E_{\mu_i}$ est directe.
   Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, soit $X_i = U_i(B) \times X$. On a donc, en exploitant la relation précédente (en $X = B$) :
   $I_n = \sum_{i=1}^{s}\left(\prod_{j \neq i}(B - \mu_j I_n) \times U_i(B)\right)$.

En la multipliant par X : $X = \sum_{i=1}^{s}\left(\prod_{j\neq i}(B-\mu_j I_n)\times U_i(B)\right)X = \sum_{i=1}^{s} X_i$ Or $(B-\mu_i)X_i = P(B)U_i(B)\times X = 0$, donc $X_i \in E_{\mu_i}$.

(d) On a donc la somme $E = \oplus_{i=1}^{s} E_{\mu_i}$.
Prenons une base adaptée à cette décomposition, puis P la matrice dont les colonnes forment cette base.
Alors $B\times P = P\times D$, avec P inversible donc B est diagonalisable.

3. Finalement, B est diagonalisable ssi $\prod_{\lambda\in \mathrm{Sp}(B)}(X-\lambda)$ est un polynôme simplement scindé, annulateur de B.
4. $P_S = X(X-1)(X-2)$ est annulateur, simplement scindé et S est diagonalisable. $Q_T = X^2(X-1)$ est annulateur, mais non simplement scindé et $P_T = X(X-1)$ n'est pas annulateur donc T n'est pas diagonalisable.

▷ Corrigé de l'exercice 6

Dans tout le problème, on note $M = (a_{i,j})$.

1. $\mu_1 = (-1)^1 \sum_{I\subset\binom{\mathbb{N}_n}{n-1}} \det M^{I\wedge I}$.
   Dans ce cas I est un sous-ensemble de $\mathbb{N}_n$ de cardinal $(n-1)$,
   il s'agit donc des n ensembles $I_k = \mathbb{N}_n\backslash\{k\}$, donc $M^{I_k\wedge I_k} = a_{k,k}$.
   Par conséquent : $\mu_1 = -\sum_{k=1}^{n} a_{k,k} = -\mathrm{tr}(M)$
   Et $\mu_n = (-1)^n \sum_{I\subset\binom{\mathbb{N}_n}{n-n}} \det M^{I\wedge I} = (-1)^n \det M^{\emptyset\wedge\emptyset} = (-1)^n \det M$

$$\boxed{\mu_1 = -\mathrm{tr}(M) \text{ et } \mu_n = (-1)^n \det M.}$$

2. Comme $I_n = (\delta_{i,j})$, on peut écrire (formule du déterminant) : $\chi_M(t) = \sum_{\sigma\in S_n}\left(\epsilon(\sigma)\prod_{i=1}^{n}(\delta_{\sigma(i),i}t - a_{\sigma(i),i})\right)$.
   Il s'agit donc d'une somme de produits de n monômes (de degré 1 ou 0) en t. C'est donc bien un polynôme.
   Par ailleurs ce polynôme est au plus de degré n.
   En effet, chacun des monômes est de degré 1, au plus
   et on a exactement un produit de n monômes de degré 1 pour $\sigma = \mathrm{id}$.
   Soit $k\in [\![0,n]\!]$, cherchons maintenant quelle est la valeur du coefficients devant t^k (noté $[\chi_M]_k$).
   Dans le développement précédent, pour que t^k, il s'agit de prendre :
   — k fois t dans le développement donc cela apparait pour toute permutation σ qui laisse fixe au moins k valeurs de $[\![1,n]\!]$.
   Par exemple on peut considérer $\sigma(i_1) = i_1 \ldots \sigma(i_k) = i_k$.
   — A chaque ensemble $\{i_1,\ldots i_k\}$ fixé par σ, on trouve alors associé à $t^k = t\delta i_1, i_1 \times \ldots t\delta_{i_k,i_k}$, le nombre
$$\epsilon(\sigma)\prod_{j\notin\{i_1,i_2,\ldots i_k\}}(-a_{\sigma(j),j}) = (-1)^{n-k}\epsilon(\sigma)\prod_{j\notin\{i_1,i_2,\ldots i_k\}} a_{\sigma(j),j}$$
   Notons alors $I = \{i_1, i_2, \ldots i_k\}$ et considérons alors σ' la permutation de $\mathbb{N}_n\backslash I$
   telle que $\forall\, j\notin I$, $\sigma'(j) = \sigma(j)$,
   alors les transpositions qui décomposent σ décomposent aussi σ' et donc $\epsilon(\sigma) = \epsilon(\sigma')$
   On a donc associé à $t^k = t\delta i_1, i_1 \times \ldots t\delta_{i_k,i_k}$, le nombre
$$(-1)^{n-k}\epsilon(\sigma')\prod_{j\notin I} a_{\sigma'(j),j} = (-1)^{n-k}\det(A^{I\wedge I})$$
   Insistons : il y a autant de I que de $\{i_1,\ldots i_k\}$.
   Globalement, on a donc comme coefficient devant t^k :
$$\sum_{I\subset\binom{N_n}{k}} (-1)^{n-k}\det(A^{I\wedge I}) = \mu_k$$

