Le 16.03.23

Devoir à la maison n°6
CORRECTION

Exercice. Suite de polynômes

On considère la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes à coefficients réels définis par :

$$P_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall\, n\in\mathbb{N},\ P_{n+1} = 2XP_n - \frac{1}{n+1}(1+X^2)P_n'$$

1. Posons, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n$: « $\deg P_n \leqslant n$ ».
   — $\deg P_0 = \deg 1 = 0$. Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
   — Soit $n\in\mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie.
   Alors $\deg P_n' = \deg P_n - 1 \leqslant n-1$.
   Et donc $\deg[\frac{1}{n+1}(1+X^2)P_n'] \leqslant 2+(n-1) = n+1$, alors que $\deg 2XP_n \leqslant 1+n$.
   Donc $\deg P_{n+1} \leqslant \max(\deg 2XP_n, \deg[\frac{1}{n+1}(1+X^2)P_n']) \leqslant n+1$.
   Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
   $\boxed{\text{Pour tout } n\in\mathbb{N}, \text{ le polynôme } P_n \text{ est de degré} \leqslant n.}$

2. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on écrit $P_n = a_nX^n + Q_n$ avec $Q_n\in\mathbb{R}[X]$ de degré $\leqslant n-1$.
   (a) Fixons $n\in\mathbb{N}$. On a donc
   $$\begin{aligned} P_{n+1} &= 2XP_n - \tfrac{1}{n+1}(1+X^2)P_n' = 2a_nX^{n+1} + 2XQ_n - \tfrac{1}{n+1}(1+X^2)(na_nX^{n-1}+Q_n') \\ &= (2a_n - \tfrac{n}{n+1}a_n)X^{n+1} + \underbrace{2XQ_n - \frac{1}{n+1}(na_nX^{n-1} + (1+X^2)Q_n')}_{:=T_n} \end{aligned}$$
   Or $\deg Q_n \leqslant n-1$, donc $\deg T_n \leqslant n$.
   On peut donc identifier le coefficient de X^{n+1} :
   $$\boxed{\text{Pour tout } n\in\mathbb{N},\ a_{n+1} = \left(2 - \tfrac{n}{n+1}\right)a_n = \frac{n+2}{n+1}a_n.}$$
   (b) La suite $(\dfrac{a_n}{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite constante : $\forall\, n\in\mathbb{N},\ \dfrac{a_{n+1}}{n+2} = \dfrac{a_n}{n+1}$,
   donc, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\dfrac{a_n}{n+1} = \dfrac{a_0}{1} = 1$.
   $$\boxed{\forall\, n\in\mathbb{N}, \quad a_n = n+1}$$
   On a vu que $\deg P_n \leqslant n$ et donc $[P_n]_n = n+1$, donc $\deg P_n \geqslant n$.
   $$\boxed{\forall\, n\in\mathbb{N}, \quad \deg P_n = n.}$$

3. Soit $P, U\in\mathbb{K}[X]$. Par composition, la dérivée de $T\circ U$ est $U'\times T'\circ U$.
   Donc si $U(X) = -X$, on a pour dérivée de $T(-X)$, le polynôme $-1\times T'(-X)$.
   Posons, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\mathcal{Q}_n$: « $P_n(-X) = (-1)^nP_n(X)$ ».
   — $P_0 = 1$, donc $P_0(-X) = 1 = P_0(X)$, donc $\mathcal{Q}_0$ est vraie.
   — Soit $n\in\mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{Q}_n$ est vraie. On compose :
   $$P_{n+1}(-X) = 2(-X)P_n(-X) - \frac{1}{n+1}(1+(-X)^2)P_n'(-X)$$
   $P_n(-X) = (-1)^nP(X)$, donc si on dérive cette relation : $-P_n'(-X) = (-1)^nP'(X)$.
   $$P_{n+1}(-X) = -(-1)^n[2XP_n(X)] - \frac{1}{n+1}(1+X^2)(-1)^{n+1}P'(X) = (-1)^{n+1}P_{n+1}(X)$$
   Ainsi $\mathcal{Q}_n$ est vraie.
   $\boxed{\text{Pour tout } n\in\mathbb{N},\ P_n(-X) = (-1)^nP_n(X), \text{ puis préciser la parité du polynôme } P_n \text{ en fonction de } n.}$

