Devoir à la maison n°9
CORRECTION

Exercice - Calcul de déterminant par blocs

On considère dans cette partie A, B, C, D des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que $D \times C = C \times D$

1. Soit la matrice définie par blocs

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$$

Faisons le calcul (par blocs) demandé :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & O_n \\ -C & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AD - BC & B \\ CD - DC & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AD - BC & B \\ O_n & D \end{pmatrix}$$

car $C \times D = D \times C$.
En prenant le déterminant de ce produit, on a donc

$$\det M \times \det D = \det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \times \det \begin{pmatrix} D & O_n \\ -C & I_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} AD - BC & B \\ O_n & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC) \times \det D$$

d'après la formule du calcul du déterminant par produit par blocs (appliquée deux fois).
Donc comme D est inversible, $\det D \neq 0$ et donc

$$\boxed{\det(M) = \det(AD - BC)}$$

2. Pour tout $x \in \mathbb{C}$, on pose $D_x = D - xI_n$ et $M_x = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D_x \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$.

(a) On note $P(x) = \det(D - xI_n)$. On sait que le développement du déterminant est polynomiale ; et comme pour l'exercice suivant, on montre que P est un polynôme de degré n.
Donc S, l'ensemble des racines de P est fini ; il possède au plus n éléments distincts.
Donc pour tout $x \notin S$, $D_x = D - xI_n$ est inversible.
Par ailleurs : $D_x \times C = (D - xI_n) \times C = DC - xC = CD - xC = C(D - xI_n) = CD_x$.
Donc C et D_x commutent.
On peut donc appliquer le résultat trouvé dans la question précédente (toutes les hypothèses sont vérifiées).

$$\boxed{\det(M_x) = \det(AD_x - BC) \text{ pour tout nombre complexe } x \notin S \text{ où } S \text{ est fini dans } \mathbb{C}.}$$

Remarques !
Cet ensemble S est ce qu'on appelle le spectre de D, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs propres de D

(b) Ici nous allons appliquer une raisonnement de continuité.
Si D est inversible, alors le résultat s'obtient par la première question.
Supposons donc que D n'est pas inversible.
On applique la seconde réponse : $\det(M_x) = \det(AD_x - BC)$ pour tout nombre complexe $x \notin S$ où S est fini.
Mais $\det(M_x) = P(x)$ est un polynôme en x et $\det(AD_x - BC) = Q(x)$ est également un polynôme en x.
Donc $P - Q$ admet une infinité de racines (tous les nombres qui ne sont pas dans S), donc $P = Q$.
Et en particulier en $x = 0$:

$$\boxed{\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC) \text{ dés que } D \times C = C \times D \text{ (même si } D \text{ non inversible).}}$$

Exercice - Théorème de Cayley-Hamilton

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On définit pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\chi(t) = \det(tI_n - M)$$

appelé la fonction caractéristique de M. Dans tout le problème, on suppose que $M = (a_{i,j})$.

1. $\mu_1 = (-1)^1 \sum_{I \subset \binom{\mathbb{N}_n}{n-1}} \det M^{I \wedge I}$.

   Dans ce cas I est un sous-ensemble de $\mathbb{N}_n$ de cardinal $(n-1)$,
   il s'agit donc des n ensembles $I_k = \mathbb{N}_n \backslash \{k\}$, donc $M^{I_k \wedge I_k} = a_{k,k}$.

   Par conséquent : $\mu_1 = -\sum_{k=1}^{n} a_{k,k} = -\mathrm{tr}(M)$

   Et $\mu_n = (-1)^n \sum_{I \subset \binom{\mathbb{N}_n}{n-n}} \det M^{I \wedge I} = (-1)^n \det M^{\emptyset \wedge \emptyset} = (-1)^n \det M$

$$\boxed{\mu_1 = -\mathrm{tr}(M) \text{ et } \mu_n = (-1)^n \det M.}$$

2. Comme $I_n = (\delta_{i,j})$, on peut écrire (formule du déterminant) : $\chi_M(t) = \sum_{\sigma \in S_n} \left(\epsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} (\delta_{\sigma(i),i} t - a_{\sigma(i),i}) \right)$.

   Il s'agit donc d'une somme de produits de n monômes (de degré 1 ou 0) en t. C'est donc bien un polynôme.
   Par ailleurs ce polynôme est au plus de degré n.
   En effet, chacun des monômes est de degré 1, au plus
   et on a exactement un produit de n monômes de degré 1 pour $\sigma = \mathrm{id}$.
   Soit $k \in [\![0, n]\!]$, cherchons maintenant quelle est la valeur du coefficients devant t^k (noté $[\chi_M]_k$).
   Dans le développement précédent, pour que t^k, il s'agit de prendre :
   — k fois t dans le développement donc cela apparait pour toute permutation σ qui laisse fixe au moins k valeurs de $[\![1, n]\!]$.
   Par exemple on peut considérer $\sigma(i_1) = i_1 \dots \sigma(i_k) = i_k$.