On peut conclure que

$$\boxed{\chi_M(t) = t^n + \mu_1 t^{n-1} + \mu_2 t^{n-2} + \cdots + \mu_{n-1} t + \mu_n}$$

On notera que $\mu_0 = 1$ (déterminant de la matrice vide...)

3. Par définition : $L(t) = ^t \mathrm{com}(tI_n - M)$.
Pour construire la comatrice, on fait un calcul de déterminant pour chacun des coefficients de cette matrice.
Donc pour tout $i, j \in \mathbb{N}_n$, $\mathrm{Coef}_{i,j}(L(t))$ est un polynôme en t.
Il est obtenu en supprimant une ligne et une colonne de $tI_n - M$,
donc toujours au moins un t dans le calcul du déterminant.
Ainsi le polynôme obtenu est de degré $\deg(\chi_M) - 1 = n - 1$.
Au lieu d'écrire la matrice en coefficient polynomiale $A = (P_{i,j}(t))_{i,j}$,
on écrit la matrice A sous la forme $A = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} A_k t^k$, avec $A_k = ([P_{i,j}]_k)_{i,j}$,
c'est-à-dire $A_k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ comme matrice des coordonnées de t^k dans $P_{i,j}$,
Et on peut affirmer :

$$\boxed{L(t) = ^t \mathrm{com}(tI_n - M) \text{ est une fonction polynomiale en } t \text{, de degré } n-1 \text{ et à coefficients dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).}$$

4. Soit $t \in \mathbb{K}$.
Un résultat du cours énonce que pour tout A, ${}^t\mathrm{com}(A) \times A = \det(A) I_n$, donc pour $A = tI_n - M$:

$$\boxed{\forall\, t \in \mathbb{K}, \qquad L(t) \times (tI_n - M) = \det(tI_n - M) I_n = \chi_M(t) \times I_n}$$

5. On cherche à démontrer la relation de Cayley-Hamilton : $\chi_M(M) = 0$ Et par ailleurs, en conservant la notation $L(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} A_k t^k$ avec $A_k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a

$$L(t)(tI_n - M) = \sum_{k=0}^{n} A_k t^k (tI_n - M) = \sum_{k=0}^{n} A_k t^{k+1} - A_k M t^k = A_{n-1} t^n + \sum_{h=1}^{n-1} (A_{h-1} - A_h M) t^h - A_0 M$$

$$= \chi_M(t) I_n = t^n I_n + \sum_{h=0}^{n-1} \mu_{n-h} I_n t^h$$

L'égalité de deux polynômes permet d'affirmer une égalité des coefficients.
Donc (si besoin, en prenant $A_{-1} = O_n$) :

$$A_{n-1} = I_n \qquad \text{et } \forall\, h \in [\![0, n-1]\!], (A_{h-1} - A_h M) = \mu_{n-h} I_n$$

Reste alors à calculer χ_M. En notant $M^0 = I_n$, on a :

$$\chi_M(M) = M^n + \sum_{k=1}^{n} \mu_k M^{n-k} = M^n + \sum_{h=0}^{n-1} \mu_{n-h} M^h = M^n + \sum_{h=0}^{n-1} (A_{h-1} - A_h M) M^h$$

$$= M^n + \sum_{h=0}^{n-1} A_{h-1} M^h - \sum_{h=0}^{n-1} A_h M^{h+1} = M^n + A_{-1} I_n - A_{n-1} M^n$$

par télescopage.
Or $A_{-1} = 0$ et $A_{n-1} = I_n$.