4. Valeur en 0 du polynôme P_n pour $n\in\mathbb{N}$ et une expression intégrale.

(a) Montrons le résultats, de nouveau par récurrence.
$P_0 = 1$, $P_1 = 2XP_0 - 1(1+X^2)P_0' = 2X$ et donc $P_1' = 2 = 2 \times P_0$.
Le résultat est donc vraie pour $n = 1$.
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Supposons que le résultat est vrai pour en $n-1$.
On a alors $P_n' = (n+1)P_{n-1}$ et donc $P_{n+1} = 2XP_n - (1+X^2)P_{n-1}$.
Puis (en dérivant) :

$$\begin{aligned} P_{n+1}' &= 2P_n + 2XP_n' - 2XP_{n-1} - (1+X^2)P_{n-1}' = 2P_n + \overbrace{2X(n+1)P_{n-1}}^{\text{d'après la formule}} - 2XP_{n-1} - (1+X^2)P_{n-1}' \\ &= 2P_n + 2XnP_{n-1} \underbrace{+nP_n - 2nXP_{n-1}}_{\text{définition de } P_n} = 2P_n + nP_n = (n+2)P_n \end{aligned}$$

Donc le résultat est vraie en $n+1$.

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ P_{n+1}' = (n+2)P_n.}$$

(b) On a vu que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n(-X) = (-1)^n P_n(X)$.
En particulier $P_{2n+1}(-X) = -P_{2n+1}(X)$. Et en particulier, en substituant en 0 :

$$P_{2n+1}(0) = P_{2n+1}(-0) = -P_{2n+1}(0) \Rightarrow 2P_{2n+1}(0) = 0$$

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ P_{2n+1}(0) = 0.}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, puisque $\frac{1}{m+2}P'_{m+1} = P_m$ (question précédente) :

$$P_{2n+2} = 2XP_{2n+1} - (1+X^2)P_{2n}$$

En substituant en 0 : $P_{2n+2}(0) = -P_{2n}(0)$. La suite $(u_n)_n := (P_{2n}(0))_n$ est géométrique de raison -1 et de premier terme $u_0 = P_0(0) = 1$. Donc

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ P_{2n}(0) = (-1)^n.}$$

(c) On a : $P_{n+1}' = (n+2)P_n$, on peut donc intégrer les fonctions polynomiales entre 0 et x :

$$\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R} \qquad P_{n+1}(x) - P_{n+1}(0) = \int_0^x P_{n+1}'(t)\mathrm{d}t = (n+2)\int_0^x P_n(t)\mathrm{d}t}$$

5. Expression des polynômes P_n.

(a) On a déjà démontré cette relation en 4.(b).

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ P_{n+2} - 2XP_{n+1} + (1+X^2)P_n = 0.}$$

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = P_n(x)$.

i.

$$\boxed{u_0 = P_0(x) = 1}$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{u_{n+2} = P_{n+2}(x) = 2xP_{n+1}(x) - (1+x^2)P_n(x) = 2xu_{n+1} - (1+x^2)u_n}$$

ii. (u_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.
L'équation caractéristique associée est $r^2 - 2xr + (1+x^2) = (r-x)^2 + 1 = (r-x)^2 - i^2$,
dont les racines sont $x+i$ et $x-i$.
Alors, il existe $A, B \in \mathbb{K}$ tel que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = A(x+i)^n + B(x-i)^n$.
Or $u_0 = 1 = A + B$ et $u_1 = x(A+B) + i(A-B) = 2x$ (calcul en 4.(a))
Donc $A + B = 1$ et $A - B = \frac{x}{i}$, ainsi $A = \dfrac{x+i}{2i}$ et $B = \dfrac{-x+i}{2i}$.

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \frac{1}{2i}\left((x+i)^{n+1} - (x-i)^{n+1}\right)}$$

(c) On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P_n(x) = u_n = \dfrac{1}{2i}\left((x+i)^{n+1} - (x-i)^{n+1}\right)$.
Donc, $P_n - \dfrac{1}{2i}\left((X+i)^{n+1} - (X-i)^{n+1}\right)$ admet une infinité de racines. C'est le polynôme nul.