   — A chaque ensemble $\{i_1, \dots i_k\}$ fixé par σ, on trouve alors associé à $t^k = t\delta i_1, i_1 \times \dots t\delta_{i_k, i_k}$, le nombre

$$\epsilon(\sigma) \prod_{j \notin \{i_1, i_2, \dots i_k\}} (-a_{\sigma(j),j}) = (-1)^{n-k} \epsilon(\sigma) \prod_{j \notin \{i_1, i_2, \dots i_k\}} a_{\sigma(j),j}$$

   Notons alors $I = \{i_1, i_2, \dots i_k\}$ et considérons alors σ' la permutation de $\mathbb{N}_n \backslash I$
   telle que $\forall\, j \notin I$, $\sigma'(j) = \sigma(j)$,
   alors les transpositions qui décomposent σ décomposent aussi σ' et donc $\epsilon(\sigma) = \epsilon(\sigma')$
   On a donc associé à $t^k = t\delta i_1, i_1 \times \dots t\delta_{i_k, i_k}$, le nombre

$$(-1)^{n-k} \epsilon(\sigma') \prod_{j \notin I} a_{\sigma'(j),j} = (-1)^{n-k} \det(A^{I \wedge I})$$

   Insistons : il y a autant de I que de $\{i_1, \dots i_k\}$.
   Globalement, on a donc comme coefficient devant t^k :

$$\sum_{I \subset \binom{N_n}{k}} (-1)^{n-k} \det(A^{I \wedge I}) = \mu_k$$

   On peut conclure que

$$\boxed{\chi_M(t) = t^n + \mu_1 t^{n-1} + \mu_2 t^{n-2} + \dots + \mu_{n-1} t + \mu_n}$$

   On notera que $\mu_0 = 1$ (déterminant de la matrice vide...)

3. Par définition : $L(t) =^t \mathrm{com}(tI_n - M)$.
   Pour construire la comatrice, on fait un calcul de déterminant pour chacun des coefficients de cette matrice.
   Donc pour tout $i, j \in \mathbb{N}_n$, $\mathrm{Coef}_{i,j}(L(t))$ est un polynôme en t.

Il est obtenu en supprimant une ligne et une colonne de $tI_n - M$,
donc toujours au moins un t dans le calcul du déterminant.
Ainsi le polynôme obtenu est de degré $\deg(\chi_M) - 1 = n - 1$.
Au lieu d'écrire la matrice en coefficient polynomiale $A = (P_{i,j}(t))_{i,j}$,
on écrit la matrice A sous la forme $A = \sum_{k=0}^{n-1} A_k t^k$, avec $A_k = ([P_{i,j}]_k)_{i,j}$,
c'est-à-dire $A_k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ comme matrice des coordonnées de t^k dans $P_{i,j}$,
Et on peut affirmer :

$$\boxed{L(t) = {}^t\mathrm{com}(tI_n - M) \text{ est une fonction polynomiale en } t, \text{ de degré } n-1 \text{ et à coefficients dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).}$$

4. Soit $t \in \mathbb{K}$.
Un résultat du cours énonce que pour tout A, ${}^t\mathrm{com}(A) \times A = \det(A) I_n$, donc pour $A = tI_n - M$:

$$\boxed{\forall\, t \in \mathbb{K}, \quad L(t) \times (tI_n - M) = \det(tI_n - M) I_n = \chi_M(t) \times I_n}$$

5. On cherche à démontrer la relation de Cayley-Hamilton : $\chi_M(M) = 0$

Remarques !
Il ne suffit pas de dire on prend M à la place de t et pouf $\det(tI_n - M) = \det(M - M) = 0\ldots$
En effet, ici nous avons une relation numérique et non matricielle.
Il faut donc faire le calcul coefficient par coefficient...

Et par ailleurs, en conservant la notation $L(t) = \sum_{k=0}^{n-1} A_k t^k$ avec $A_k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a

$$L(t)(tI_n - M) = \sum_{k=0}^{n} A_k t^k (tI_n - M) = \sum_{k=0}^{n} A_k t^{k+1} - A_k M t^k = A_{n-1} t^n + \sum_{h=1}^{n-1} (A_{h-1} - A_h M) t^h - A_0 M$$

$$= \chi_M(t) I_n = t^n I_n + \sum_{h=0}^{n-1} \mu_{n-h} I_n t^h$$

L'égalité de deux polynômes permet d'affirmer une égalité des coefficients.
Donc (si besoin, en prenant $A_{-1} = O_n$) :

$$A_{n-1} = I_n \quad \text{ et } \forall\, h \in [\![0, n-1]\!], (A_{h-1} - A_h M) = \mu_{n-h} I_n$$

Reste alors à calculer χ_M. En notant $M^0 = I_n$, on a :

$$\chi_M(M) = M^n + \sum_{k=1}^{n} \mu_k M^{n-k} = M^n + \sum_{h=0}^{n-1} \mu_{n-h} M^h = M^n + \sum_{h=0}^{n-1} (A_{h-1} - A_h M) M^h$$

$$= M^n + \sum_{h=0}^{n-1} A_{h-1} M^h - \sum_{h=0}^{n-1} A_h M^{h+1} = M^n + A_{-1} I_n - A_{n-1} M^n$$

par télescopage.
Or $A_{-1} = 0$ et $A_{n-1} = I_n$.

$$\boxed{\text{On trouve donc la relation de Cayley-Hamilton : } \chi_M(M) = 0}$$