$$\boxed{\text{On trouve donc la relation de Cayley-Hamilton : } \chi_M(M) = 0}$$

▷ **Corrigé de l'exercice 7**

1. Puisque les combinaisons linéaires de M^kX qui définissent les éléments de E_X sont nécessairement finis, on a $E_X = \mathbb{K}[M] \times X = \{P(M) \times X, P \in \mathbb{K}[X]\}$.
   C'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, il est nécessairement de dimension finie p, avec $p \leqslant n$.
2. Compte-tenu de la dimension de E_X, il suffit de montrer que la famille $(X, MX, \dots M^{p-1}(X))$ est génératrice de E_X pour en conclure qu'il s'agit d'une base de E_X.
   (X) est libre, donc $\{k \in \mathbb{N} \mid (X, MX, \dots M^{k-1}X) \text{ libre}\}$ est non vide, inclus dans $\mathbb{N}$, majoré par $p+1$,
   (sinon, on a une famille libre de $p+1$ vecteurs pris dans E_X, de dimension p. Impossible).
   Donc cet ensemble admet un plus grand élément. Notons $r = \max\{k \in \mathbb{N} \mid (X, MX, \dots M^{k-1}X) \text{ libre}\}$.
   On a donc $M^rX \in \text{vect}(X, MX, \dots M^{r-1}X)$, il existe $a_0, \dots a_{r-1}$ tel que $M^rX = a_0X + a_1MX + \dots a_{r-1}M^{r-1}X$. Nous allons montrer que $r = p$. Par récurrence, montrons que :
   $\forall\ h \geqslant r,\ M^hX \in \text{vect}(X, MX, \dots M^{r-1}X)$.
   • Le résultat est vrai pour $h = r$, nous l'avons vu plus haut. • Si le résultat est vraie pour h, alors $M^hX = \lambda_0X + \lambda_1MX + \cdots + \lambda_{r-1}M^{r-1}X$.
   On a donc $M^{h+1}X = M \times M^hX = \lambda_0MX + \lambda_1M^2X + \cdots + \lambda_{r-2}M^{r-1}X + \lambda_{r-1}M^rX = \lambda_{r-1}a_0X + (\lambda_0 + \lambda_{r-1}a_1)X + \cdots + (\lambda_{r-2} + \lambda_{r-1}a_{r-1})X^{r-1}$.
   Ainsi le résultat est également vrai pour $h+1$.
   On a donc $\text{vect}(X, MX, \dots M^{r-1}X) \subset E_X \subset \text{vect}(X, MX, \dots M^{r-1}X)$.
   On a donc une famille libre et génératrice de E_x, composée de $r = \dim E_X = p$ éléments.
3. On a déjà exploité ce résultat.
   On a $\pi(M)\times = M^pX - \displaystyle\sum_{i=0}^{p-1} a_iM^iX = 0$.
4. Les premiers vecteurs de B' sont $X, MX, \dots M^{p-1}X$, dont l'image par u (produit par M) donne $MX, M^2X \cdots M^pX = \displaystyle\sum_{i=0}^{p-1} M^iX$, donc on a par block :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u') = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \qquad \text{avec } A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a_{p-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{p-1} \end{pmatrix}$$

5. On a alors $\chi_M = \chi_u = \chi_{\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(u)}$.
   Il s'agit d'un déterminant d'une triangulaire supérieure par blocs, donc $\chi_M(x) = \det(xI_p - A) \times \det(xI_{n-p} - D)$.
   Or $\det(xI_p - A)$ est le déterminant de la matrice compagnon. Classiquement, on trouve : $\det(xI_p - A) = (x^p - \displaystyle\sum_{i=0}^{p-1} a_ix^i) = \pi(x)$.
   Donc $\pi | \chi_M$. Donc $\chi_M = Q \times \pi$ et $\chi(M) \times X = Q(M) \times \pi(M) \times X = 0$
6. On a donc pour tout $X \neq 0$, $\chi(M)X = 0$. Ainsi la matrice $\chi(M)$ est nécessairement nulle.