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ P_n = \frac{1}{2i}\left((X+i)^{n+1} - (X-i)^{n+1}\right).}$$

6. Soit $z \in \mathcal{Z}_P$.
Notons qu'avec cette définition, a priori, $\deg P_n \leqslant n+1$.
Or $[P_n]_{n+1} = \dfrac{1}{2i}\left([(X+i)^{n+1}]_{n+1} - [(X-i)^{n+1}]_{n+1}\right) = \dfrac{1}{2i}(1-1) = 0$ (Formule de Newton).
Donc $\deg P_n \leqslant n$ et P_n admet au plus n racines. Ce qui est conforme à 2.(b)
Rappelons enfin que le terme dominant de P_n est $(n+1)X^n$.
D'après la question précédente :

$$2iP_n(z) = 0 = (z+i)^{n+1} - (z-i)^{n+1} \Longleftrightarrow \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^{n+1} = 1$$

car, nécessairement, $z \neq i$, puisque i n'est pas racine de P_n ($P_n(i) = (2i)^n \neq 0$.
Ainsi, il existe un unique $k \in [\![0,n]\!]$ tel que $\dfrac{z+i}{z-i} = \exp\left(\dfrac{2ik\pi}{n+1}\right) := \omega_k$.
donc $(1-\omega_k)z = -i(1+\omega_k)$ et ainsi $z = i\dfrac{1+\omega_k}{\omega_k - 1}$ à condition que $\omega_k \neq 1$ i.e. $k \neq 0$.
Et en effet, on ne peut avoir $z+i = z-i$! Donc $k \in [\![1,n]\!]$
On factorise par l'angle moitié :

$$z = i\frac{2e^{ik\pi/(n+1)}\cos\dfrac{k\pi}{n+1}}{2ie^{ik\pi/(n+1)}\sin\dfrac{k\pi}{n+1}} = \cot\frac{k\pi}{n+1}$$

Reste à montrer que ces racines sont distinctes.
Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$: $0 < \dfrac{k\pi}{n+1} < \pi$.
La fonction cotan est strictement décroissante sur $]0,\pi[$ sur $]-\infty,+\infty[$,
elle est donc injective et pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $\text{cotan}\dfrac{k\pi}{n+1} \neq \text{cotan}\dfrac{k'\pi}{n+1}$ si $k \neq k'$.
On a donc trouvé n racines distinctes de P_n, ce qui donne la factorisation :

$$\boxed{P_n = (n+1)\prod_{k=1}^{n}\left(X - \cot\frac{k\pi}{2n+1}\right)}$$

Problème - Espace vectoriel engendré par les matrices nilpotentes

I. Similitude de matrices de rang 1

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice de rang 1. On désigne par f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ canoniquement associé à A, i.e. $f : \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $M \mapsto A \times M$.

1. Comme f est canoniquement associé à A, elles ont le même rang donc rang $(f) = 1$.
On a alors, d'après le théorème du rang :

$$\boxed{\dim(\text{Ker } f)) = \dim E - \text{rang }(f) = \dim(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})) - 1 = n-1}$$

2. (a) $(e_1, e_2, \dots, e_{n-1})$ une base de Ker f, il s'agit donc d'une famille libre.
On a donc l'équivalence (lemme de complétion libre) :

$$e_n \in \text{vect}(e_1, e_2, \dots e_{n-1}) = \text{Ker } f \Longleftrightarrow (e_1, \dots e_{n-1}, e_n)\text{liée}$$

Or par définition de e_n, $e_n \notin$ Ker f, on a donc $(e_1, \dots e_{n-1}, e_n)$ non liée, i.e. libre.
Ainsi, $(e_1, \dots e_{n-1}, e_n)$ est une famille libre de $n = \dim(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ éléments.

$$\boxed{\text{Donc la famille } (e_1, \dots, e_{n-1}, e_n) \text{ est une base de } \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}).}$$

(b) On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots e_n)$ cette base de E.
Pour tout $i \in \mathbb{N}_{n-1}$, $f(e_i) = 0$, puisque $e_i \in$ Ker f.
Donc les $n-1$ premières colonnes de $\mathcal{B} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$ sont nulles.
Ensuite $f(e_n)$ s'écrit sur la base $\mathcal{B}$: il existe $\alpha_1, \dots \alpha_{n-1}, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tels que $f(e_n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$.
Et donc la dernière colonne de B contient ces nombres, ainsi $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_1 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots & \alpha_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \alpha_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}$.

Enfin, A et B sont deux matrices semblables, car elles sont matrices du même endormorphisme f dans deux bases de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, différentes. Elles sont donc semblables et ont en particulier la même trace.
Or $\operatorname{tr}(B) = \alpha_n = \operatorname{tr}(A)$, on peut réécrire B en remplaçant α_n par $\operatorname{tr}(A)$.

$$\boxed{\text{il existe des scalaires } \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1} \text{ tel que } B = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_1 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots & \alpha_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \alpha_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \operatorname{tr}(A) \end{pmatrix}.}$$

3. On suppose ici que $\operatorname{tr}(A) \neq 0$.

   (a) On note $e'_n = e_n + \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i}{\operatorname{tr}(A)} e_i$. On applique la linéarité de f, connaissant l'expression de $f(e_n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$ (on rappelle que $\operatorname{tr}(A) = \alpha_n$) et $f(e_i) = 0$ si $i \leqslant n-1$:

$$f(e'_n) = f(e_n) + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i}{\alpha_n} f(e_i) = \alpha_n e_n + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i e_i + \sum_{i=1}^{n-1} 0 = \alpha_n \left(e_n + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i}{\alpha_n} e_i \right) = \alpha_n e'_n$$

$$\boxed{f(e'_n) = \operatorname{tr}(A) \cdot e'_n}$$

   (b) Le vecteur e'_n n'est pas combinaison linéaire de $(e_1, \dots e_{n-1})$ (libre), donc $(e_1, e_2, \dots e_{n-1}, e'_n)$ est libre. Il s'agit donc d'une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
   La matrice de f dans cette base est nulle, exceptée le dernier coefficient qui vaut $\operatorname{tr}(A)$.

$$\boxed{A \text{ est semblable à cette matrice : nulle, excepté le coefficient en ligne } n \text{ et colonne } n \text{ qui vaut } \operatorname{tr}(A).}$$

4. On suppose ici que $\operatorname{tr}(A) = 0$. On garde les notations de la question 2.

   (a) Puisque $\operatorname{tr}(A) = \alpha_n = 0$, $f(e_n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i e_i$.
   Or $(e_1, e_2, \dots e_{n-1})$ est une base de $\operatorname{Ker} f$, donc

$$\boxed{f(e_n) \in \operatorname{Ker} f}$$

   (b) On pose alors $e'_{n-1} = f(e_n)$. Le vecteur (e'_{n-1}) est un vecteur non nul de $\operatorname{Ker} f$. On peut lui associer $\dim \operatorname{Ker} f - 1 = (n-1) - 1 = n-2$ vecteurs $(e'_1, \dots e'_{n-2})$ vecteurs pour obtenir une base $= (e'_1, \dots, e'_{n-2}, e'_{n-1})$ de $\operatorname{Ker} f$.
   Pour les mêmes raisons qu'en 2.(a) (mêmes hypothèses, même conclusion) :

$$\boxed{\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_{n-1}, e_n) \text{ est une base de } \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}).}$$

   (c) Comme en 2.(b), les $n-1$ premières colonnes de $B' = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(f)$ sont nulles.
   Puis $f(e_n) = e'_{n-1}$. Donc la dernière de colonne de B' est nulle, sauf en ligne $n-1$, où figure le nombre 1.

$$\boxed{B' = E_{n-1,n}.}$$

   Il s'agit toujours d'une matrice de f mais dans une nouvelle base. Toutes ces matrices sont semblables.

$$\boxed{\text{En particulier, } A \text{ est semblable à } B', \text{ i.e } \exists\, P \in GL_n(\mathbb{K}) \text{ tel que } A = P \times B' \times P^{-1}}$$

   (d) $(B')^2 = E_{n-1,n} E_{n-1,n} = \delta_{n-1,n} E_{n-1,n}$ (avec le symbole de Kronecker)

$$\boxed{\text{Donc } B'^2 = 0, \text{ ainsi } A^2 = (PB'P^{-1})(PB'P^{-1}) = PB'^2P^{-1} = 0.\ A \text{ est nilpotente.}}$$

5. Si deux matrices sont semblables, alors nécessairement elles ont la même trace. Le sens direct est assuré.
   Réciproquement, supposons que A et A' ont même trace et sont de rang 1.
   - Si $\operatorname{tr}(A) \neq 0$, alors A et A' sont toutes deux semblables à $\operatorname{tr}(A) E_{n,n} = \operatorname{tr}(A') E_{n,n}$ (q. 3). Par transitivité, elles sont toutes les deux semblables.

- Si $\mathrm{tr}(A) = 0$, alors A et A' sont toutes deux semblables à $E_{n-1,n}$ (q. 4).
  Par transitivité, elles sont toutes les deux semblables.

Ainsi, dans tous les cas A et A' sont semblables.

$$\boxed{\text{Deux matrices de rang 1 sont semblables dans } \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \text{ si et seulement si elles ont la même trace.}}$$

II. Sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ engendré par les matrices nilpotentes

On note $\mathcal{V}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ engendré par les matrices nilpotentes.

1. Linéarité et noyau de la trace.
   (a) C'est une question de cours. tr est linéaire et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

   $$\boxed{\text{L'application tr est une forme linéaire non nulle. Donc } \dim \mathrm{Ker}\ \mathrm{tr} = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) - 1 \text{ et rang (tr)} = 1.}$$

   (b) Il s'agit du noyau de tr

   $$\boxed{\dim\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \mathrm{tr}(M) = 0\} = \dim \mathrm{Ker}\ \mathrm{tr} = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) - 1 = n^2 - 1.}$$

2. Soit $k \in \mathbb{N}_{n-1}$. Les colonnes de F_k d'indice i tel $i \notin \{k, k+1\}$ sont nulles. Donc :

   $$\text{rang } (F_k) = \text{rang } (C_1(F_k), \ldots C_n(F_k)) = \text{rang } (C_k(F_k), C_{k+1}(F_k)) = \text{rang } (C_k(F_k)$$

   Or $C_k(F_k)$ étant non nulle, on obtient

   $$\boxed{\text{rang } (F_k) = 1}$$

   Ensuite,

   $$\boxed{\mathrm{tr}(F_k) = \sum_{i=1}^{n} {}^{i}[F_k]_i = 0 + \cdots + 0 + \underbrace{1}_{i=k} + \underbrace{(-1)}_{i=k+1} + 0 + \cdots + 0 = 1 - 1 = 0}$$

   D'après la partie précédente, Q.4, $F_k^2 = 0$ et

   $$\boxed{F_k \text{ est nilpotente.}}$$

3. On rappelle $\mathcal{V}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ engendré par les matrices nilpotentes.
   ATTENTION : l'ensemble des matrices nilpotentes $\mathcal{N}$ n'est pas un espace vectoriel car l'addition de deux matrices nilpotentes peut donner une matrice non nilpotente. C'est ce qui se passe ici.
   Donc $\mathcal{V} = \mathrm{vect}\mathcal{N}$ est plus gros (que $\mathcal{N}$). Jusqu'à où ?

   C'est une formule du cours : $F_{i,j} \times F_{k,\ell} = \delta_{j,k} F_{i,\ell}$.
   Donc avec $k \leftarrow i$ et $\ell \leftarrow j$, $F_{i,j}^2 = \delta_{j,i} F_{i,j} = 0$ car $i \neq j$.
   Donc $F_{i,j}$ est nilpotente. Donc $F_{i,j} \in \mathcal{N} \subset \mathcal{V}$
   De même, d'après la question précédente, $F_i \in \mathcal{N} \subset \mathcal{V}$.
   Reste à montrer que $(F_1, \ldots, F_{n-1}, F_{1,2}, \ldots F_{1,n}, \ldots\ldots, F_{n,1}, \ldots F_{n,n-1})$ est libre.
   Soient $(\lambda_k) \in \mathbb{K}^{n-1}$ et $(\lambda_{i,j})_{i \neq j} \in \mathbb{K}^{n(n-1)}$ tels que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k F_k + \sum_{i \neq j} \lambda_{i,j} F_{i,j} = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.
   On obtient une matice nulle dont les coefficients (i,j) tels que $|i-j| > 1$ sont $\lambda_{i,j}$.
   Donc pour tout (i,j) tel que $|i-j| > 1$, $\lambda_{i,j} = 0$.
   Il reste donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} (\lambda_k F_k + \lambda_{k,k+1} F_{k,k+1} + \lambda_{k+1,k} F_{k+1,k} = 0$.
   Mais, pour cette nouvelle matrice, le coefficient en $(1,1)$ est λ_1, il est nul.
   puis celui en $(2,2)$ est $-\lambda_1 + \lambda_2 = 0 + \lambda_2$, il est nul donc $\lambda_2 = 0$,
   et ainsi de suite, de proche en proche : $\forall\ k \in \mathbb{N}_{n-1}$, $\lambda_k = 0$.
   Et enfin pour finir, le coefficient en $(k, k+1)$ restant est $\lambda_{k,k+1} = 0$, de même pour $\lambda_{k+1,k}$.
   Par conséquent la famille $(F_1, \ldots, F_{n-1}, F_{1,2}, \ldots F_{1,n}, \ldots\ldots, F_{n,1}, \ldots F_{n,n-1})$ est libre

   $$\boxed{\begin{gathered}\text{Pour tout } i \neq j,\ F_{i,j} \text{ est nilpotente et montrer que } (F_1, \ldots, F_{n-1}, F_{1,2}, \ldots F_{1,n}, \ldots\ldots, \\ F_{n,1}, \ldots F_{n,n-1}) \text{ est une famille libre de l'espace vectoriel } \mathcal{V}.\end{gathered}}$$

4. **On admet dans cette question : si N est nilpotente, alors $\mathrm{tr}(N) = 0$.**
Nous proposons une démonstration plus bas. L'année prochaine, en exploitant le polynôme et le polynôme caractéristique, le résultat sera beaucoup plus simple à démontrer.
On a trouvé une famille libre de $\mathcal{V}$ contenant $(n-1) + n(n-1) = n^2 - n + n - 1 = n^2 - 1$ vecteurs. Donc $\mathcal{V}$ est un sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de dimension ou bien $n^2 - 1$ ou bien n^2 ($\Leftrightarrow \mathcal{V} = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$).
Or on a vu que tous les vecteurs (ici matrice) de cette famille sont de trace nulle,
donc il s'agit d'une famille libre de Ker tr.
Cette famille libre, composée de $n^2 - 1 = \dim(\text{Ker tr})$ éléments, est une base de Ker tr.
On a ainsi Ker $tr = \mathrm{vect}((F_1, \dots, F_{n-1}, F_{1,2}, \dots F_{1,n}, \dots\dots, F_{n,1}, \dots F_{n,n-1})) \subset \mathcal{V}$,
Par ailleurs, tout élément de $\mathcal{N}$ est nilpotente, donc de trace nulle. Donc $\mathcal{N} \subset$ Ker tr
$\mathcal{V}$ est le plus petit sev contenant $\mathcal{N}$,
Ker tr est un espace vectoriel contenant $\mathcal{N}$, donc il contient $\mathcal{V}$. Donc $\mathcal{V} \subset$ Ker tr.
Par double inclusion :
$$\boxed{\mathcal{V} = \text{Ker tr}}$$

5. On cherche des matrices de $\mathcal{V} \setminus \mathcal{N}$.
Par exemple $S = E_{1,1} - E_{2,2}$ a une trace nulle, elle appartient à $\mathcal{V}$
car $E_{1,1} - E_{2,2} = F_1 + F_{1,2} - F_{2,1}$,
mais elle n'est pas nilpotente car $S^2 = E_{1,1} + E_{2,2}$ et $S^3 = S$.
Donc $S^k = S$ si k impair ou $S^k = S^2$ si k pair.
et par conséquent, S^k n'est jamais nulle.

$$\boxed{\text{Il existe des matrices de trace nulle, et non nilpotentes, comme par exemple : } S = E_{1,1} - E_{2,2} \dots}$$

mais ces matrices sont toutes combinsaion linéaire de matrices nilpotentes.

Montrons par récurrence forte sur $n \in \mathbb{N}^*$: $\mathcal{P}_n$:≪ Si N est d'ordre n, nilpotente alors sa trace est nulle. ≫.

— $N = (a)$ est nilpotente alors il existe k tel que $N^k = (a^k) = (0)$, donc $a^k = 0$ ainsi $a = 0$ et $\mathrm{tr}(N) = a = 0$.
Ainsi $\mathcal{P}_1$ est vraie.

— Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geqslant 2$. Supposons que $\mathcal{P}_1, \dots \mathcal{P}_{n-1}$ sont vraies.
Soit N nilpotente. Si $N = 0$, l'affaire est réglée. Supposons donc que $N \neq 0$.
Soit $f : \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $X \mapsto NX$. Dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, on a $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = N$.
f est l'endomorphisme canoniquement associée à N.
N est nilpotente, d'indice k (i.e. $N^k = 0$ et $N^{k-1} \neq 0$) avec $k \geqslant 1$ (sinon $N = 0$).
Comme $N^{k-1} \neq 0$, il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus$ Ker (N^{k-1}).
Notons, pour $k \in \mathbb{N}$, $X_k := N^k X$. Montrons que $(X_0, \dots X_{k-1})$ est libre (et au passage : $k \leqslant n$).
Soit $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}$ tel que $\displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i X_i = 0$.
Supposons que $I = \{i \mid \lambda_i \neq 0\}$ est non vide. Soit $i_0 = \min I$.
Alors $\displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i X_i = \sum_{i=i_0}^{k-1} \lambda_i X_i = \sum_{i=i_0}^{k-1} \lambda_i N^i X = 0$. Multiplions par N^{k-i_0-1}, on a donc
$$0 = N^{k-i-1} \times 0 = \sum_{i=i_0}^{k-1} \lambda_i N^{k+i-i_0-1} X = \lambda_{i_0} N^{k-1} X + \sum_{i=i_0+1}^{k-1} \lambda_i \underbrace{N^k}_{=0} N^{i-i_0-1} X$$
Donc $\lambda_{i_0} X = 0$, impossible. Donc I est vide et donc $\forall\, i \in [\![0, k-1]\!]$, $\lambda_i = 0$.
La famille $(X_0, X_1, \dots X_{k-1})$ est libre. Complétons là en une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
Notons cette base $\mathcal{B} = (X_0, X_1, \dots X_{k-1}, X_k \dots X_{n-1})$. On a (par blocs) :
$$M := \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} A & B \\ 0_{n-k,k} & C \end{pmatrix} \text{ avec } C \in \mathcal{M}_{n-k,n-k}(\mathbb{K}), B \in \mathcal{M}_{k,n-k}(\mathbb{K}) \text{ et } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
On a alors M et N semblables, donc $\mathrm{tr}(N) = \mathrm{tr}(M) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(C) = \mathrm{tr}(C)$, vu la forme de A.
On montre facilement que $M^s = \begin{pmatrix} A^s & B_s \\ 0_{n-k,k} & C^s \end{pmatrix}$ où B_s est une matrice compliquée...
Mais M^k est semblable à $N^k = 0$, donc $M^k = 0$, donc $C^k = 0$. Donc C est nilpotente.
On peut appliquer $\mathcal{P}_{n-k}$ à C car $k \geqslant 1$, donc $\mathrm{tr}(C) = 0$ et donc $\mathrm{tr}(N) = \mathrm{tr}(M) = 0 + 0 = 0$.
Ainsi $\mathcal{P}_n$ est vraie.
$$\boxed{\text{Donc si } N \text{ est nilpotente, alors } \mathrm{tr}(N) = 0.}$$